Автоморфизмы и формы торических факторов однородных пространств

Алексей Скоробогатов

May 8, 2009

УДК 512.816.4, 512.745.2

Аннотация. Вычисляется группа автоморфизмов фактора обобщенного грассманиана G/P по действию максимального тора полупростой группы G. Классифицируются формы таких факторов, т.е. многообразия, изоморфные им над алгебраическим замыканием основного поля. Доказывается, что все они унирациональны.

Ключевые слова. Однородные пространства, торы, формы, торсоры.

Введение

Пусть G - полупростая алгебраическая группа, определенная над полем k характеристики 0, а P - ее максимальная параболическая подгруппа. Основной целью данной работы является вычисление группы автоморфизмов фактора проективного однородного пространства G/P по действию максимального тора группы G, а также классификация $\overline{k}/k$-форм этого фактора, т.е. многообразий над k, которые становятся изоморфны ему над алгебраическим замыканием $\overline{k}$. Наш подход использует торсоры, структурной группой которых является алгебраический тор, поэтому прежде всего мы напомним основные понятия и конструкции.

Пусть X - алгебраическое многообразие над k, а T - алгебраический тор. Торсор (или главное однородное пространство) над X со структурной группой T - это многообразие $\mathcal{T}$, снабженное морфизмом $\mathcal{T} \to X$ с послойным действием T, локально в этальной топологии изоморфное прямому произведению $X \times_k T$. Кольо-Телен и Сансюк ввели в рассмотрение класс X-торсоров, названных ими универсальными торсорами; их структурной группой является алгебраический тор, двойственный к группе Пикара $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$ с ее структурой $\mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$-модуля (в предположении, что она не имеет кручения). Многочисленные примеры указывают на то, что изучение рациональных точек на универсальном X-торсоре проще, чем на исходном многообразии X. Так, если k - числовое поле, то в этом смысле можно трактовать основные теоремы теории спуска Кольо-Телена и Сансюка (см. [1], Ch. 3, [2], Ch. 6), но даже и в случае произвольного основного поля универсальные торсоры полезны при изучении R-эквивалентности рациональных точек. В последние годы универсальные торсоры стали играть важную роль в аналитической теории чисел в задачах оценки роста числа рациональных точек ограниченной высоты на проективных многообразиях. Одно из затруднений при этом состоит в том, что для многих интересных многообразий построение системы уравнений, задающих универсальные торсоры, является нетривиальной задачей. В этой работе мы подходим к проблеме с другой стороны. Пусть Y - аффинный конус над гладким проективным многообразием, вложенным при помощи T-линеаризованного обильного пучка, и пусть $U \subset Y$ - открытое подмножество, состоящее из точек x таких, что орбита Tx замкнута, а естественное отображение $T \to Tx$ биективно. В геометрической теории инвариантов доказывается существование фактора $X = U/T$ в категории алгебраических многообразий, при этом морфизм $U \to X$ является торсором с группой T (Лемма 1.4). Более того, если коразмерность $Y \setminus U$ в Y больше 1, и $\operatorname{Pic} \overline{Y} = 0$, то $U \to X$ - универсальный торсор (Теорема 1.6 (i)).

Обобщенные грассмановы многообразия G/P, где P - параболическая подгруппа полупростой группы G, образуют естественный класс гладких проективных многообразий с действием тора, в качестве которого можно взять любой максимальный тор G. Если P - максимальная параболическая подгруппа, то $\operatorname{Pic} G/P$ - бесконечная циклическая группа, порожденная классом обильного пучка, так что аффинный конус над G/P имеет тривиальную группу Пикара, т.е. может быть использован для построения универсальных торсоров. Простейший случай, когда дополнение к U имеет коразмерность больше 1, - грассманиан $G(2,5)$, на котором действует максимальный тор группы $G = \mathrm{SL}(5)$; в этом случае X - поверхность дель Пеццо степени 5 (см. [3], [4]). Для этого случая мы получаем ([2], 3.1):

(a) описание универсальных торсоров на X;

(b) вычисление группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} \overline{X}$;

(c) классификацию $\overline{k}/k$-форм X как факторов $G(2,5)$ по действию максимальных торов G; отсюда получается, что

(d) все $\overline{k}/k$-формы X унирациональны, в частности, они содержат плотное по Зарискому множество k-точек.

Отметим, что все поверхности дель Пеццо степени 5 изоморфны над $\overline{k}$, так что все они - $\overline{k}/k$-формы друг друга. Таким образом, из (d) вытекает классическая теорема Энриквеса, утверждающая, что всякая поверхность дель Пеццо степени 5 имеет рациональную точку над полем определения (конечным или бесконечным). Для малых значений m и n факторам грассманианов $G(m,n)$, и их естественным компактификациям посвящена обширная литература (см., например, [3], [5], и приведенные в этих работах ссылки). При $n = 6$ и $m = 2$ многообразие X есть множество гладких точек кубики Сегре

$$\sum_{i=0}^{5} x_i = \sum_{i=0}^{5} x_i^3 = 0,$$

представляющей собой трехмерную кубику с максимальным числом изолированных особых точек (десять). При $n = 6$ и $m = 3$ многообразие X есть множество гладких точек двулистного накрытия $\mathbf{P}_k^4$, разветвленного в трехмерном многообразии Игузы - компактификации пространства модулей абелевых поверхностей со структурой уровня 2 (напомним, что мы предполагаем, что характеристика поля k равна 0). Соответствие Гельфанда–Макферсона [5] представляет X в виде фактора многообразия стабильных конфигураций n точек в $\mathbf{P}_k^{m-1}$ по действию $\mathrm{GL}(m)$. Отметим, что поверхности дель Пеццо степени $d = 2$, 3, 4 естественным образом вкладываются в факторы обобщенных грассманианов для систем корней E_7, E_6, D_5, соответственно, см. [6] и [7].

В этой статье мы обобщаем (a), (b), (c) и (d) со случая $G(2,5)$ на произвольные обобщенные грассманианы G/P такие, что дополнение ко множеству стабильных точек с тривиальными стабилизаторами имеет коразмерность больше 1. Все случаи, когда это условие не выполнено, приведены в Предложении 2.1. Единообразное описание группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\overline{X}$ получается, если исключить также случай максимального тора группы типа B_n, действующего на грассманиане n-мерных изотропных подпространств в $2n+1$-мерном векторном пространстве с невырожденной симметрической формой, и случай максимального тора группы типа G_2, действующего на квадрике - орбите вектора старшего веса - в 7-мерном представлении группы типа G_2. Вкратце изложим схему доказательства. Фактор $X = U/T$ обладает некоторым естественным торсором $\mathcal{T}$, на который поднимаются автоморфизмы X, причем $\mathrm{Pic}\,\mathcal{T}$ порождается классом обильного пучка, так что G/P получается из $\mathcal{T}$ как замыкание по Зарискому в соответствующем проективном вложении. Вычисление группы автоморфизмов X получается тогда из описания группы автоморфизмов G/P, данного Титсом и Демазюром [8] (Теорема 2.2). Далее, недавний результат Ф. Жилля [9] и Рагунатана [10] о максимальных торах в квазиразложимых группах позволяет доказать, что всякая $\overline{k}/k$-форма X есть фактор однородного пространства квазиразложимой формы G по ее максимальному тору (Теорема 2.4). Отсюда следует, что всякая $\overline{k}/k$-форма X унирациональна, в частности множество рациональных точек на ней плотно по Зарискому. Было бы интересно ответить на вопрос о рациональности этих многообразий над полем k.

1. Торсоры и скрученные формы

1.1. Подъем автоморфизмов на торсор

Пусть k - поле характеристики нуль с алгебраическим замыканием $\overline{k}$, и группой Галуа $\Gamma = \mathrm{Gal}\,(\overline{k}/k)$. Обозначим через $\overline{X}$ многообразие, полученное из X расширением основного поля с k до $\overline{k}$. Предположим, что X - геометрически целое и удовлетворяет условию $\overline{k}[X]^* = \overline{k}^*$. Пусть T - алгебраический тор, определенный над k. Через $\hat{T}$ обозначается группа характеров тора T, наделяемая естественной структурой Γ-модуля. Имеется следующая точная последовательность Кольо-Телена и Сансюка (см., например, [2], (2.22)):

$$0 \to \mathrm{H}^1(k,T) \to \mathrm{H}^1(X,T) \xrightarrow{\chi} \mathrm{Hom}_\Gamma(\hat{T}, \mathrm{Pic}\,\overline{X}) \xrightarrow{\partial} \mathrm{H}^2(k,T) \to \mathrm{H}^2(X,T). \qquad (1)$$

Торсор $\mathcal{T} \to X$ со структурной группой T задает класс $[\mathcal{T}]$ в $\mathrm{H}^1(X,T)$. Его образ $\chi([\mathcal{T}]) \in \mathrm{Hom}_\Gamma(\hat{T}, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ называется *типом* данного торсора. Когда T - k-разложимый тор, т.е. $T \simeq \mathbf{G}^n_{m,k}$, из (1) и теоремы Гильберта 90 следует, что торсор со структурной группой T определяется своим типом с точностью до изоморфизма. Из (1) следует, что торсор типа τ существует тогда и только тогда, когда $\partial(\tau) = 0$. Кроме того, из (1) видно, что множество торсоров данного типа либо пусто, либо находится в (неканонической) биекции с $\mathrm{H}^1(X,T)$.

