15 Décembre 2011 : Journée Paul Lévy

Inauguration de la Salle Paul Lévy,

Salle 113, Aile 16-26, U. Paris-VI, Pl. Jussieu

L'INFLUENCE MONDIALE DE PAUL LÉVY DANS LE DOMAINE DES PROBABILITÉS

N. H. BINGHAM

Imperial College, London

Sources

M. Loève, Paul Lévy 1886-1971, *Annals of Probability* **1**.1 (1973), 1-18.
[CP] P. Lévy, *Calcul des Probabilités*, GV, 1925 ;
[TAVA] P. Lévy, *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, G-V, 1937/1954 ;
[PSMB] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement brownien*, G-V, 1948/1965,
[QAPM] P. Lévy, *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien*, Blanchard, 1970
Marc Barbut & Laurent Mazliak, Lévy's three lectures of 1919 on probability, *EJHPS* **4**.1 (2008) ;
Laurent Mazliak, How Paul Lévy saw Jean Ville and martingales, *EJHPS* **5**.1 (2009) ;
Laurent Mazliak, The ghosts of the Ecole Normale : Life, death and legacy of René Gâteaux. *Historia Mathematica*, 2012.
NHB, Measure into probability : from Lebesgue to Kolmogorov. *Biometrika*, 2000.
NHB, Jozef Marcinkiewicz : Life and work. Banach Centre Publications **95** (2011), 27-44..

Vie
Né à Paris en 1886, fils et petit-fils de mathématiciens. Décédé à Paris en 1975 à l'âge de 85 ans.

Étudiant brillant dans tous les domaines ; Lycée Saint-Louis ; école Polytechnique (major de promotion,1905 ; première publication).

Etudiant de Hadamard, thèse obtenue en 1912 ;
Professeur à l'Ecole de Mines, 1913
Service militaire en 1906-1907 et réquisitionné pendant la 1$^{\text{ère}}$ guerre mondiale dans l'artillerie (Sans aucun doute son affectation fut due à son génie mathématique ; il est possible que cette expérience ait influencé ses travaux ultérieurs en probabilités. Autres mathématiciens artilleurs : Napoléon, Littlewood, Linnik, Hammersley, etc. (et collaborateurs à la création de fusées : D.G. Kendall, Rankin, Rosser, etc.))

1920-1959 : Professeur d'analyse, École Polytechnique
1964 : Élu à l'Académie des Sciences
Auteur de 10 livres et plus de 270 articles, plus de 150 d'entre eux en théorie des probabilités.

Premiers travaux en analyse fonctionnelle
De 1905 à 1920, 40 premiers articles en analyse
Prépara les articles posthumes de René Gâteaux (1889-1914), autre élève de Hadamard, à la demande de ce dernier. Gâteaux avait rencontré Volterra pour publication.
Différentiation fonctionnelle (Gateaux, Hadamard, Fréchet), calcul fonctionnel (théorie spectrale ; Dunford et Schwartz ; Sz.-Nagy et Foias,...)
Mesures sur les espaces fonctionnels (Mesure de Wiener,1923 ; travaux suivants par Daniell et Gâteaux ; Lévy rencontre Wiener, 1922)
Livres d'analyse fonctionnelle 1922,1925,1951 ;

Cours d'analyse **1** (1929), **2** (1930). Travail de Volterra ; fonctions de Green. Non cité par Banach (1932), von Neumann (1932) ou Courant et Hilbert (1931,1937) ; cité dans Dunford et Schwartz I (1958), II (1963), considérablement cité dans le livre de 1927 de Vito Volterra (1860-1940) ; Traduction anglaise 1929, Dover, 1959.
Fonctions de croissance régulière : 1926a, 1927 ; 1928abc.

Premiers travaux en probabilités : La loi Gaussienne

1919 : donna trois cours à l'Ecole Polytechnique sur les « Notions du calcul des probabilites et le rôle de la loi Gaussienne dans la théorie des erreurs. » Ceux-ci changeront à la fois la vie de Lévy et la théorie des probabilités.

