Chapitre 1

Semi-groupes de Markov

Ce chapitre donne quelques notions classiques de la théorie des semi-groupes de Markov qui peuvent se retrouver ou être complétées par exemple dans [43] ou [14]. Nous n'approfondirons pas ici l'étude des formes de Dirichlet et leurs liens avec les semi-groupes de Markov pour lesquels nous renvoyons le lecteur à [38], [62] et [74].

1.1 Semi-groupes de Markov, générateurs

Définition 1.1 *Une famille $(P_t)_{t\geq 0}$ d' opérateurs linéaires sur un espace de Banach $(\mathcal{B}, ||.||)$ est appelée un semi-groupe ssi il satisfait les conditions suivantes*

(1) *$P_0 = I$, l'identité sur $\mathcal{B}$.*

(2) *L'application qui à t associe P_t est continue dans le sens où pour tout $f \in \mathcal{B}$, $t \to P_t f$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{B}$.*

(3) *Pour tout $f \in \mathcal{B}$ et tout temps $(t,s) \in (\mathbb{R}^+)^2$,*

$$P_{t+s} f = P_t P_s f.$$

L'espace de Banach en question sera, dans la plupart des cas que nous considérerons, l'ensemble $\mathcal{C}(\Omega)$ des fonctions continues bornées d'un espace Polonais Ω dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. Néanmoins dans certains cas, l'espace à considérer peut-être un ensemble de fonctions plus régulières, tels que l'ensemble des fonctions *uniformément* continues bornées d'un espace Polonais Ω dans $\mathbb{R}$ muni de la norme uniforme. C'est la raison pour laquelle nous avons préféré introduire un espace de Banach général. Par la suite, nous supposerons que $\mathcal{B}$ est un espace de fonctions tests à valeurs réelles.

Définition 1.2 *Un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ est de Markov ssi*

(4) *Pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$,*

$$P_t \mathbb{1} = \mathbb{1}.$$

(5) *P_t préserve la positivité, c'est à dire que pour toute fonction $f \in \mathcal{B}$ et pour tout temps $t \in \mathbb{R}^+$,*

$$f \geq 0 \qquad \to \qquad P_t f \geq 0.$$

Les propriétés (4) et (5) impliquent que P_t est contractif, c'est à dire que

Définition 1.3 *P_t est contractif ssi pour tout $f \in \mathcal{B}$,*

$$||P_t f|| \leq ||f|| \tag{1.1.1}$$

où $||.||$ est la norme de $\mathcal{B}$.

La notion de semi-groupe de Markov peut être illustrée par les exemples suivants

Exercice 1.4 – a) *Soit A un opérateur positif borné, $||A|| \leq 1$, sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ laissant l'identité invariante et soit $\lambda > 0$. Alors, vérifier que*

$$P_t = e^{t\lambda(A-I)} = \sum_{n\geq 0} \frac{(\lambda t)^n}{n!}(A-I)^n$$

est un semi-groupe de Markov sur le même espace. Ici, $||A|| = \sup_{f\in\mathcal{B}} ||f||^{-1}||Af||$ avec $||\quad||$ la norme sur le Banach $\mathcal{B}$.

– b) *Soit μ une probabilité sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F})$ et $m > 0$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, on définit*

$$P_t f(\omega) = e^{-mt} f(\omega) + (1 - e^{-mt})\mu(f)$$

Vérifier que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov sur $\mathcal{C}(\Omega)$ muni de la topologie uniforme.

– c) *(Mouvement brownien en dimension d) Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ et $\omega \in \mathbb{R}^d$, on définit*

$$P_t f(\omega) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int f(y) e^{-\frac{|\omega - y|^2}{2t}} dy.$$

Montrer que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov sur l'ensemble $\mathcal{CU}(\Omega)$ des fonctions uniformément continues muni de la topologie uniforme.

– d) *(Mouvement brownien sur la sphère) Si $\Omega = S^1$, on peut écrire toute fonction f continue sur S^1 comme*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{inx}$$

par la représentation de Fourier. On définit alors

$$P_t f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-tn^2} a_n e^{inx}.$$

Montrer que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov sur $\mathcal{C}(\Omega)$ muni de la topologie uniforme.