Торсор называется *универсальным*, если его тип - изоморфизм $\hat{T} \simeq \mathrm{Pic}\,\overline{X}$.

Есть еще одна полезная точная последовательность, полученная Кольо-Теленом и Сансюком ([1], (2.1.1)):

$$1 \to \overline{k}^* \to \overline{k}[\mathcal{T}]^* \to \hat{T} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X} \to \mathrm{Pic}\,\overline{\mathcal{T}} \to 0. \qquad (2)$$

Гомоморфизм $\hat{T} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}$ с точностью до знака совпадает с типом торсора $\mathcal{T} \to X$. Из (2) видно, что гомоморфизм, задаваемый типом, инъективен тогда и только тогда, когда $\overline{k}[\mathcal{T}]^* = \overline{k}^*$.

Следующая лемма является вариацией замечаний, сделанных в [11] (Thm. 1.2, Prop. 1.4). Пусть $\mathrm{Aut}\,X$ - группа автоморфизмов k-многообразия X.

Лемма 1.1 *Пусть X - геометрически целое многообразие над k, такое что $\overline{k}[X]^* = \overline{k}^*$. Пусть $f : \mathcal{T} \to X$ - торсор, структурной группой которого является тор T, а тип $\lambda : \hat{T} \to \mathrm{Pic}\,\overline{X}$ инъективен. Обозначим $\mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda) \subset \mathrm{Aut}\,\overline{X}$ множество автоморфизмов, оставляющих инвариантной подгруппу $\lambda(\hat{T}) \subset \mathrm{Pic}\,\overline{X}$. Тогда имеется точная последовательность групп, снабженных действием группы Галуа Γ, эквивариантная относительно этого действия:*

$$1 \to T(\overline{k}) \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})) \to \mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda) \to 1, \qquad (3)$$

где $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ - нормализатор подгруппы $T(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}$. При этом $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ есть группа автоморфизмов $\overline{\mathcal{T}}$, сохраняющих слои проекции $\overline{\mathcal{T}} \to \overline{X}$.

Доказательство. Инъективность гомоморфизма $T(\overline{k}) \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ очевидна. Ясно также, что любой автоморфизм торсора $\overline{\mathcal{T}}$, нормализующий подгруппу $T(\overline{k})$, спускается до автоморфизма $\overline{X}$. Группа $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ действует согласованно на $\overline{\mathcal{T}}$ и $\overline{X}$, а также действует сопряжениями на $\overline{T} = T(\overline{k})$. При одновременном действии $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ на $\overline{X}$ и $\overline{T}$ класс $[\overline{\mathcal{T}}]$ в $\mathrm{H}^1(\overline{X}, \overline{T})$ остается на месте. Поэтому из точной последовательности (1) следует, что это действие сохраняет тип торсора $\chi([\overline{\mathcal{T}}]) \in \mathrm{Hom}_\Gamma(\hat{T}, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$, т.е. факторгруппа $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ по $T(\overline{k})$ гомоморфно отображается в $\mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda)$.

Докажем инъективность этого гомоморфизма. Если α лежит в его ядре, то для любого $x \in \mathcal{T}(\overline{k})$ имеем $\alpha(x) = t(x)x$, где $t : \mathcal{T} \to T$ - морфизм многообразий. Однако ввиду инъективности λ из точной последовательности (2) следует, что $\overline{k}[\mathcal{T}]^* = \overline{k}^*$, т.е. любой морфизм из $\mathcal{T}$ в тор переводит $\mathcal{T}$ в точку. Поэтому α происходит из действия некоторого элемента $T(\overline{k})$, что доказывает требуемую инъективность.

Остается доказать, что образ $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$ в $\mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda)$ совпадает со всей группой. Ввиду инъективности λ естественное действие $\mathrm{Aut}\,\overline{X}$ на $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ задает действие $\mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda)$ на $\hat{T}$. Пусть $h \in \mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda)$ действует на $\hat{T}$ посредством автоморфизма $\hat{\tau}_h$. Обозначим τ_h соответствующий автоморфизм тора $\overline{T}$. Тогда $\lambda \circ \hat{\tau}_h = h^* \circ \lambda$ для любого $h \in \mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda)$, где h^* - естественное действие h на $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$. Отсюда следует, что $\overline{X}$-торсор со структурной группой $\overline{T}$, полученный из $f : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{X}$ заменой базы $h : \overline{X} \to \overline{X}$ имеет тот же тип, что и $\overline{X}$-торсор, полученный заменой структурной группы $\tau_h : \overline{T} \to \overline{T}$. Поскольку $\overline{X}$ не имеет непостоянных обратимых регулярных функций, можно воспользоваться последовательностью (1), из которой следует, что эти два $\overline{X}$-торсора изоморфны. Таким образом, любой автоморфизм $h \in \mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda)$ происходит из некоторого автоморфизма $\rho \in \mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}$, сохраняющего слои $\overline{\mathcal{T}} \to \overline{X}$. Докажем, что любой $\rho \in \mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}$, сохраняющий слои $\overline{\mathcal{T}} \to \overline{X}$, нормализует $T(\overline{k})$. Пусть $t \in T(\overline{k})$, тогда $\psi := \rho t \rho^{-1}$ сохраняет слои проекции $\overline{\mathcal{T}} \to \overline{X}$. Канонический изоморфизм $\mathcal{T} \times_X \mathcal{T} = \mathcal{T} \times_k T$ отождествляет график ψ с графиком некоторого морфизма $\overline{\mathcal{T}} \to \overline{T}$. Согласно (2) из инъективности λ следует $\overline{k}[\mathcal{T}]^* = \overline{k}^*$, поэтому образ любого морфизма из $\overline{\mathcal{T}}$ в тор состоит из одной точки. Следовательно, ψ действует на $\overline{\mathcal{T}}$ сдвигом на элемент $T(\overline{k})$ (этот аргумент заимствован из [11], Lemma 1.1). На этом доказательство завершается. QED

В случае, когда $\mathcal{T} \to X$ - универсальный торсор, (3) дает точную последовательность

$$1 \to T(\overline{k}) \to \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})) \to \mathrm{Aut}\,\overline{X} \to 1. \tag{4}$$

Над $\overline{k}$ существует единственный с точностью до изоморфизма универсальный $\overline{X}$-торсор (фиксированного типа). Поэтому любой универсальный торсор над $\overline{k}/k$-формой X является $\overline{k}/k$-формой любого универсального X-торсора.

Если G - топологическая группа с непрерывным действием Γ, то будем обозначать $\mathrm{Z}^1(\Gamma, G)$ множество непрерывных 1-коциклов Γ с коэффициентами в

G.

Лемма 1.2 *В обозначениях и предположениях Леммы* 1.1 *пусть X' есть $\overline{k}/k$-форма X, скрученная при помощи некоторого* 1*-коцикла $\sigma \in \mathrm{Z}^1(\Gamma, \mathrm{Aut}\,(\overline{X}, \lambda))$. Тогда множество X'-торсоров типа λ есть множество $\overline{k}/k$-форм $\mathcal{T}$, скрученных при помощи* 1*-коцикла из $\mathrm{Z}^1(\Gamma, \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})))$, являющегося поднятием σ.*

Следует пояснить, что указанием типа λ однозначно определяется структурная группа X'-торсора. Действительно, действие Γ на $\mathrm{Pic}\,\overline{X'}$ задает действие Γ на подмодуле $\hat{T} \simeq \lambda(\hat{T})$. Этим однозначно определяется двойственный к этой решетке тор.