Thème des premiers travaux de Lévy (et une partie importante de ses travaux suivants) : Qu'est ce qui conduit à une loi gaussienne ? Réponse intuitive : la gaussianité est la signature d'un effet avec un grand nombre de causes individuellement négligeagles.

Thème annexe : qu'est ce qui conduit à une loi de Poisson ? Réponse intuitive : la « poissonalité » est la signature de chocs apparaissant de manière inattendue.

Lois stables (1919, provenant de ses cours) : au delà des lois Gaussienne et de Cauchy, suivie par la classe toute entière en termes de fonctions caractéristiques.

[CP] : première exposition dans un livre de théorie des probabilités, écrite par un mathématicien de première classe à l'ère de la théorie de la mesure.
Première exposition rigoureuse des fonctions caractéristiques dans un livre.
théorème de continuité de Lévy pour les fonctions caractéristiques : bijections bicontinues entre les classes de fonctions caractéristiques (sous une topologie de convergence uniforme des compacts) et les fonctions de distribution (sous la métrique de Lévy) (améliorée par Bochner en 1933 : la continuité de la limite de fonctions caractéristiques en 0 est suffisante pour avoir 'lim FC = FC lim').
Types de lois de probabilités (correspondant à la décomposition de Lebesgue 'd,ac,s').
Modes de convergence.

Période intermédiaire en probabilités
Fractions continues : 1929, 1930, 1936, 1952 ;

TAVA Chap. IX
Fonctions de concentration
Inégalités de symétrisation de Lévy
Martingales, à partir de 1934 (le nom est dû á Ville, 1939 ; cf. Mazliak, 2009)
Loi du zéro-un de Lévy, le premier théorème de convergence des martingales, 1934,1935 ; TAVA, Chap. VIII ; Traitement par des livres récents : Doob, 7.5, Chung, Th. 9.4.8, Kallenberg, Th 7.23
Arithmétique des lois de probabilité (les facteurs de convolution de Gaussiennes (resp. loi de Poisson) sont Gaussiens (resp. de Poisson)) : 1937, 1938
[TAVA], 1937 : Théorème de continuité (III, Th. 17.1,2)
Théorème d'équivalence de Lévy pour les séries aléatoires : pour les séries de termes indépendants, convergences p.s., en probabilité et en distribution sont équivalentes (VI, T. 44).
Formule de Lévy-Khintchine, Chap. VII ; de Finetti 1929, 1930 ; Kolmogorov 1932 ; Lévy 1934,

Khintchine 1936.
Les processus de Lévy ont tiré un grand bénéfice d'avoir été nommés ainsi : de manière succinte et appropriée. Ils étaient initialement appelés processus stochastiques à incréments indépendants/processus additifs/processus différentiels/processus décomposables/PAIS/... Le nom définitif, qui est utilisé par Fristedt dans son étude de 1974, est resté (Il me semble être dû à Orey). Loève, nécrologue de Lévy utilise le terme « décomposable », même dans la 4$^{\text{ème}}$ édition de son livre (1978). Les ouvrages récents de référence sont Bertoin (1996) et Sato (1999) ; également Applebaum 2004/2009 (aspects du calcul stochastique) ; tous utilisent le terme « processus de Lévy ».

Oeuvre tardive en probabilité

Lévy fut un pionnier dans l'étude approfondie des trajectoires (échantillonnées) du MB (et

des processus stochastiques en géneral)
[PSMB], 1948/1965 ($1^{\text{ère}}$ édition pré-Doob ; premiers chapitres sur des généralités) : « ligne brisée » de Lévy (une décomposition en ondelettes en langage moderne).
Ch. IV, processus stationnaires en temps continu (Loève, ... – pertinent en théorie de la prédiction).
Ch. VI, Étude approfondie du MB linéaire. temps locaux du mouvement brownien (ci-dessous) ; variation quadratique des trajectoires Browniennes ; Mouvement brownien en tant que martingale continue de variation quadratique t (Lévy) ; Module de continuité de des trajectoires browniennes (Lévy) ; Loi du logarithme itéré pour le MB.
Ch. VII, Le mouvement brownien plan. MB et fonctions analytiques (ci-dessous).
Ch. VII, Le mouvement brownien à plusieurs paramètres. Champs aléatoires – par ex., processus spatiaux (ou spatio-temporels) ; processus paramétrisés par des sphères et autres variétés, etc.)