– e) *(Processus de Poisson) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on définit*

$$P_t f(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda t)^k}{k!} f(x - k\lambda)$$

Montrer que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe de Markov sur $\mathcal{CU}(\Omega)$ muni de la topologie uniforme.

– f) *(Processus d'Ornstein-Uhlenbeck) Si $\Omega = \mathbb{R}$, montrer que*

$$P_t f(x) = \int f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \frac{e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dy$$

définit un semi-groupe de Markov sur $\mathcal{C}(\Omega)$.

Définition 1.5 *Le générateur infinitésimal $\mathcal{L}$ d'un semi-groupe P_t est défini par la formule*

$$\mathcal{L}f := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(P_t - I)f \tag{1.1.2}$$

pour toute fonction f telle que cette limite ait un sens. Le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$ est l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(\Omega)$ pour lesquelles la limite (1.1.2) existe.

Exercice 1.6 *Dans les exemples de l'exercice 1.4, montrer que les générateurs infinitésimaux sont, dans l'ordre,*

- a) $\mathcal{L}f = \lambda(A - I)f$, $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{B}$.
- b) $\mathcal{L}f = \mu f - f$, $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{C}(\Omega)$.
- c) *Dans le cas $d = 1$, pour simplifier, $\mathcal{L}f = (1/2)f"$, $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ est l'ensemble des fonctions f telles que f' et $f"$ sont uniformément continues et bornées.*

  Indications : Montrer que

$$g_\lambda(x) := \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} f(y) \exp\{-\sqrt{2\lambda}|x - y|\} dy$$

  en utilisant l'identité valable pour toute constante $c > 0$

$$\int_0^\infty \exp -\{y^2 + \frac{c^2}{y^2}\} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}.$$

  En déduire $2\lambda(g_\lambda - f) = g_\lambda"$. Par ailleurs, montrer que $g_\lambda \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ et que

$$\mathcal{L}(g_\lambda) = \lambda(g_\lambda - f).$$

  En utilisant l'identité ci-dessus, déduire que $\mathcal{L}g_\lambda = (1/2)g_\lambda"$ et, en laissant λ tendre vers l'infini et en utilisant la propriété de $\mathcal{L}$ d'être fermé (voir ci-dessous), conclure.

- d) $\mathcal{L}f = (1/2)f"$, $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ *est l'ensemble des fonctions f sur la sphère telles $f"$ est uniformément continue.*
- e) *Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $\mathcal{L}f(x) = \lambda(f(x - \lambda) - f(x))$. $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{CU}(\Omega)$.*
- f) $\mathcal{L}f(x) = f"(x) - xf'(x)$, $\mathcal{D}(\mathcal{L}) = \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$, *l'ensemble des fonctions trois fois continuement differentiables sur $\mathbb{R}$ de dérivées bornées.(voir [5]).*

Le théorème suivant caractérise les générateurs infinitésimaux :

Théorème 1.7 *(Théorème de Hille-Yosida pour les semi-groupes de Markov) Un opérateur $\mathcal{L}$ est le générateur d'un processus de Markov $(P_t, t \in \mathbb{R}^+)$ sur $\mathcal{B}$ ssi*

- $\mathbb{1} \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ *et* $\mathcal{L}\mathbb{1} = 0$.
- $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ *est dense dans $\mathcal{B}$.*
- $\mathcal{L}$ *est fermé.*

– *Pour tout* $\lambda > 0$, $(\lambda I - \mathcal{L})$ *est bijectif. Son inverse* $(\lambda I - \mathcal{L})^{-1}$ *est borné avec*

$$\sup_{||f|| \leq 1} ||(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} f|| \leq \frac{1}{\lambda}$$

et préserve la positivité (c'est à dire que pour tout $f \geq 0$, $(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} f \geq 0$*) .*

Rappel : Un opérateur $\mathcal{L}$ est fermé ssi il est continu dans le sens où pour toute suite f_n dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ convergeant (au sens de la topologie induite par la norme $||.||$ sur $\mathcal{B}$) vers une fonction f et telle que $\mathcal{L}f_n$ converge, alors

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}f_n = \mathcal{L}f.$$

Preuve *Condition nécessaire*

Le premier point est une conséquence directe du (4) de la définition (1.2) et de la définition du générateur. Pour montrer le second point, nous allons voir que

$$\mathcal{D}_0 : = \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t ds P_s f, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega), t > 0 \right\} \subset \mathcal{D}(\mathcal{L}). \tag{1.1.3}$$

Comme Pf est continue pour tout $f \in \mathcal{B}$, $\mathcal{D}_0$ est dense dans $\mathcal{B}$ ce qui achève la preuve.