Доказательство. Пусть $\mathcal{T}' \to X'$ - торсор типа λ. Так как $\overline{X}' \simeq \overline{X}$, а в сделанных предположениях $\overline{X}$-торсор типа λ единствен с точностью до изоморфизма, получаем, что $\overline{\mathcal{T}}'$ и $\overline{\mathcal{T}}$ изоморфны как $\overline{X}$-торсоры. Поэтому $\mathcal{T}'$ получается из $\mathcal{T}$ скручиванием на 1-коцикл с коэффициентами в группе автоморфизмов $\overline{\mathcal{T}}$, сохраняющих слои отображения $\overline{\mathcal{T}} \to \overline{X}$, являющийся поднятием σ. По Лемме 1.1 эта группа есть $\mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$. Обратно, если $\xi \in \mathrm{Z}^1(\Gamma, \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k})))$ есть поднятие σ, то $\mathcal{T}' = \mathcal{T}_\xi$ есть торсор типа λ над $X' = X_\sigma$. QED

Предположим, что (3) есть последовательность групп $\overline{k}$-точек в точной последовательности групповых k-схем

$$1 \to T \to G \to H \to 1. \qquad (5)$$

Обозначим $\mathrm{Z}^1(k, G)$ множество непрерывных 1-коциклов группы Галуа Γ с коэффициентами в группе $G(\overline{k})$. Пусть $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, H)$, и $X' = X_\sigma$ - соответствующая скрученная форма. Пусть T_σ - скрученная посредством σ форма T в смысле действия H на T сопряжениями, задаваемого (5). Из первой части доказательства Леммы 1.1 видно, что определяемое этим действие $H(\overline{k})$ на $\hat{T} = \lambda(\hat{T})$ согласовано с действием $H(\overline{k})$ на $\mathrm{Pic}\,\overline{X_\sigma}$, поэтому T_σ будет структурной группой X_σ-торсоров типа λ, если таковые существуют.

Согласно Лемме 1.2, X_σ-торсоры типа λ существуют тогда и только тогда, когда класс когомологий $[\sigma] \in \mathrm{H}^1(k, H)$ лежит в образе $\mathrm{H}^1(k, G)$. Напомним, что (5) задает класс $\Delta(\sigma) \in \mathrm{H}^2(k, T_\sigma)$, равный нулю в том и только в том случае, когда класс $[\sigma]$ лежит в образе $\mathrm{H}^1(k, G)$ (см. [12], I.5.6, Предл. 41). (Заметим, что если заменить $\sigma = \sigma(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, на когомологичный коцикл $h^{-1} \cdot \sigma(\gamma) \cdot {}^\gamma h$, то класс $\Delta(\sigma)$ заменится на $h^{-1} \cdot \Delta(\sigma) \cdot h$.)

Хотя нам не понадобится этот факт, мы докажем, что $\Delta(\sigma)$ совпадает с $\partial(\lambda)$, где ∂ - отображение из точной последовательности (1) для X_σ и T_σ. Иными словами, два препятствия к существованию X_σ-торсоров типа λ совпадают.

Предложение 1.3 *В обозначениях и предположениях Леммы* 1.1 *пусть* X_σ *- форма* X*, полученная скручиванием при помощи коцикла* $\sigma \in \mathrm{Z}^1(k, H)$*. Тогда* $\Delta(\sigma) = \partial(\lambda)$*.*

Доказательство. Пусть H_σ - правый k-торсор группы H, задаваемый σ, т.е. k-схема с правым действием H, которая после замены k на $\overline{k}$ становится изоморфной H с естественным правым действием на себе. Рассмотрим жерб (*фр.* gerbe) $\mathcal{G}_1$ поднятий H_σ до правого торсора G (см. [13], IV.2.5.8). Это - категория, расслоенная над категорией расширений $k \subset K \subset \overline{k}$. Слой $\mathcal{G}_1(K)$ над K есть группоид, образованный теми K-торсорами группы G, которые после замены структурной группы посредством отображения $G \to H$ становятся изоморфными $H_{\sigma,K} = H_\sigma \times_k K$. Иначе говоря, $\mathcal{G}_1(K)$ состоит из K-торсоров D таких, что D/T получается из H_σ расширением основного поля с k до K. Жерб $\mathcal{G}_1$ связан k-связкой (*фр.* lien, *англ.* band), определенной k-тором T_σ, действующим на этих торсорах слева (*ibidem*).

Далее, пусть $\mathcal{G}_2$ - жерб X_σ-торсоров со структурной группой T_σ типа λ (см. [13], V.3.1.6), т.е. слой $\mathcal{G}_2(K)$ состоит из $X_{\sigma,K}$-торсоров типа λ. Согласно [13], V.3.2.1 (i), этот жерб связан k-связкой $f_*f^*T_\sigma$, где $f : \mathcal{T} \to X$ - структурный морфизм. Из условия $\overline{k}[X]^* = \overline{k}^*$ следует, что канонический морфизм $T_\sigma \to f_*f^*T_\sigma$ является изоморфизмом. Поэтому $\mathcal{G}_2$ также связан k-связкой, определенной k-тором T_σ.

Сопоставим правому K-торсору D группы G скрученную посредством D форму K-многообразия $\mathcal{T}_K$, т.е. $\mathcal{T}_{K,D} = (D \times_K \mathcal{T}_K)/G$, где G действует справа на D и слева на $\mathcal{T}_K$. (Напомним, что $G(\overline{k}) = \mathrm{N}_{\mathrm{Aut}\,\overline{\mathcal{T}}}(T(\overline{k}))$.) Тор T_σ действует на скрученном многообразии $\mathcal{T}_{K,D}$ слева, наделяя его структурой $X_{\sigma,K}$-торсора группы T_σ типа λ. Получающийся при этом морфизм жербов $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$, отождествляет классы $[\mathcal{G}_1]$ и $[\mathcal{G}_2]$ в $\mathrm{H}^2(k, T_\sigma)$. Однако класс $\mathcal{G}_1$ в $\mathrm{H}^2(k, T_\sigma)$ есть $\Delta(\sigma)$ (см. [13], Ch. IV, 2.5.9 и 3.5.4), тогда как класс $\mathcal{G}_2$ есть $\partial(\lambda)$ (см. [2], Sections 2.3, 9.5, где используется [13], V.3.2.1). QED

В частности, если $\Delta(\sigma) \neq 0$, то X_σ не имеет k-точек: в противном случае $\partial(\lambda) = 0$, т.к. последнее отображение в (1) имеет сечение, задаваемое k-точкой X_σ.

1.2. Фактор аффинного многообразия по действию тора

Торсоры естественно появляются в контексте геометрической теории инвариантов. Пусть V - конечномерное векторное пространство над полем k. Мы будем рассматривать V как аффинное пространство над k, и писать $V(\overline{k})$ вместо $V \otimes_k \overline{k}$. Пусть G_1 - связная редуктивная подгруппа $\mathrm{SL}(V)$, и пусть G - наименьшая замкнутая подгруппа в $\mathrm{GL}(V)$, содержащая G_1 и группу скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,k}$. Напомним, что точка $x \in V(\overline{k})$ называется *стабильной*, если орбита $\overline{G}_1 x$ замкнута и ее размерность равна $\dim G_1$ ([14], p. 194). Множество стабильных точек $V^{\mathrm{s}} \subset V$ открыто (может быть, пусто) и G-инвариантно. В геометрической теории инвариантов строятся квази-проективное многообразие Z и аффинный морфизм $f : V^{\mathrm{s}} \to Z$, слоями которого являются орбиты G ([14], Thm. 1.10 (iii)). Пусть $V^{\mathrm{f}} \subset V$ - подмножество точек, стабилизаторы которых в G тривиальны. Пусть $V^{\mathrm{sf}} = V^{\mathrm{s}} \cap V^{\mathrm{f}}$; это подмножество также открыто и G-инвариантно.