Noyaux de Lévy-Schoenberg (R. Gangolli, 1964 *Acta Math.*, 1967 4th BS ; NHB, 1970s)
Ch. III, Compléments, 1965 : Déterminisme du MB dans un espace de Hilbert : MB sur une boule détermine le MB partout (irrégularité extrême, par contraste avec l'Analyse Complexe).

Autres sujets
Obituaires etc. : Gateaux 1919, Liouville 1931, Doeblin 1955, Hadamard 1967
Logique : 1926, 1927, 1930 ; Zermelo 1950
Chaînes de Markov : 1951 ; Chaînes de Feller-McKean 1959 ; processus Semi-Markoviens 1953.
Méthode de Wiman-Valiron en Analyse Complexe, 1925 ; Sommabilité, 1926

L’IMPACT DE LÉVY

1. Lévy, un pionnier de l’étude des trajectoires.

La formule de Lévy-Khintchine donne la FC générale d’un processus infiniment divisible (un résultat de distribution, ou statique) dans le contexte de la *décomposition de Lévy-Itô* des *trajectoires* d’un processus de Lévy comme la somme d’une partie continue, de grands sauts (processus de Poisson) et de la somme compensée de petits sauts. Le travail fut effectué par Itô en 1942, et refait plus tard (de manière plus efficace) en utilisant la théorie des excursions en 1972. L’idée de travailler directement avec les trajectoires s’est inflitrée dans les probabilités modernes (voir par ex. les travaux de David Williams).

2. Lévy et les temps locaux

Le PSMB de Lévy contient le résultat suivant sur le mouvement Brownien $B = (B_t)$ et le processus de son supremum $\overline{B}$ ($\overline{B}_t :=$ sup$_{[0,t]} B(.)$) :

$$(\overline{B} - B, \overline{B}) =_d (|B|, L).$$

Ici, $|B|$ ne s'annule que sur l'ensemble des zéros Z de B et L ne croît que sur Z, alors que $\overline{B} - B$ ne s'annule que sur l'ensemble R des records de B (où B est à un record actuel – égal à son supremum à cette date) et $\overline{B}$ ne croît que sur R. Ce processus L (mesure de voisinage de Lévy) est appelée le *temps local* de B. Ce concept est une des réussites les plus remarquables de Lévy. Grâce à elle, il est possible d'étendre la formule d'Itô en calcul stochastique pour une fonction $f(B)$ à la *formule de Itô-Tanaka*, valable pour $f \notin C^2$ (par ex., f convexe). Cela est nécessaire pour décrire un mouvement Brownien *réfléchi* (lorqu'il atteint une frontière – ou en dimension plus élevée, une surface-frontière). Les temps locaux peuvent être définis pour des processus plus généraux (par ex. Azéma-Yor, *Temps locaux*, Astérisque 52-53 (1978) pour les semi-martingales). Il existe une théorie des temps locaux *Gaussiens* due à S. M. Berman (années 1970 : plus les trajectoires d'un processus sont rugueuses, plus celles de son temps local sont régulières, et vice versa, le MB présentant « l'équilibre idéal » entre les deux).