Afin de démontrer (1.1.3), remarquons que pour tout $\tau \in I\!R^+$, on a

$$\frac{1}{\tau}(P_\tau - I) \int_0^t ds P_s f = \frac{1}{\tau} \int_\tau^{\tau+t} ds P_s f - \frac{1}{\tau} \int_0^t ds P_s f \tag{1.1.4}$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_t^{\tau+t} ds P_s f - \frac{1}{\tau} \int_0^\tau ds P_s f$$

par la propriété (3) de la définition 1.1. Le (2) de la définition 1.1 donne la convergence du terme de droite de (1.1.4) et on conclut

$$\mathcal{L} \int_0^t ds P_s f = P_t f - f, \tag{1.1.5}$$

et donc (1.1.3). Remarquons également que de (1.1.4) on déduit aussi en passant à la limite que, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$,

$$\mathcal{L} \int_0^t ds P_s f = P_t f - f = \int_0^t ds P_s \mathcal{L} f. \tag{1.1.6}$$

Pour montrer que $\mathcal{L}$ est fermé, prenons une suite f_n dans $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ convergeant vers une fonction f et telle que, pour une fonction $g \in \mathcal{B}$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}f_n = g.$$

Par (1.1.5), on obtient

$$P_t f_n - f_n = \mathcal{L} \int_0^t ds P_s f_n = \int_0^t ds P_s \mathcal{L} f_n \tag{1.1.7}$$

et, en passant à la limite, $P_t f - f = \int_0^t ds P_s g$. En divisant par t et prenant la limite $t \downarrow 0$, on conclut $\mathcal{L}f = g$ pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$.

Pour finir la preuve de cette implication, considérons la résolvante $R(\lambda, \mathcal{L})$ de l'opérateur $\mathcal{L}$ définie par

$$R(\lambda, \mathcal{L}) : = (\lambda I - \mathcal{L})^{-1}$$

et montrons que

$$R(\lambda, \mathcal{L}) f = \int_0^\infty ds e^{-\lambda s} P_s f. \tag{1.1.8}$$

En effet, si on considère le semi-groupe $\widetilde{P}_s = e^{-\lambda s}P_s$ de générateur $(\mathcal{L} - \lambda I)$, on obtient, d'après (1.1.5) que

$$(\mathcal{L} - \lambda I)\int_0^t ds e^{-\lambda s}P_s f = e^{-\lambda t}P_t f - f$$

pour toute fonction continue bornée f. En passant à la limite quand $t \to \infty$ et en utilisant que $\mathcal{L}$ est fermé, on conclut que pour toute fonction continue bornée f, $\int_0^\infty ds e^{-\lambda s}P_s f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ et

$$(\mathcal{L} - \lambda I)\int_0^\infty ds e^{-\lambda s}P_s f = -f. \tag{1.1.9}$$

Par conséquent, $(\mathcal{L} - \lambda I)$ est une bijection et (1.1.8) est vérifiée. En particulier, comme P_s est contractif,

$$\sup_{||f||=1} ||R(\lambda, \mathcal{L})f|| \leq \int_0^\infty ds e^{-\lambda s} = \frac{1}{\lambda}.$$

$R(\lambda, \mathcal{L})$ est donc un opérateur borné. Aussi, il est clair d'après (1.1.8) que $R(\lambda, \mathcal{L})$ préserve la positivité puisque P_t préserve la positivité.

