Chapitre 2

Inégalités de trou spectral et L^2 ergodicité

Avant de considérer les inégalités de Sobolev et de rentrer dans le vif du sujet, nous étudions l'ergodicité $L^2(\mu)$ des semi-groupes réversibles. En effet, la propriété de réversibilité des semi-groupes de Markov nous permet de voir $\mathcal{L}$ comme un opérateur auto-adjoint de $L^2(\mu)$ et rend donc l'étude des propriétés de ces semi-groupes naturelle dans cet espace.

Soit $\mathcal{L}$ un générateur infinitésimal. Soit μ une probabilité sur (Ω, Σ) réversible pour le semi-groupe $P_t = e^{t\mathcal{L}}$. On définit

Définition 2.1 *Une probabilité $\mu \in \mathcal{J}_0(\mathcal{L})$ satisfait l'inégalité de trou spectral ssi il existe un réel m* **strictement** *positif tel que*

$$m\mu(f - \mu f)^2 \leq \mu(f(-\mathcal{L})f) \tag{2.0.1}$$

pour toute fonction $f \in L^2(\mu) \cap \mathcal{D}(\mathcal{L})$ telle que le terme de droite soit fini. Le plus grand des nombres m tel que (2.0.1) soit vérifiée est appelé le trou spectral de l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}$.

On note souvent

$$\mathcal{E}(f, f) = \mu(f(-\mathcal{L})f)$$

la forme de Dirichlet. Egalement, on peut la définir à l'aide du carré du champ

$$\Gamma_1(f, f) : = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}f^2 - 2f\mathcal{L}f\right).$$

On a en effet, pour tout $\mu \in \mathcal{J}_0(\mathcal{L})$,

$$\mathcal{E}(f, f) = \mu(\Gamma_1(f, f)).$$

L'opérateur carré du champ est positif puisque

$$\Gamma_1(f, f) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t}\left(P_t f^2 - (P_t f)^2\right) \geq 0$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cet opérateur jouera un rôle important par la suite.

Exemple 2.2 *Soit Λ un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^d$.*

• *Si $\Omega = (S^1)^\Lambda$ avec S^1 la sphère unité dans $\mathbb{R}^d$ et qu'on considère le générateur de la dynamique de Langevin*

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \Lambda} (\Delta_i - \nabla_i U . \nabla_i)$$

pour une fonction $U \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors

$$\Gamma_1(f,f) = \sum_{i\in\Lambda} (\nabla_i f)^2.$$

- *Si $\Omega = \{-1,+1\}^\Lambda$ et qu'on considère le générateur de la dynamique de Glauber*

$$\mathcal{L} = \sum_{i\in\Lambda} c_i \partial_i$$

pour des fonctions $c_i \geq 0$, alors

$$\Gamma_1(f,f) = \sum_{i\in\Lambda} c_i (\partial_i f)^2.$$

Exercice 2.3 *1)Soit (Ω,Σ,μ) un espace de probabilité. Soit $\mathcal{L}$ le générateur de domaine $L^1(\mu)$ défini par $\mathcal{L}f = \mu f - f$. $\mu \in \mathcal{J}_0(\mathcal{L})$ satisfait une inégalité de trou spectral avec $m = 1$.*

2) Si $\Omega = \{-1,+1\}$ et $\mu = p\delta_{-1} + (1-p)\delta_{+1}$ avec $p \in (0,1)$, on définit le générateur $\mathcal{L}$ sur l'ensemble des fonctions mesurables par $\mathcal{L}f = c(\sigma)(f(-\sigma) - f(\sigma))$ pour une fonction positive ou nulle c. Choisir c afin que $\mu \in \mathcal{J}_0(\mathcal{L})$ et montrer alors que μ satisfait une inégalité de trou spectral $p(1-p)$.

La propriété de trou spectral est équivalente à celle d'ergodicité L^2 des semi-groupes

Propriété 2.4 *$\mu \in \mathcal{J}_0(P_t)$ satisfait une inégalité de trou spectral m ssi pour tout $t \geq 0$ et toute fonction $f \in L^2(\mu)$*

$$\mu(P_t f - \mu f)^2 \leq e^{-2mt}\mu(f - \mu f)^2$$

Preuve :

Remarquons que si f est une fonction telle que $\int f d\mu = 0$, (2.0.1) appliqué à $f_t = P_t f$ qui est également centrée (puisque μ est invariante) donne

$$-\partial_t \mu(P_t f)^2 \geq 2m\mu(P_t f)^2$$

soit, comme $P_0 = I$,

$$\mu(P_t f)^2 \leq e^{-2mt}\mu(f^2). \tag{2.0.2}$$

Réciproquement, si $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ satisfait (2.0.2), alors $t \to e^{mt}\mu(P_t f - \mu f)^2$ est décroissante. D'où

$$\frac{d}{dt} e^{mt}\mu(P_t f - \mu f)^2 \leq 0.$$

Soit, en $t = 0$, l'inégalité de trou spectral.