Лемма 1.4 *Пусть $U = V^{\mathrm{sf}} \cap Y$, где Y - замкнутое G-инвариантное подмногообразие V. Предположим, что U гладко, и пусть $X = f(U)$. Тогда естественный морфизм $f : U \to X$ есть торсор со структурной группой G, причем X гладко.*

Доказательство. Утверждение локально по X. Пусть $x \in X(\overline{k})$; выберем открытую аффинную окрестность W точки x. Поскольку f - аффинный морфизм, $f^{-1}(W)$ - аффинное подмножество ([15], II, 5, Упр. 5.17). Стабилизаторы всех $\overline{k}$-точек $f^{-1}(W)$ тривиальны, поэтому согласно следствию теоремы Луна об этальных слайсах (Luna's étale slice theorem, см. [14], p. 153) естественный морфизм $f^{-1}(W) \to W$ - торсор с группой G. Отсюда получаем то же утверждение для $f : U \to X$. По определению торсор локально тривиален в этальной топологии, поэтому гладкость X следует из гладкости U. QED

Мы рассмотрим случай, когда G_1 есть алгебраический тор. Напомним, что тор называется разложимым, если действие группы Галуа на его группе характеров тривиально. Пусть T_1 - *разложимый* тор в $\mathrm{SL}(V)$, T - наименьший тор в $\mathrm{GL}(V)$, содержащий T_1 и группу скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,k}$, и пусть $T_2 = T/\mathbf{G}_{m,k}$ - образ T в $\mathrm{PGL}(V)$. Таким образом, $\hat{T}_1$, $\hat{T}$, $\hat{T}_2$ - тривиальные Γ-модули. Пространство V разлагается в прямую сумму собственных подпространств тора T:

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \hat{T}} V_\lambda,$$

где V_λ состоит из векторов w таких, что $t \cdot w = \lambda(t) w$ для любого $t \in T(\overline{k})$. Пусть Λ - множество *весов* представления T в V, т.е. характеров $\lambda \in \hat{T}$, для которых $V_\lambda \neq 0$. Пусть Λ_1 - множество весов T_1 в V; очевидно, что естественный гомоморфизм $\hat{T} \to \hat{T}_1$ изоморфно отображает Λ на Λ_1.

Для $x \in V(\overline{k})$ обозначим $\mathrm{wt}_T(x)$ множество весов $\lambda \in \Lambda$ таких, что V_λ-компонента x не равна нулю. Определим $\mathrm{wt}_{T_1}(x) \subset \Lambda_1$ как образ $\mathrm{wt}_T(x)$ при при сюръекции $\hat{T} \to \hat{T}_1$. *Весовым многогранником* x называется выпуклая оболочка $\mathrm{Conv}(\mathrm{wt}_{T_1}(x))$ множества $\mathrm{wt}_{T_1}(x)$ в $\hat{T}_1 \otimes \mathbf{R}$. Критерий стабильности Гильберта–Мамфорда утверждает, что точка x стабильна при действии T_1 тогда и только тогда, когда 0 лежит во внутренности весового многогранника x ([16], Thm. 9.2).

Лемма 1.5 *Пусть $Y \subset V$ - дополнение к началу координат в геометрически целом T-инвариантном замкнутом подмногообразии в V, причем Y гладко. Пусть $U = Y \cap V^{\mathrm{sf}}$. Если $\mathrm{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$, то $\overline{k}[X]^* = \overline{k}[U]^* = \overline{k}^*$, где $X = U/T$.*

Доказательство. Обозначим $\mathbf{P}(Y)$ образ Y в проективном пространстве $\mathbf{P}(V)$. Естественный морфизм $Y \to \mathbf{P}(Y)$ есть торсор с группой $\mathbf{G}_{m,k}$. Его тип - инъективный гомоморфизм $\mathbf{Z} \to \mathrm{Pic}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$, переводящий 1 в класс пучка $\mathcal{O}(1)$ (с точностью до знака). Из (2) следует, что $\overline{Y}$ не имеет непостоянных обратимых регулярных функций. Из предположения о коразмерности $Y \setminus U$ вытекает, что то же самое верно для U, а следовательно и для X. QED

Теорема 1.6 *Пусть $Y \subset V$ - дополнение к началу координат в геометрически целом T-инвариантном замкнутом подмногообразии, не содержащемся в гиперплоскости. Предположим, что Y гладко, $\mathrm{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$, и $\mathrm{Pic}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$ порождается классом пучка $\mathcal{O}(1)$. Тогда верны следующие утверждения:*

(i) *Многообразие X гладкое и удовлетворяет условию $\overline{k}[X]^* = \overline{k}^*$. Естественный морфизм $f : U \to X$ является универсальным торсором, в частности, имеется канонический изоморфизм тривиальных Γ-модулей $\mathrm{Pic}\,\overline{X} = \hat{T}$.*

(ii) *Пусть $K = \overline{k}(X)$, и пусть U_K - общий слой морфизма $\overline{U} \to \overline{X}$. Модули Галуа $\mathrm{Div}\,\overline{X}$ и $K[U_K]^*/\overline{k}^*$ канонически изоморфны, причем полугруппа эффективных дивизоров на $\overline{X}$ отождествляется с $(K[U_K]^* \cap \overline{k}[Y])/\overline{k}^*$.*

(iii) *$-\Lambda$ есть единственное минимальное множество образующих полугруппы классов эффективных дивизоров $\mathrm{Pic}\,\overline{X} = \hat{T} = K[U_K]^*/K^*$. В частности, любой автоморфизм $\overline{X}$ переводит Λ в себя.*

(iv) *Пусть $\mathrm{Pic}\,\overline{X} \to \mathbf{Z}$ - гомоморфизм, двойственный включению группы скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,\overline{k}}$ в $\overline{T}$. Этот гомоморфизм эквивариантен относительно действия группы $\mathrm{Aut}\,\overline{X}$ (которое тривиально на $\mathbf{Z}$).*

(v) *Любой универсальный торсор на $\overline{k}/k$-форме X, имеющий тот же тип что и $U \to X$, является $\overline{k}/k$-формой U.*

(vi) *Пусть τ - вложение $\hat{T}_2$ в $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ в качестве ядра гомоморфизма $\mathrm{Pic}\,\overline{X} \to \mathbf{Z}$ из* (iv)*. Любой торсор типа τ на $\overline{k}/k$-форме X является плотным открытым подмножеством $\overline{k}/k$-формы $\mathbf{P}(Y)$, отвечающей коциклу с коэффициентами в нормализаторе $T_2(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$.*

(vii) *Группа $\mathrm{Aut}\,\overline{X}$ канонически изоморфна факторгруппе нормализатора $T_2(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$ по $T_2(\overline{k})$.*

Доказательство. (i) Ввиду Лемм 1.4 и 1.5 остается проверить, что торсор $f : U \to X$ универсален. Из того, что $\mathrm{Pic}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$ порождается классом пучка $\mathcal{O}(1)$, следует, что $\mathrm{Pic}\,\overline{Y} = 0$ (последовательность (2) для торсора $\overline{Y} \to \mathbf{P}(\overline{Y})$).

В наших предположениях это влечет $\operatorname{Pic}\overline{U}=0$, поэтому из точной последовательности (2) для $f: U \to X$ вытекает, что тип $\hat{T} \to \operatorname{Pic}\overline{X}$ торсора f есть изоморфизм абелевых групп, а значит и Γ-модулей.

(ii) Общий слой U_K является K-торсором с группой $T_K = T \times_k K \simeq \mathbf{G}^n_{m,K}$. По теореме Гильберта 90 $\mathrm{H}^1(K, \mathbf{G}_{m,K}) = \{1\}$, поэтому U_K - тривиальный торсор, т.е. $U_K \simeq T_K$. Лемма Розенлихта утверждает, что T действует на любую обратимую регулярную функцию на U_K умножением на характер, что определяет канонический изоморфизм $K[U_K]^*/K^* = \hat{T}$. Так как $\overline{Y}$ гладко и не имеет непостоянных обратимых регулярных функций, причем $\operatorname{Pic}\overline{Y}=0$, то $\operatorname{Div}\overline{U} = \operatorname{Div}\overline{Y} = \overline{k}(Y)^*/\overline{k}^*$. Аналогично $\operatorname{Div} U_K = \overline{k}(Y)^*/K[U_K]^*$. Теперь наше первое утверждение следует из (расщепляющейся) точной последовательности

$$0 \to \operatorname{Div}\overline{X} \to \operatorname{Div}\overline{U} \to \operatorname{Div} U_K \to 0. \tag{6}$$

Дивизор $D \subset \overline{X}$ эффективен тогда и только тогда, когда замыкание по Зарискому дивизора $f^*(D)$ на $\overline{Y}$ эффективно. Поскольку $\operatorname{Pic}\overline{Y}=0$, это замыкание есть главный дивизор $\operatorname{div} g$, где g - ненулевая регулярная функция на $\overline{Y}$. Отсюда $g \in \overline{k}[Y]$. Обратно, любая функция $g \in K[U_K]^* \cap \overline{k}[Y] \subset K[U_K]$ определяет эффективный дивизор на $\overline{U}$, который не пересекается с общим слоем U_K. Ввиду точности последовательности (6) он происходит из единственного эффективного дивизора на $\overline{X}$.