Condition suffisante

Pour tout $\lambda > 0$, on introduit l'approximation de Yoshida $\mathcal{L}_\lambda$ de $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}_\lambda : = \mathcal{L}\lambda I(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} = \lambda^2(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} - \lambda I \tag{1.1.10}$$

Comme

$$||(\lambda I - \mathcal{L})^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}, \tag{1.1.11}$$

$\mathcal{L}_\lambda$ est un opérateur borné et on peut définir une famille d'opérateurs $P_\cdot^\lambda$ par

$$P_t^\lambda : = e^{t\mathcal{L}_\lambda} : = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}\mathcal{L}_\lambda^n = e^{-t\lambda I}e^{t\lambda^2(\lambda I - \mathcal{L})^{-1}}. \tag{1.1.12}$$

P^λ est un semi-groupe de Markov pour tout $\lambda > 0$ (voir exercice 1.4.a)).

Il nous reste à montrer que P_t^λ converge vers P_t qui possède alors les propriétés de semi-groupe de Markov. Pour commencer, remarquons que pour tout f dans le domaine $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ de $\mathcal{L}$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \mathcal{L}_\lambda f = \mathcal{L}f. \tag{1.1.13}$$

En effet, on a l'identité

$$\lambda(\lambda I - \mathcal{L})^{-1} - (\lambda I - \mathcal{L})^{-1}\mathcal{L} = I \tag{1.1.14}$$

sur $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Le second terme tend vers zéro quand λ tend vers l'infini si bien qu'on trouve que

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda(\lambda I - \mathcal{L})^{-1}g = g \tag{1.1.15}$$

pour tout $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, et donc pour tout $g \in \overline{\mathcal{D}(\mathcal{L})} = \mathcal{B}$. Comme $\mathcal{L}$ est fermé, on en déduit que $\mathcal{L}_\lambda$ converge vers $\mathcal{L}$ quand λ tend vers l'infini. Nous pouvons à présent montrer que P_t^λ converge vers P_t quand $\lambda \to \infty$. En effet, pour tout couple (λ_1, λ_2) de réels positifs et tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, on a la formule d'interpolation

$$e^{t\mathcal{L}_{\lambda_1}}f - e^{t\mathcal{L}_{\lambda_2}}f = t\int_0^1 ds e^{t(s\mathcal{L}_{\lambda_1} + (1-s)\mathcal{L}_{\lambda_2})}(\mathcal{L}_{\lambda_1} - \mathcal{L}_{\lambda_2})f \tag{1.1.16}$$

puisque $\mathcal{L}_{\lambda_1}$ et $\mathcal{L}_{\lambda_2}$ sont des opérateurs bornés qui commutent. On peut voir comme précédemment que le semi-groupe $Q_t := e^{t(s\mathcal{L}_{\lambda_1}+(1-s)\mathcal{L}_{\lambda_2})}$ est contractif pour tout $s \geq 0$ et conclure que

$$||e^{t\mathcal{L}_{\lambda_1}} f - e^{t\mathcal{L}_{\lambda_2}} f|| \leq t||(\mathcal{L}_{\lambda_1} - \mathcal{L}_{\lambda_2})f||. \tag{1.1.17}$$

La convergence des $\mathcal{L}_\lambda$ implique donc celle de P_t^λ. Soit P le semi-groupe définit par

$$P_t = \lim_{\lambda \to \infty} P_t^\lambda \tag{1.1.18}$$

sur $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Il est clair que les propriétés de semi-groupe, de contractivité, de conservation de l'unité et de positivité des semi-groupes P^λ s'étendent à P. P est donc un semi-groupe de Markov. Aussi, pour tout $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, on obtient par interpolation

$$P_t f - f = \lim_{\lambda \to \infty} (P_t^\lambda - I)f = \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^t ds P_s^\lambda \mathcal{L}_\lambda f = \int_0^t ds P_s \mathcal{L} f. \tag{1.1.19}$$

P est donc un semi-groupe de Markov continu dont le générateur correspond à $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{L})$. Par la condition (4) du théorème, la résolvante du semi-groupe corresponds à celle de $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{B}$. Le générateur de P_t est donc $\mathcal{L}$.