3. Lévy, Ville et les martingales

Les contributions de Lévy à la théorie des martingales sont profondes, mais souffrent de sa non-utilisation de ce terme pendant de nombreuses années ainsi que de sa vision injustement négative du travail de Jean-André Ville (1910-89), lequel a introduit le terme. Cf. Mazliak (2009) pour un traitement détaillé. Lévy (dans le Ch. VIII de TAVA) utilise des conditions similaires à celles des martingales pour étendre les résultats de convergence des séries aléatoires à termes indépendants aux séries à termes dépendants. Un exemple est la loi zéro-un de Lévy (issue de son article JMPA de 1936), que Loève appela le premier théorème de convergence des martingales. Celle-ci est liée à la fois à la loi zéro-un de Kolmogorov et au théorème ultérieur de convergence pour les martingales *uniformément intégrables* (UI). La théorie des martingales fut également étudiée par l'école polonaise (Marcinkiewicz, Zygmund, ...), systématisée dans le célèbre Chapitre VII de Doob, *Stochastic processses* de 1953, et est désormais omniprésente, grâce à l'apport de nombreuses personnes : Burkholder, Gundy,...

4. Les processus de Lévy en tant que prototypes de semi-martingales

Meyer introduisit le concept de semi-martingales (processus décomposables en la somme d'une martingale locale et un processus de variation finie) comme une classe appropriée d'intégrateurs pour les intégrales stochastiques. Meyer affirme que (*Un cours sure les intégrales stochastiques*, 255-6 ; Sém. Prob. X, LNM 511 (1976) – sur la limite de la somme compensée des petits sauts) « cette idée de Paul Lévy peut-être suivie tout le long du cours ». Les semi-martingales sont à présent connues pour être la classe la plus générale d'intégrateurs (avec des intégrandes prévisibles) avec de bonnes propriétés (Bichteler).

5. Lévy et l'analyse complexe

Le résultat de Lévy [PSMB] selon lequel « si Z est un MB plan et si f est holomorphe, alors $f(Z)$ est un MB plan avec un changement de temps » a permis un brassage d'idées considérable entre l'Analyse Complexe et les martingales en général – MB en particulier. Cf. par

ex. Getoor et Sharpe, conformal martingales, 1972 ; B. J. Davis (*Ann. Prob.* **7**.6 (1979), 913-932 ; théorème de Picard (Davis, TAMS 1975) ; le théorème de Burkholder-Gundy-Silverstein sur les espaces H_p ; et le livre
R. DURETT : *Martingales and Brownian motion in analysis*, Wadsworth, 1984.

6. Décomposition de Lévy-Itô ; théorie d' excursion d'Itô

Cela a été mentionné plus haut dans 1.

7. Lévy, pionnier des fractales

Lévy commença l'étude en détail des trajectoires browniennes, en une ou plusieurs dimensions, dans PSMB. Il utilisa la mesure de Hausdorff pour étudier les trajectoires Browniennes

en 1953 (un thème développé par Taylor, Hawkes, ...). De par l'invariance d'échelle (ou autosimilarité) du MB, les trajectoires Browniennes sont *fractales*. En conséquence, de petits ensembles aléatoires tels que Z et R définis plus haut le sont également. Les fractales sont irrégulières : les trajectoires Browniennes sons p.s. non différentiables p.p. (Paley-Wiener-Zygmund 1933) ; décroissantes p.p.
(Dvoretsky-Erdös-Kakutani, 4th BS 1961) ; ...
Les points remarquables des trajectoires Browniennes on été étudiés en grand détail (points doubles et multiples ; points rapides et lents ;...).
B. B. Mandelbrot (1934-2010) a popularisé le domaine (partiellement avec l'infographie) et lui donna un nom mémorable – ce qui a aidé !

8. Théorème de Wiener-Lévy ; Algèbres de Banach

L'analyse harmonique généralisée de Wiener et les théorèmes taubériens (1930, 1932) incluaient la proposition que « si une fonction f

a une série de Fourier absolument convergente, alors dans toute région où f ne s'annule pas, $1/f$ a également une série de Fourier absolument convergente ». Lévy (1934) généralisa cela en replaçant la fonction inverse par une fonction analytique plus générale.
Un des premiers triomphes convaincants de l'analyse (fonctionnelle) moderne plutôt que classique fut (Gelfand, Godement et autres) d'étendre cette théorie au contexte des algèbres de Banach et l'analyse harmonique abstraite (d'où les mentions de Dunford et Schwartz ci-dessus).