(iii) Поскольку Y - дополнение к точке в замкнутом аффинном подмногообразии $Y_c \subset V$ размерности более 1, то $\overline{k}$-алгебра $\overline{k}[Y_c] = \overline{k}[Y] = \overline{k}[U]$ порождается как векторное пространство над $\overline{k}$ мономами от координатных функций. Согласно лемме Розенлихта имеется изоморфизм $K[U_K]^*/K^* \tilde{\longrightarrow} \hat{T}$, отображающий функцию g на характер χ такой, что $t \cdot g = \chi(t) g$ для любого $t \in T(\overline{k})$. Координатные гиперплоскости не пересекаются с общим слоем U_K, т.е. координатные функции лежат в $K[U_K]^*$. Они отображаются на веса двойственного представления T, т.е. на множество $-\Lambda$. Линейная комбинация мономов принадлежит $K[U_K]^*$ тогда и только тогда, когда все мономы с ненулевыми коэффициентами отвечают одному и тому же характеру, который тогда представляет класс этой функции в $\operatorname{Pic}\overline{X}$. Характеры, получаемые таким образом, суть линейные комбинации весов $-\lambda$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Поэтому $-\Lambda$ порождает полугруппу E классов эффективных дивизоров в $\operatorname{Pic}\overline{X}$.

Пусть $\mathbf{G}_{m,\overline{k}} \to \overline{T}$ - вложение подгруппы скалярных матриц. Двойственное отображение $h: \hat{T} \to \mathbf{Z}$ переводит любой элемент $\lambda \in \Lambda$ в 1. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ - элементы E такие, что E есть множество их целочисленных линейных комбинаций с неотрицательными коэффициентами. В частности, любой $\lambda \in \Lambda$ записывается в виде $\lambda = \sum r_i \alpha_i$. Отсюда $1 = h(\lambda) = \sum r_i h(\alpha_i)$, но как $h(\alpha_i)$ - целое положительное число, то $h(\alpha_i) = 1$ в точности для одного индекса i, и $h(\alpha_j) = 0$ при $j \neq i$. Отсюда следует, что $\lambda = \alpha_i$, т.е. $-\Lambda$ входит в любую систему образующих E, а, значит, является единственной минимальной системой образующих E.

(iv) следует из (iii).

(v) вытекает из (i) и Леммы 1.2.

(vi) Пусть $\mathrm{N}(Y)$ (соотв. $\mathrm{N}(U)$) - нормализатор $T_2(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$ (соотв. в $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}(\overline{U})$). Из (iv) и Леммы 1.2 вытекает, что любой торсор типа τ на $\overline{k}/k$-форме X является $\overline{k}/k$-формой $\mathbf{P}(U)$, полученной из коцикла с коэффициентами в $\mathrm{N}(U)$. Поэтому остается показать, что $\mathrm{N}(Y) = \mathrm{N}(U)$. Обильный пучок $\mathcal{O}(1)$ инвариантен относительно $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$, что дает вложение $\mathrm{Aut}\,\mathbf{P}(\overline{Y}) \to \mathrm{PGL}(V \otimes_k \overline{k})$. При этом $\mathrm{N}(Y)$ отображается в подгруппу нормализатора $T_2(\overline{k})$ в $\mathrm{PGL}(V \otimes_k \overline{k})$, состоящую из элементов, сохраняющих $\mathbf{P}(\overline{Y})$. Эта подгруппа сохраняет тривиальность стабилизатора в T_2, также как и стабильность относительно действия T_1, поэтому $\mathrm{N}(Y)$ сохраняет открытое множество $\mathbf{P}(\overline{U}) \subset \mathbf{P}(\overline{Y})$. Таким образом, имеется вложение $\mathrm{N}(Y) \to \mathrm{N}(U)$. Аналогичные соображения применимы и к $\mathbf{P}(\overline{U})$. Действительно, по условиям теоремы $\mathrm{Pic}\,\mathbf{P}(\overline{U}) = \mathrm{Pic}\,\mathbf{P}(\overline{Y})$ порождается классом $\mathcal{O}(1)$, поэтому любой автоморфизм $\mathbf{P}(\overline{U})$ действует на проективизации

$$(V \otimes_k \overline{k})^* = \mathrm{H}^0(\mathbf{P}(\overline{Y}), \mathcal{O}(1)) = \mathrm{H}^0(\mathbf{P}(\overline{U}), \mathcal{O}(1)),$$

и, следовательно, происходит из элемента $\mathrm{PGL}(V \otimes_k \overline{k})$. Проективное преобразование, сохраняющее множество $\mathbf{P}(\overline{U})$, сохраняет и его замыкание по Зарискому $\mathbf{P}(\overline{Y})$. Это доказывает, что $\mathrm{N}(Y) = \mathrm{N}(U)$.

(vii) следует из (iv), Леммы 1.1 и изоморфизма $\mathrm{N}(Y) = \mathrm{N}(U)$. QED

Замечания. 1. Пусть вес λ имеет кратность 1, т.е. V^* имеет единственный с точностью до пропорциональности собственный вектор веса $-\lambda$. Обозначим его f_λ. Тогда дивизор на X, задаваемый уравнением $f_\lambda = 0$, является единственным эффективным дивизором в своем классе. Действительно, из пункта (ii) предыдущей теоремы следует, что линейная система, ассоциированная с дивизором некоторого веса, порождается всеми мономами данного веса, однако f_λ - единственный моном веса $-\lambda$.

2. Геометрическая теория инвариантов дает каноническую компактификацию X, а именно фактор множества полустабильных точек. Следует иметь в виду, однако, что в большинстве случаев эта компактификация имеет особенности.

2. Фактор G/P по действию максимального тора

2.1. Группа автоморфизмов

Пусть G - разложимая односвязная простая алгебраическая группа над k. По определению разложимости G обладает *k-разложимым* максимальным тором

$H \simeq \mathbf{G}_{m,k}^n$ и борелевской подгруппой $B \supset H$, определенной над k. Пусть R - система корней G относительно H, и $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ - базис простых корней R, задаваемый B. Мы используем нумерацию корней как в [17]. (Во избежание повторов будем считать, что если R имеет тип B, C или D, то R - одна из систем корней B_n, $n \geq 2$, C_n, $n \geq 3$, D_n, $n \geq 4$.) Пусть $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ - двойственный к S базис фундаментальных весов. Мы будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $Q(\mathrm{R})$ - решетка, порожденная корнями; $P(\mathrm{R})$ - решетка, порожденная фундаментальными весами; $W = W(\mathrm{R})$ - группа Вейля; $A(\mathrm{R})$ - группа автоморфизмов системы корней R. Известно, что $A(\mathrm{R}) = W(\mathrm{R}) \rtimes \mathrm{Aut}\, S$, где $\mathrm{Aut}\, S$ - группа автоморфизмов системы простых корней S (или, что эквивалентно, диаграммы Дынкина R).

Пусть $Z(G)$ - центр G, и $G_{\mathrm{ad}} = G/Z(G)$ - присоединенная группа G. Положим $H_{\mathrm{ad}} = H/Z(G)$. Напомним, что $\mathrm{Aut}\, G$ - алгебраическая k-группа $G_{\mathrm{ad}} \rtimes \mathrm{Aut}\, S$, причем по определению разложимой группы действие группы Галуа Γ на $\mathrm{Aut}\, S$ тривиально. Конечная группа $\mathrm{Aut}\, S$ отождествляется с группой внешних автоморфизмов G, а также с подгруппой $\mathrm{Aut}\, G$, сохраняющей H, B и множество однопараметрических унипотентных корневых подгрупп G, задаваемых простыми корнями. Подгруппа $\mathrm{Aut}\,(G, H) \subset \mathrm{Aut}\, G$, состоящая из автоморфизмов, сохраняющих H, разлагается в полупрямое произведение $\mathrm{N}_{G_{\mathrm{ad}}}(H_{\mathrm{ad}}) \rtimes \mathrm{Aut}\, S$, где $\mathrm{N}_{G_{\mathrm{ad}}}(H_{\mathrm{ad}})$ - нормализатор H_{ad} в G_{ad}. Таким образом, имеется коммутативная диаграмма алгебраических групп с точными строками и расщепляющимися точными столбцами:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & H_{\mathrm{ad}} & \to & \mathrm{N}_{G_{\mathrm{ad}}}(H_{\mathrm{ad}}) & \to & W & \to & 1 \\
 & & || & & \downarrow & & \downarrow & & \\
1 & \to & H_{\mathrm{ad}} & \to & \mathrm{Aut}\,(G,H) & \to & A(\mathrm{R}) & \to & 1 \\
 & & & & \downarrow\uparrow & & \downarrow\uparrow & & \\
 & & & & \mathrm{Aut}\, S & = & \mathrm{Aut}\, S & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & &
\end{array}
\tag{7}
$$

При этом действие группы Галуа Γ на $A(\mathrm{R})$ тривиально, т.к. G разложима.