$\diamond$

Exercice 1.8 *Prouver que les opérateurs $\mathcal{L}$ munis de leurs domaines $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ définis dans l'exercice 1.6 sont des générateurs infinitésimaux en utilisant le théorème de Hille-Yoshida.*

Exercice 1.9 *Montrer que, pour tout entier naturel n, $\mathcal{D}(\mathcal{L}^n)$ est dense dans $\mathcal{B}$. Indications : Généraliser (1.1.5).*

1.2 Mesures invariantes d'un semi-groupe

Nous rappelons que

Définition 1.10 *Soit $(P_t)_{t\geq 0}$ un semi-groupe de Markov. Une probabilité μ sur (Ω, Σ) est invariante par rapport au semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ ssi pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et tout temps $t \geq 0$*

$$\mu(P_t f) = \mu(f). \tag{1.2.20}$$

L'ensemble des probabilités invariantes par rapport au semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ sera noté $\mathcal{J} = \mathcal{J}(P)$.

Remarque 1.11: Observons qu'un semi-groupe de Markov (par exemple le mouvement brownien) peut ne pas admettre de mesure invariante.
Les mesures invariantes sont aussi caractérisées par

Propriété 1.12 *μ sur (Ω, Σ) est invariante par rapport au semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ ssi pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$*

$$\mu(\mathcal{L}f) = 0. \tag{1.2.21}$$

Preuve : Par (1.2.20), on obtient pour tout t

$$\mu[\frac{1}{t}(P_t - I)f] = 0.$$

En passant à la limite pour $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ on obtient (1.2.21). Réciproquement, comme nous avons déjà vu que

$$(P_t - I)f = \mathcal{L} \int_0^t ds P_s f$$

et en intégrant les 2 côtés par rapport à la mesure μ, on obtient que (1.2.21) implique (1.2.20) pour toute fonction continue puisque on a vu en (1.1.5) que $\int_0^t ds P_s f$ appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{L})$.

$\diamond$

Le semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ a été défini jusqu'à présent sur un espace de Banach $\mathcal{B}$, à priori espace de fonctions continues. En fait, on peut l'étendre abstraitement comme l'indique la

Propriété 1.13 *Soit $\mu \in \mathcal{J}(P)$ pour un semi-groupe $(P_t)_{t\geq 0}$ de Markov. On peut étendre $(P_t)_{t\geq 0}$ dans tous les espaces $L^p(\mu)$ pour $p \geq 1$.*

Preuve : Les opérateurs P_t étant linéaires, positifs, de masse totale $P_t 1 = 1$, on a l'inégalité de Jensen pour tout $p \geq 1$ et tout $f \in \mathcal{B}$,

$$|P_t f|^p \leq P_t |f|^p. \tag{1.2.22}$$

Intégrant par rapport à $\mu \in \mathcal{J}$, on déduit

$$\mu |P_t f|^p \leq \mu |f|^p. \tag{1.2.23}$$

Le théorème d'Hahn-Banach (voir [77], théorème 5.16) montre alors qu'on peut étendre le semi-groupe P_t à $L^p(\mu)$.

$\diamond$

Définition 1.14 *Un semi-groupe de Markov $\{P_t, t \geq 0\}$ est dit $L^q(\mu)$ ergodique pour $q \in]1, \infty[$ et $\mu \in \mathcal{J}(P_t)$ ssi pour toute fonction $f \in L^q(\mu)$,*

$$\lim_{t\to\infty} \int (P_t f - \mu f)^q d\mu = 0.$$

Un semi-groupe de Markov $\{P_t, t \geq 0\}$ est dit uniformément ergodique ssi $\mathcal{J}(P_t)$ est réduit à une seule mesure μ et que

$$\lim_{t\to\infty} ||P_t f - \mu f||_\infty = 0.$$

Notre but dans le reste de ce cours est de développer des outils pour étudier les propriétés d'érgodicité des semi-groupes. Nous nous intéresserons à des semi-groupes P_t et des mesures μ satisfaisant une propriété plus forte que l'invariance.