9. Processus de Lévy en mathématiques financiéres.

modèle de base : Black-Scholes(-Merton), 1973 ; le bruit est un mouvement Brownien . Les processus de Lévy peuvent modéliser les sauts, et ont des queues plus épaisses.

Lévy, l'homme

Je n'ai pas connu Lévy. Je ne le connais qu'à travers son oeuvre écrite (y compris son autobiographie), des anecdotes de ceux qui l'ont côtoyé, et les écrits historiques (particulièrement Barbut-Mazliak, Mazliak 2009,2012).
Lévy, comme il l'avouait lui-même, ne lisait pas beaucoup les travaux des autres mathématiciens. Cela vient avec un prix à payer. (À l'inverse de Fréchet, l'un des grands mathématiciens du 20$^{\text{ème}}$ siècle, qui lisait tout.)

Lévy était « quelqu'un de cinglant » (Mazliak, 2009, p.15 : 'a scathing person').Une fois qu'il avait formé une vision négative du travail d'un autre, il avait tendance à ne pas en démordre. Cela eut des conséquences sur les carrières de Louis Bachelier (1870-1946), le père de la finance mathématique (de par sa thèse de 1900, *Théorie de la spéculation*) et Jean Ville (cf. plus haut). Dans son autobiographie (p 67-68), Lévy écrit de manière poignante avoir réalisé trop tard, après avoir vu pour la première fois les *Grundbegriffe* (notions élémentaires) pionnières de Kolmogorov de 1933, avoir manqué l'opportunté d'écrire un tel livre.

Lévy fut élu Membre Honoraire de la Société Mathématique de Londres en 1963. Il fut élu à l'Académie des Sciences en 1964 à l'âge de 78 ans (contexte dans Barbut-Locker-Mazliak, *Paul Lévy– Maurice Fréchet : 50 ans de correspondance mathématique*, 2004).

J'ai moi-même entendu des mathématiciens français d'âge avancé dire que l'institution mathématique avait honte de Lévy (sans doute parce que l'on trouvait que son style d'écriture discursif manquait d'élégance ou de rigueur), et que sa judéité attira quelques commentaires indésirables. Peut-être sa négativité mentionnée plus haut joua-t-elle aussi un rôle dans cette appréciation.

Lévy était le beau-père du grand analyste Laurent Schwartz (1915-2002). Il est souvent dit que le talent mathématique se transmet de père en beau-fils (cf. Edmund Landau et I. J. Schoenberg, Sir Ronald Fisher et George Box, Paul Malliavin et Anton Thalmaier,...). (Peut-être le travail de Lévy sur le delta de Dirac en 1928 planta-t-il les germes des distributions de Schwartz.)
Il est amusant de constater que ce fut un événement aléatoire (Humbert tombant malade) qui (via l'invitation de Carvallo à donner les trois cours à l'X en 1919) orienta Lévy vers les probabilités.

En résumé, le géant de la théorie des probabilités est clairement A. N. Kolmogorov (1903-1987). Aprés lui, et lui seul, viennent les noms de deux autres pères fondateurs : Alexander Yakowlevich Khinchin (Khintchine) (1894-1959) et Paul Lévy. Pour établir une hiérarchie entre ces deux grands probabilistes, il faudrait certainement tirer à pile ou face. Avec le temps vint un autre grand nom : Kiyoshi Itô (1915-2003). Itô était à la fois véritablement lui-même et le « Lévy de la génération suivante ». Il est également absolument impossible d'instaurer une hiérarchie entre ces deux hommes : les deux noms figurent sur les deux faces de la même pièce.

NHB, 15.12.2011