Пусть $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ - неприводимое конечномерное представление G со старшим весом ω_i. Обозначим $T_1 = \rho(H)$. Пусть $v \in V$ - вектор старшего веса. Стабилизатор прямой $kv \in \mathbf{P}(V)$ является максимальной параболической подгруппой $P \subset G$. Она задается замкнутым подмножеством R, являющимся объединением множества положительных корней R^+ и множества целочисленных линейных комбинаций всех простых корней кроме α_i. Однородное пространство G/P является замкнутым подмногообразием $\mathbf{P}(V)$, более того, единственной замкнутой орбитой G в $\mathbf{P}(V)$. Группа Пикара $\mathrm{Pic}\, G/P \simeq \mathbf{Z}$ порождается классом очень обильного пучка $\mathcal{O}(1)$.

Пусть $Y \subset V \setminus \{0\}$ - аффинный конус над G/P с выколотым началом координат. Пусть $T \subset \mathrm{GL}(V)$ - тор, порожденный $T_1 = \rho(H)$ и группой скалярных матриц $\mathbf{G}_{m,k}$, и пусть $T_2 = H_{\mathrm{ad}} = T_1/\rho(Z(G))$. По лемме Шура $\rho(Z(G)) = \rho(G) \cap \mathbf{G}_{m,k}$. Мы находимся в ситуации, описанной перед Теоремой 1.6. Нас интересует фактор X открытого множества $U = Y \cap V^{\mathrm{sf}} \subset Y$ по действию T, в частности его группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, X$.

Замечание. Гладкое многообразие X проективно, если $\mathrm{R} = \mathrm{A}_n$ и i взаимно просто с $n+1$. В этом случае G/P представляет собой грассманиан $G(i, n+1)$, множество стабильных точек которого $G(i, n+1)^{\mathrm{s}}$ совпадает со множеством полустабильных точек $G(i, n+1)^{\mathrm{ss}}$ (см. [14], Prop. 4.3, или [18]), а T_2 свободно действует на этом множестве. В работе [18] доказано, что $(G/P)^{\mathrm{s}} \neq (G/P)^{\mathrm{ss}}$ для всех остальных пар (R, α_i), поэтому во всех этих случаях X не является проективным многообразием.

Предложение 2.1 *Условие* $\mathrm{codim}_Y(Y \setminus U) \geq 2$ *не выполнено для пары* (R, α) *тогда и только тогда, когда она входит в следующий список:* (R_n, α_1), (A_n, α_n), (A_3, α_2), (B_2, α_2), (D_4, α_3) *или* (D_4, α_4), *где* $\mathrm{R}_n = \mathrm{A}_n$, B_n, C_n *или* D_n.

Доказательство. Выберем базис собственных векторов тора T в V, и обозначим $\mathcal{U}$ открытое подмножество аффинного конуса над G/P, состоящее из точек, у которых не более одной координаты равно нулю. По лемме 2.1 [6] дополнение к $\mathbf{P}(\mathcal{U})$ в G/P имеет коразмерность 2. В предложении 2.4 [6] для пар (R, α), не входящих в вышеприведенный список, доказано, что $\mathcal{U} \subset V^{\mathrm{s}}$. Из этого же доказательства видно, что для пар, входящих в список, Y содержит координатную гиперплоскость, состоящую из нестабильных точек. Если R имеет тип A_n, D_n или E_n, то из следствия 2.3 [6] вытекает, что коразмерность $Y^{\mathrm{s}} \setminus U$ больше 1. Поэтому для завершения доказательства остается проверить, что если (R, α_i) не входит в наш список, и R имеет тип B_n, C_n, F_4 или G_2, то $\mathcal{U} \subset U$, т.е. T действует свободно на $\mathcal{U}$.

Эквивалентное утверждение состоит в том, что T_2 действует свободно на $\mathbf{P}(\mathcal{U})$. Это очевидно для точек, у которых все координаты ненулевые, поэтому в дальнейшем будем считать, что зануляется ровно одна весовая координата, скажем веса λ. Точки с тривиальным стабилизатором в T_2 характеризуются тем, что множество $\mathrm{wt}_{T_1}(x) - \mathrm{wt}_{T_1}(x)$ порождает $Q(\mathrm{R}) = \hat{T}_2$. В частности, $Q(\mathrm{R})$ порождается множеством $\Lambda_1 - \Lambda_1$, где Λ_1 - совокупность весов T_1. Если кратность веса λ больше 1, то $\mathrm{wt}_{T_1}(x) = \Lambda_1$, поэтому стабилизатор x в T_2 тривиален. Таким образом, можно считать, что кратность веса λ равна 1. Нам нужно проверить, что $(\Lambda_1 \setminus \{\lambda\}) - (\Lambda_1 \setminus \{\lambda\})$ порождает $Q(\mathrm{R})$.

Разберем сначала случай $\lambda = 0$. Если $\mathrm{R} = \mathrm{B}_n$ или C_n, то непосредственная проверка, использующая описание фундаментальных представлений в [17], показывает, что кратность веса 0 больше 1, за исключением пары (B_n, α_1), входящей в наш список. Веса фундаментальных представлений в случае F_4 описаны в [17], гл. VIII, 9, Упр. 16. И ω_1, и ω_4 являются весами представления со старшим весом ω_i при $i = 1, 2, 3$. Но $\omega_1 - \omega_4$ является коротким корнем, и корни $w(\omega_1 - \omega_4)$, $w \in W(\mathrm{F}_4)$, порождают $Q(\mathrm{F}_4)$. Наконец, 0 - вес кратности больше 1 для представления со старшим весом ω_4. В случае $\mathrm{R} = \mathrm{G}_2$ требуемое утверждение легко проверяется с помощью Таблицы X [17], гл. VI.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Все представления, задающиеся парой (R, α_i), где R имеет тип B_n, C_n, F_4 или G_2, самодвойственны (см. Таблицу 1 [17], гл. VIII). Отсюда $\Lambda_1 = -\Lambda_1$. Для любого $\mu \in \Lambda_1 \setminus \{\lambda, -\lambda\}$ очевидные тождества $\lambda - \mu = (-\mu) - (-\lambda)$ и $\lambda - (-\lambda) = \mu - (-\lambda) + (-\mu) - (-\lambda)$ доказывают, что

$$(\Lambda_1 \setminus \{\lambda\}) - (\Lambda_1 \setminus \{\lambda\}) = \Lambda_1 - \Lambda_1.$$

Это заканчивает доказательство. QED

Замечание. В общем случае существуют стабильные точки, на которых действие T не свободно. Следующий пример был указан автору В.В. Сергановой. Пусть $(\mathrm{R}, \alpha) = (\mathrm{C}_n, \alpha_n)$, $n \geq 3$. Рассмотрим векторное пространство K с базисом $e_1, f_1, \ldots, e_n, f_n$, и кососимметрической формой такой, что $(e_i, e_j) = (f_i, f_j) = 0$ и $(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ для любых i и j. Пусть G/P - лагранжев грассманиан изотропных n-мерных подпространств K. Здесь $G = \mathrm{Sp}(2n)$ - подгруппа $\mathrm{SL}(2n)$, сохраняющая кососимметрическую форму, а P - стабилизатор линейной оболочки $e_1, \ldots, e_n$. Подгруппа диагональных матриц в G есть максимальный тор $H \simeq \mathbf{G}_{m,k}^n$. Точка G/P, задаваемая изотропным подпространством, натянутым на векторы $e_i + f_i$, $i = 1, \ldots, n$, стабильна, т.к. ее весовой многогранник представляет собой куб со стороной 2 и с центром в начале координат. Однако стабилизатор этой точки в H содержит элемент $(-1, -1, 1, \ldots, 1)$, не лежащий в центре G.

Обозначим $\mathrm{Aut}\,(S, \alpha)$ подгруппу $\mathrm{Aut}\, S$, состоящую из элементов, оставляющих неподвижным простой корень α.