Définition 1.15 *Une mesure μ sur (Ω, Σ) est réversible pour un semi-groupe de Markov $\{P_t, t \geq 0\}$ ssi pour tout $(f, g) \in \mathcal{B}$ et tout temps t,*

$$\mu(g P_t f) = \mu(f P_t g). \tag{1.2.24}$$

L'ensemble des mesures réversibles pour un semi-groupe de Markov $\{P_t, t \geq 0\}$ sera noté $\mathcal{J}_0(P_t)$. Clairement

$$\mathcal{J}_0(P_t) \subset \mathcal{J}(P_t)$$

puisque on peut prendre $g = 1\!\!1$ et que $P_t 1\!\!1 = 1\!\!1$. (1.2.24) montre plus précisément que le semi-groupe $\bar{P}_t$ obtenu comme extension de P_t dans $L^2(\mu)$ (comme indiqué dans la propriété 1.13) est auto-adjoint dans $L^2(\mu)$. On peut associer à $\bar{P}_t$ un générateur infinitésimal $\bar{\mathcal{L}}$ fermé (voir la preuve du théorème de Hille-Yoshida) qui coïncide avec le générateur $\mathcal{L}$ de P_t sur le domaine de ce dernier. Alors, il n'est pas difficile de voir que la condition (1.2.24) est équivalente à

$$\mu(g \bar{\mathcal{L}} f) = \mu(f \bar{\mathcal{L}} g) \tag{1.2.25}$$

pour tout (f,g) dans le domaine de $\bar{\mathcal{L}}$. Autrement dit, puisque $\bar{\mathcal{L}}$ est fermé, $\bar{\mathcal{L}}$ est auto-adjoint dans $L^2(\mu)$.

Exercice 1.16 *Vérifier que la mesure μ est invariante mais pas réversible pour l'opérateur $\mathcal{L}$ dans les deux exemples suivants*

- *Soit (Ω,Σ,μ) un espace probabilisé et $(\mathbf{E}_1,\mathbf{E}_2)$ deux espérances conditionnelles, $\mathbf{E}_1=\mu(\ |A_1)$ et $\mathbf{E}_2=\mu(\ |A_2)$. On définit alors, si I désigne l'identité dans $L^2(\mu)$, l'opérateur $\mathcal{L}$ dans $L^2(\mu)$ par*
$$\mathcal{L}=\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2-I.$$
- *A $U\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$, on associe, quand elle est bien définie, la mesure de Gibbs sur $\mathbb{R}$*
$$\mu(dx)=\frac{1}{Z}\exp\{-U(x_1,..,x_d)\}dx_1..dx_d.$$
Pour une fonction $\alpha\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^d)$, considérons l'opérateur sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ défini par
$$\mathcal{L}f(x)=\alpha.\nabla f(x)=\sum_{i=1}^d\alpha_i(x)\partial_{x_i}f(x).$$
Si
$$div(\alpha)=\alpha.\nabla U,$$
vérifier que μ est invariante pour $\mathcal{L}$. Elle n'est pas pour autant réversible en général.

Exercice 1.17 *Soit Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ et $\Omega=\mathbb{R}^\Lambda$. Soit U une fonction $\mathcal{C}^1$ sur Ω explosant suffisamment vite à l'infini pour que la probabilité*
$$\mu(dx)=\frac{1}{Z_\Lambda}\exp\{-U(x)\}dx_\Lambda$$
où $Z_\Lambda=\int\exp\{-U(x)\}dx_\Lambda$ soit bien définie.

Considérons le générateur sur $\mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}^{|\Lambda|})$ défini par
$$\mathcal{L}=\sum_{i\in\Lambda}(\Delta_i-g_i\nabla_i)$$
où ∇_i (resp. Δ_i) désigne la dérivation (resp. le laplacien) agissant sur la i-ième coordonnée. Ici, les g_i sont des fonctions lipschitziennes bornées. Donner des conditions suffisantes sur les g_i pour que μ soit réversible pour le semi-groupe associé à ce générateur.

Exercice 1.18 *Soit Λ un sous ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$ et $\Omega=\{-1,+1\}^\Lambda$. Soit*
$$\mathcal{L}=\sum_{i\in\Lambda}c_i(\sigma)\partial_i$$
où $\partial_i f=f(\sigma^i)-f(\sigma)$ si
$$\sigma^i_j=\begin{cases}+\sigma_j & si\ j\neq i\\ -\sigma_i & si\ j=i.\end{cases}$$
Soit μ une probabilité sur Ω de la forme
$$\mu(f)=\frac{1}{\sum_{\sigma\in\Omega}e^{-U(\sigma)}}\sum_{\sigma\in\Omega}e^{-U(\sigma)}f(\sigma).$$
Donner des conditions suffisantes sur les c_i pour que μ soit réversible pour le semi-groupe associé à ce générateur.