Теорема 2.2 *Пусть пара* (R, α) *удовлетворяет следующим двум условиям:*

(1) *дополнение в G/P ко множеству стабильных точек с тривиальными стабилизаторами в T_2 имеет коразмерность больше* 1, *т.е.* (R, α) *не входит в список Предложения* 2.1,

(2) $(\mathrm{R}, \alpha) \neq (\mathrm{B}_n, \alpha_n)$, $(\mathrm{R}, \alpha) \neq (\mathrm{G}_2, \alpha_1)$.

Тогда существует канонический изоморфизм k-групп с тривиальным действием группы Галуа Γ

$$\mathrm{Aut}\,\overline{X} = W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i).$$

При этом имеется естественная биекция между множеством $\overline{k}/k$-форм X, рассматриваемых с точностью до изоморфизма, и множеством гомоморфизмов $\Gamma \to W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$, рассматриваемых с точностью до сопряжения.

Доказательство. По Теореме 1.6 (vii) группа $\mathrm{Aut}\,\overline{X}$ канонически изоморфна факторгруппе нормализатора $T_2(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\overline{G/P}$ по подгруппе $T_2(\overline{k})$. Так как пара (R, α_i) не есть (B_n, α_n) или (G_2, α_1), то можно применить теорему Титса и Демазюра [8], согласно которой группа $\mathrm{Aut}\,\overline{G/P}$ есть подгруппа $\mathrm{Aut}\,\overline{G}$, состоящая из элементов, сохраняющих класс сопряженности P. Так как $\mathrm{Aut}\,\overline{G} = G_{\mathrm{ad}}(\overline{k}) \rtimes \mathrm{Aut}\,S$, получаем, что $\mathrm{Aut}\,\overline{G/P} = G_{\mathrm{ad}}(\overline{k}) \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$. Нормализатор $T_2(\overline{k}) = H_{\mathrm{ad}}(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\overline{G}$ является расширением $\mathrm{Aut}\,S$ при помощи $\mathrm{N}_{G_{\mathrm{ad}}}(H_{\mathrm{ad}})$, поэтому нормализатор $T_2(\overline{k})$ в $\mathrm{Aut}\,\overline{G/P}$, отфакторизованный по $T_2(\overline{k})$, есть $W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$.

Поскольку Γ действует на $W \rtimes \mathrm{Aut}\,S$ тривиально, то Γ тривиально действует и на $\mathrm{Aut}\,\overline{X} = W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$. Хорошо известно, что $\overline{k}/k$-формы квазипроективного многообразия X взаимно-однозначно соответствуют элементам множества когомологий Галуа $\mathrm{H}^1(k, \mathrm{Aut}\,\overline{X})$. Отсюда вытекает последнее утверждение теоремы. QED

Замечание. Пара (A_3, α_2) входит в список Предложения 2.1, т.к. множество нестабильных точек грассманиана $G(2,4)$ есть множество точек, у которых равна нулю хотя бы одна координата. В этом случае X есть прямая $\mathbf{P}^1$ без трех точек, и группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\overline{X} \simeq S_3$ не изоморфна $W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i) \simeq S_4 \rtimes \mathbf{Z}/2$. Это показывает, что условие (1) в Теореме 2.2 нельзя убрать. Условие (2) также нельзя убрать, т.к. в этих случаях теорема Титса и Демазюра не верна: в случае пары (B_n, α_n) группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\overline{G/P}$ содержит присоединенную группу типа D_{n+1}, а в случае пары (G_2, α_1) - присоединенную группу типа B_3, см. [8, p.181]. Поэтому связная компонента $\mathrm{Aut}\,\overline{X}$ содержит одномерный тор.

Если $\mathrm{R} = \mathrm{A}_n$, то группа Вейля изоморфна симметрической группе S_{n+1}. Если отмеченным корнем является α_i, то она действует на $G/P = G(i, n+1)$ перестановками координат.

Единственный нетривиальный элемент $\mathrm{Aut}\,S = \mathbf{Z}/2$ индуцирует изоморфизм $G(i, n+1) \simeq G(n+1-i, n+1)$, и инволюцию на $G(i, n+1)$, если $2i = n+1$. Соответствие Гельфанда–Макферсона [5] представляет X в виде фактора множества стабильных конфигураций $n+1$ точек на $\mathbf{P}_k^{i-1}$ по действию $\mathrm{GL}(i)$. Например, в случае $n = 5$, $i = 3$ рассматриваются шестерки точек на плоскости. Инволюция X, задаваемая нетривиальным элементом $\mathrm{Aut}\,S$, соответствует инволюции X как двулистного накрытия $\mathbf{P}_k^4$, разветвленного в многообразии Игузы. В классической литературе она известна под именем *ассоциации*; шестерка точек инвариантна относительно ассоциации тогда и только тогда, когда все шесть точек лежат на конике (подробнее см. в [5]).

2.2. Формы и рациональные точки

Формы группы G получаются скручиванием на коциклы группы Галуа Γ с коэффициентами в $\mathrm{Aut}\,G$ (подробнее см. в [19], II.2). В частном случае, когда коцикл принимает значения в $\mathrm{Aut}\, S$, реализованной в виде подгруппы $\mathrm{Aut}\, G$, сохраняющей H, B и множество унипотентных корневых подгрупп G, задаваемых простыми корнями, форма G называется *квазиразложимой.* Квазиразложимая группа имеет борелевскую подгруппу, определенную над k.

Напомним, что действие $\mathrm{Aut}\,(G, H)$ на H задает действие группы автоморфизмов системы корней $A(\mathrm{R}) = W \rtimes \mathrm{Aut}\, S$ на H, см. (7).

Предложение 2.3 *Пусть σ - гомоморфизм $\Gamma \to A(\mathrm{R})$, а θ - композиция σ и сюръекции $A(\mathrm{R}) \to \mathrm{Aut}\, S$. Обозначим через G_θ квазиразложимую форму G, задаваемую θ. Пусть H_σ - форма k-разложимого максимального тора $H \subset G$, скрученная при помощи коцикла σ. Тогда тор H_σ изоморфен некоторому максимальному тору в G_θ.*

Доказательство. Правый столбец (7) представляет собой расщепляющуюся точную последовательность

$$1 \to W \to A(\mathrm{R}) \to \mathrm{Aut}\, S \to 1.$$

Сечение $\mathrm{Aut}\, S \to A(\mathrm{R})$ позволяет считать θ коциклом с коэффициентами в $A(\mathrm{R})$. Это позволяет определить скрученные формы $(\mathrm{Aut}\, S)_\theta$ и $A(\mathrm{R})_\theta$. Действие $A(\mathrm{R})$ сопряжениями на W позволяет определить скрученную форму W_θ. При этом получается следующая точная последовательность групповых схем над k:

$$1 \to W_\theta \to A(\mathrm{R})_\theta \to (\mathrm{Aut}\, S)_\theta \to 1.$$

Напомним, что между множествами $\mathrm{Z}^1(k, A(\mathrm{R}))$ и $\mathrm{Z}^1(k, A(\mathrm{R})_\theta)$, а также между $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R}))$ и $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R})_\theta)$ имеется каноническая биекция, при которой класс $[\theta]$ в $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R}))$ соответствует выделенному элементу в $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R})_\theta)$ (см. [12], I.5.3, Предл. 35). Эта биекция отождествляет прообраз $[\theta] \in \mathrm{H}^1(k, \mathrm{Aut}\, S)$ в $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R}))$ с образом $\mathrm{H}^1(k, W_\theta)$ в $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R})_\theta)$ (см. [12], I.5.5, Следствие 2, или [19], I.3). Пусть $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Z}^1(k, W_\theta)$ - коцикл такой, что образ класса $[\tilde{\sigma}] \in \mathrm{H}^1(k, W_\theta)$ в $\mathrm{H}^1(k, A(\mathrm{R})_\theta)$ соответствует σ при этом отождествлении.

Скрученная форма тора H при помощи θ очевидно является максимальным тором $H_\theta \subset G_\theta$. Обозначим N_θ нормализатор H_θ в G_θ. Групповая k-схема W_θ изоморфна N_θ/H_θ, поэтому W_θ естественно действует на H_θ. Скручивание H_θ на коцикл $\tilde{\sigma}$ изоморфно H_σ. В силу того, что G_θ - квазиразложимая группа, мы можем применить теорему Жилля–Рагунатана ([9], Thm. 5.1 (b), [10], Thm. 1.1). Согласно этой теореме тор, получаемый скручиванием H_θ на любой 1-коцикл Γ с коэффициентами в W_θ, можно вложить в G_θ как максимальный тор этой же группы. В частности, это применимо и к H_σ. QED

При реализации $\mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$ как некоторой подгруппы в $\mathrm{Aut}\, G$, сохраняющей H и B, параболическая подгруппа P переходит в себя, т.к. это единственная группа в своем классе сопряженности, содержащая B. Поэтому если

$\theta(\Gamma) \subset \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$, то квазиразложимая группа G_θ содержит скрученную форму P_θ группы P.

Теорема 2.4 *Пусть σ - гомоморфизм $\Gamma \to W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i) \subset A(\mathrm{R})$, а θ - композиция σ и сюръекции $W \rtimes \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i) \to \mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$. Пусть $H_\sigma \subset G_\theta$ - вложение H_σ как максимального тора в квазиразложимую группу G_θ. Предположим, что выполнены условия* (1) *и* (2) *Теоремы* 2.2. *Тогда скрученная при помощи σ форма X изоморфна фактору по H_σ множества тех стабильных точек G_θ/P_θ относительно действия H_σ, стабилизаторы которых в $H_\sigma/Z(G_\theta)$ тривиальны.*

Доказательство. Пусть $(G_\theta/P_\theta)^{\mathrm{sf},\theta}$ - открытое подмножество однородного пространства (G_θ/P_θ), состоящее из стабильных точек относительно действия H_θ с тривиальными стабилизаторами в торе $H_\theta/Z(G_\theta)$. Поскольку группа $\mathrm{Aut}\,(S, \alpha_i)$ действует согласованно на G, P, H, $(G/P)^{\mathrm{sf}}$ и $X = H\backslash(G/P)^{\mathrm{sf}}$, то скрученная форма X посредством коцикла θ есть фактор $X_\theta = H_\theta\backslash(G_\theta/P_\theta)^{\mathrm{sf},\theta}$.

Скрученная форма X на коцикл σ получается скручиванием X_θ на коцикл $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Z}^1(k, W_\theta)$ (см. доказательство Предложения 2.3), т.е. $X_\sigma = (X_\theta)_{\tilde{\sigma}}$. Поскольку максимальные торы H_θ и H_σ группы G_θ сопряжены над $\overline{k}$, существует элемент $g \in G_\theta(\overline{k})$ такой, что $g \cdot H_\theta \cdot g^{-1} = H_\sigma$. Тогда $\rho(\gamma) = g^{-1} \cdot {}^\gamma g \in \mathrm{Z}^1(k, N_\theta)$, $\gamma \in \Gamma$, есть 1-коцикл группы Галуа с коэффициентами в N_θ, являющийся поднятием $\tilde{\sigma} \in \mathrm{Z}^1(k, W_\theta)$. При этом образ класса $[\rho]$ в $\mathrm{H}^1(k, G)$ тривиален. Группа N_θ согласовано действует на однородном пространстве G_θ/P_θ, на торе H_θ и на факторе $X_\theta = H_\theta\backslash(G_\theta/P_\theta)^{\mathrm{sf},\theta}$, поэтому скрученная форма $X_\sigma = (X_\theta)_{\tilde{\sigma}}$ есть фактор соответствующей скрученной формы $(G_\theta/P_\theta)^{\mathrm{sf},\theta}$ по действию $H_\sigma = (H_\theta)_{\tilde{\sigma}}$. В силу того, что образ $[\rho]$ в $\mathrm{H}^1(k, G)$ тривиален, а замкнутость орбит и тривиальность стабилизаторов являются условиями над $\overline{k}$, упомянутая скрученная форма $(G_\theta/P_\theta)^{\mathrm{sf},\theta}$ является открытым подмножеством G_θ/P_θ, а именно подмножеством, состоящим из стабильных точек относительно действия H_σ с тривиальными стабилизаторами в $H_\sigma/Z(G_\theta)$. QED

Следствие 2.5 *Предположим, что выполнены условия* (1) *и* (2) *Теоремы* 2.2. *Тогда любая $\overline{k}/k$-форма X унирациональна, в частности, множество ее k-точек плотно по Зарискому.*

Доказательство. По Теореме 2.4 достаточно показать, что G_θ/P_θ рационально над k. В этом случае множество k-точек будет плотным ввиду того, что поле k бесконечно (напомним, что $\mathrm{char}(k) = 0$). Пусть P_θ^- - противоположная к P_θ параболическая подгруппа, и пусть $R(P_\theta^-)$ - ее унипотентный радикал. Аффинное пространство $R(P_\theta^-)$ является плотным открытым подмножеством (открытой клеткой Шуберта) в G_θ/P_θ. QED

Замечание. Как хорошо известно, любая поверхность дель Пеццо степени 5 рациональна над полем определения. Было бы интересно выяснить, обобщается ли это свойство на произвольные $\overline{k}/k$-формы факторов G/P по действию максимального тора.

Теорема 2.2 для случая системы корней A_n была доказана Нилом Фитцджеральдом (Neil Fitzgerald), который рассматривал фактор $(\mathbf{P}_k^{m-1})^n$ по действию $\mathrm{PGL}(m)$ (неопубликовано). Автор признателен Филиппу Жиллю (Philippe Gille) и Вере Сергановой за полезные обсуждения, а анонимному рецензенту за тщательное прочтение статьи и подробные замечания. Работа над статьей была начата в Центре математических исследований Университета Монреаля (Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal). Я хотел бы поблагодарить Ирину и Виктора за их гостеприимство.

References

[1] J-L. Colliot-Thélène et J-J. Sansuc. La descente sur les variétés rationnelles, II. *Duke Math. J.* **54** (1987) 375–492.

[2] A.N. Skorobogatov. *Torsors and rational points.* Cambridge University Press, 2001.

[3] I.V. Dolgachev and D. Ortland. *Point sets in projective spaces and theta functions.* Asterisque **165**, 1988.

[4] A.N. Skorobogatov. On a theorem of Enriques–Swinnerton-Dyer. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **2** (1993) 429–440.

[5] M.M. Kapranov. Chow quotients of Grassmannians. I. In: *I.M. Gelfand Seminar*, 29–110, *Adv. Soviet Math.* **16** Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[6] V.V. Serganova and A.N. Skorobogatov. Del Pezzo surfaces and representation theory. *J. Algebra and Number Theory* **1** (2007) 393–419.

[7] V.V. Serganova and A.N. Skorobogatov. On the equations for universal torsors over del Pezzo surfaces. *J. Inst. Math. Jussieu*, to appear.

[8] M. Demazure. Automorphismes et déformations des variétés de Borel. *Invent. Math.* **39** (1977) 179–186.

[9] Ph. Gille. Type des tores maximaux des groupes semi-simples. *J. Ramanujan Math. Soc.* **19** (2004) 213–230.

[10] M.S. Raghunathan. Tori in quasi-split groups. *J. Ramanujan Math. Soc.* **19** (2004) 281–287.

[11] D. Harari and A.N. Skorobogatov. Non-abelian descent and the arithmetic of Enriques surfaces. *Int. Math. Res. Notices* **52** (2005), 3203–3228.

[12] J-P. Serre. *Cohomologie galoisienne.* Lecture Notes in Math. **5**, Springer-Verlag, 1964. Русский перевод: Ж.-П. Серр. *Когомологии Галуа.* М., Мир, 1968.

[13] J. Giraud. *Cohomologie non abélienne.* Springer-Verlag, 1971.

[14] D. Mumford, J. Fogarty, and F. Kirwan. *Geometric invariant theory.* 3rd enlarged edition. Springer-Verlag, 1994. Русский перевод первого издания в кн.: Ж. Дьедонне, Дж. Керрол, Д. Мамфорд. *Геометрическая теория инвариантов.* М., Мир, 1974.

[15] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, 1977. Русский перевод: Р. Хартсхорн. *Алгебраическая геометрия.* М., Мир, 1981.

[16] I.V. Dolgachev. *Lectures on invariant theory.* Cambridge University Press, 2003.

[17] N. Bourbaki. *Groupes et algèbres de Lie.* Chapitres IV-VIII. Masson, Paris, 1975, 1981. Русский перевод: Н. Бурбаки *Группы и алгебры Ли.* М., Мир, 1972, 1978.

[18] S. Senthamarai Kannan. Torus quotients of homogeneous spaces. II. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **109** (1999) 23–39.

[19] В.П. Платонов и А.С. Рапинчук. *Алгебраические группы и теория чисел.* М., Наука, 1991.

Институт проблем передачи информации РАН, Большой Каретный пер., д. 19, Москва 127994 Россия

Department of Mathematics, South Kensington Campus, Imperial College London, SW7 2BZ England, U.K.

a.skorobogatov@imperial.ac.uk