Exercice 1.19 *Soit Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$. Soit $X \subset \mathbb{Z}^d$ un sous ensemble de $\mathbb{Z}^d$ fini. Nous notons*

$$X + i = \{j + i; j \in X\}.$$

Soit μ une probabilité sur un espace de probabilité $\Omega = \mathbf{M}^\Lambda$ pour un espace polonais $\mathbf{M}$. Soit Σ^Λ_{X+i} la sigma-algèbre engendrée par les $(x_j)_{j \in (X+i)^c \cap \Lambda}$ Nous notons

$$\mathbf{E}_{X+i} = \mu(\quad |\Sigma_{X+i})$$

l'espérance conditionnelle de μ sachant $(x_j)_{j \in (X+i)^c \cap \Lambda}$. Soit $\mathcal{L}$ le générateur défini, pour $f \in L^2(\mu)$, par

$$\mathcal{L}f(x) = \sum_{i \in \Lambda} (\mathbf{E}_{X+i} - I)f(x).$$

Montrer que μ est réversible pour le semi-groupe associé à $\mathcal{L}$.

1.3 Processus de Markov

La notion de semi-groupe de Markov est intimement liée à celle de processus de Markov. Nous survolons cette dernière ainsi que ses liens avec les semi-groupes de Markov dans cette section.

Un bon exemple de processus de Markov est le mouvement brownien : Si on observe un mouvement brownien jusqu'à un temps s, que peut-on dire de sa loi à un instant t ultérieur ? Ses incréments étant indépendants, il apparaît que $B_t = (B_t - B_s) + B_s$ à la loi d'un mouvement brownien au temps $t - s$ et de condition initiale B_s. Autrement dit, si $\mathcal{F}_s$ est la tribu engendrée par $(B_u)_{u \leq s}$, pour tout ensemble mesurable Γ de $\mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(B_t \in \Gamma | \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(B_t \in \Gamma | B_s)$$

Nous définissons la propriété de Markov par

Définition 1.20 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\Gamma_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré ; Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ adapté est un processus de Markov par rapport à (Γ_t) si pour tout ensemble Γ mesurable borné et tout temps (s,t),*

$$\mathbb{P}(X_t \in \Gamma | \Gamma_s) = \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s)$$

Nous noterons par la suite, pour tout $x \in \Omega$,

$$\mathbb{P}^x(X_t \in \Gamma) : = \mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_0 = x)$$

la loi du processus de Markov issu de x.

Par ailleurs, la distribution des incréments du mouvement brownien étant stationnaire (c'est à dire que la loi de $(B_t - B_s)$ ne dépend que de $t - s$),

$$\mathbb{P}(B_t \in \Gamma | B_s = y) = \mathbb{P}^y(B_{t-s} \in \Gamma).$$

Nous définirons donc

Définition 1.21 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\Gamma_t), \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ de Markov par rapport à (Γ_t) est homogène ssi pour tout ensemble Γ mesurable borné et tout temps $(s,t,u) \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(X_t \in \Gamma | X_s) = \mathbb{P}(X_{t+u} \in \Gamma | X_{s+u}).$$

Nous pouvons re-formuler la propriété de processus de Markov homogène. Si nous notons $I\!P^x$ la loi d'un processus de Markov homogène de condition initiale $x \in \Omega$, nous pouvons définir une collection $(P_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs sur l'espace des fonctions mesurables bornées à valeurs réelles tels que

$$P_t f(x) = \int f(X_t) dI\!P^x.$$

La famille $(P_t)_{t\geq 0}$ d'opérateurs constitue un semi-groupe de Markov.

Remarquons que la notion de semi-groupe de Markov est en fait équivalente à celle de processus de Feller-Markov comme l'illustrent les exercices suivants.

Exercice 1.22 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\Gamma_t), I\!P)$ un espace de probabilité filtré et $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus de Feller- Markov (c'est à dire un processus tel que pour toute fonction continue bornée f, $P_t f$ est une fonction continue bornée). Montrer que la famille d'opérateurs définie par*

$$P_t f(x) = I\!E[f(X_t)|X_0 = x]$$

est un semi-groupe de Markov sur $(\mathcal{C}(\Omega), ||.||_\infty)$. Réciproquement, tout semi-groupe de Markov sur $(\mathcal{C}(\Omega), ||.||_\infty)$ définit un unique processus de Feller-Markov.
Indications : Pour la seconde implication,

a) Utiliser le théorème de Riesz pour montrer que, pour tout temps t et $x \in \Omega$, il existe une probabilité $\mathbf{E}(t, x, dy)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega)$.

b) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre des fonctions cylindriques sur $\mathcal{C}(I\!R^+, \Omega)$, c'est à dire l'algèbre des fonctions de la forme

$$F(\xi) = f(\xi_{t_1}, .., \xi_{t_p})$$

pour un entier fini p et des temps $(t_1, .., t_p)$ donnés. Définir, pour une probabilité μ, une fonctionnelle normalisée $\mathbf{E}^\mu$ linéaire sur $\mathcal{A}$ par

$$\mathbf{E}^\mu(F) = \int f(y_1, ., y_p)\mu(dy_0)\mathbf{E}(t_1, y_0, dy_1)\mathbf{E}(t_2 - t_1, y_0, dy_1)..\mathbf{E}(t_p - t_{p-1}, y_{p-1}, dy_p).$$

Le théorème de Stone-Weierstrass implique que $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(I\!R^+, \Omega)$. Déduire par le théorème de Riesz qu'il existe une unique probabilité P^μ sur cet espace telle que pour toute fonction $F \in \mathcal{A}$,

$$\int F(\xi) dP^\mu(\xi) = \mathbf{E}^\mu(F).$$

Montrer que $\mathbf{E}^{\delta_x}$ est une famille de probabilités constituant un processus de Feller-Markov.

Comme on a vu que les semi-groupes de Feller-Markov et les processus de Markov sont en bijection, le théorème de Hille-Yoshida établit également une bijection entre les processus de Markov et les générateurs infinitésimaux. On peut en fait établir cette connexion de manière plus directe en suivant Varadhan et Stroock qui introduisirent la notion de problème de martingales. Pour associer à un processus de Markov un générateur de Markov, on définit

Définition 1.23 *Soit $\mathcal{L}$ un générateur de Markov. Une probabilité $\mathbf{E}$ sur $\mathcal{C}(I\!R^+, \Omega)$ est solution d'un problème de martingale pour $\mathcal{L}$ de condition initiale η ssi*

1.

$$\mathbf{E}[\xi \in \mathcal{C}(I\!R^+, \Omega) : \xi_0 = \eta] = 1.$$

2. Si on note x le processus canonique sous $\mathbf{E}$, $f(x_t) - \int_0^t \mathcal{L}f(x_s)ds$ est une martingale sous $\mathbf{E}$ pour la filtration

$$\mathcal{F}_t = \sigma(x_u, u \leq t).$$

On a alors le

Théorème 1.24 *Soit $\mathcal{L}$ un générateur de Markov. Soit $(\mathbf{E}^\eta, \eta \in \Omega)$ l'unique processus de Feller-Markov associé à $\mathcal{L}$. Alors, pour tout $(\eta \in \Omega)$, $\mathbf{E}^\eta$ est l'unique solution du problème de martingale pour $\mathcal{L}$ de condition initiale η.*

Nous avons aussi la propriété

Propriété 1.25 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\Gamma_t), I\!P)$ un espace de probabilité filtré Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov homogène ssi pour tout ensemble Γ mesurable borné et tout temps (s,t)*

$$I\!P^x(X_t \in \Gamma | \Gamma_s) = (P_t \mathbb{1}_\Gamma)(X_s) \quad I\!P^x - a.s$$

La preuve est dans [55], p. 75.

Exercice 1.26 *Soit $(h_i)_{1 \leq i \leq d}$ des fonctions continuement dérivables lipschitziennes à valeurs réelles sur $I\!R^d$. Montrer que l'unique processus solution du système différentiel stochastique*

$$dx_t^i = h_i(x_t)dt + dB_t^i \qquad 1 \leq i \leq d$$

est un processus de Markov. Préciser le générateur de son semi-groupe associé.

Pour plus d'informations sur les processus de Markov, nous renvoyons le lecteur aux livres [55] et [73].