◇

La notion de trou spectral s'étend aisément en dimension infinie. En effet, on a la propriété de produit

Théorème 2.5 *Soit $(\mu_i)_{i=1,2}$ deux probabilités sur $(\Omega_i,\Sigma_i)_{i=1,2}$ satisfaisant l'inégalité de trou spectral de coefficients $(m_i)_{i=1,2}$ pour des générateurs $(L_i)_{i=1,2}$. Soit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ muni de la tribu produit. Pour toute fonction f sur Ω, on note*

$$f_{1,\omega}(x) = f(x,\omega) \qquad f_{2,\omega}(x) = f(\omega,x)$$

et

$$\mathcal{L}_1 f(x_1,x_2) = L_1 f_{1,x_2}(x_1) \quad \mathcal{L}_2 f(x_1,x_2) = L_2 f_{2,x_1}(x_2).$$

Alors, si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ *et* $m = \min(m_1, m_2)$, *la loi produit* $(\mu_1 \otimes \mu_2)$ *satisfait*

$$m\mu_1 \otimes \mu_2 (f - \mu_1 \otimes \mu_2 f)^2 \quad \leq \quad \mu_1 \otimes \mu_2 (f(-\mathcal{L})f)) \tag{2.0.3}$$

pour toute fonction mesurable f *pour laquelle le terme de droite de* (2.0.3) *est fini.*

Preuve :

En intégrant par rapport à une seule variable

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (f - \mu_1 \otimes \mu_2 f)^2 = \mu_2 \left[\mu_1 (f - \mu_1 f)^2\right] + \mu_2 (\mu_1 f - \mu_1 \otimes \mu_2 f)^2$$

En appliquant l'inégalité de trou spectral, on déduit

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (f - \mu_1 \otimes \mu_2 f)^2 \leq m^{-1} \mu_1 \otimes \mu_2 \left(f(-\mathcal{L}_1)f + \mu_1 f(-\mathcal{L}_2)\mu_1 f\right).$$

Par ailleurs, $f \to \Gamma_1(f,f)$ est convexe comme on peut le constater par

$$\Gamma_1(f,f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{2t} P_t (f^2 - P_t f(x))^2 (x)$$

si bien que

$$\mu_2 \left(\mu_1 f(-\mathcal{L}_2)\mu_1 f\right) = \mu_2 \left(\Gamma_1^{\mathcal{L}_2}(\mu_1 f, \mu_1 f)\right) \leq \mu_1 \otimes \mu_2 \left(\Gamma_1^{\mathcal{L}_2}(f,f)\right)$$

ce qui achève la preuve.

◇

De même, la propriété de trou spectral est conservée quand on perturbe μ par une densité bornée

Propriété 2.6 *Soit* μ *une probabilité sur un espace* (Ω, Σ) *satisfaisant l'inégalité de trou spectral de coefficient* m *pour un générateur* $\mathcal{L}$. *Soit* U *une fonction mesurable bornée. Soit*

$$\nu = \frac{1}{Z} e^{-U} d\mu$$

où

$$Z = \int e^{-U} d\mu.$$

Alors ν *satisfait une inégalité de trou spectral pour le générateur* $\mathcal{L}$.

Preuve : Cette propriété est claire une fois que l'on remarque que, si $\mathrm{osc}(U) = \sup U - \inf U$, pour tout ensemble mesurable A

$$e^{-\mathrm{osc}(U)} \mu(A) \leq \nu(A) \leq e^{\mathrm{osc}(U)} \mu(A). \tag{2.0.4}$$

En effet, on obtient alors, en observant que pour toute constante C, $\nu(f - \nu f)^2 \leq \nu(f - C)^2$,

$$\begin{aligned} \nu(f - \nu f)^2 &\leq \nu(f - \mu f)^2 \\ &\leq e^{\mathrm{osc}(U)} \mu(f - \mu f)^2 \\ &\leq \frac{e^{\mathrm{osc}(U)}}{m} \mu\Gamma_1(f,f) \\ &\leq \frac{e^{2\mathrm{osc}(U)}}{m} \nu\Gamma_1(f,f) \end{aligned}$$

$\diamond$

En fait, cette propriété peut-être raffinée quand on considère des mesures de Gibbs en volume fini avec une interaction à courte portée. On a en effet (voir [79] ou [98])

Propriété 2.7 *Soit (Ω, Σ, μ) un espace de probabilité tel que μ satisfasse une inégalité de trou spectral m avec un carré du champ Γ_1. Soit $\Lambda = [-L, L] \times [-l, l]^{d-1}$ pour $(l, L) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $l \leq L$. Soit U une fonction continue bornée de Ω^2 dans $\mathbb{R}$. On notera $\omega \in \Omega^{|\partial\Lambda|}$ la condition aux bords. Soit*

$$H_\Lambda^\omega(x) = \sum_{i,j \in \Lambda, |i-j|=1} U(x_i, x_j) + \sum_{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c, |i-j|=1} U(x_i, \omega_j).$$

Soit

$$d\mu_\Lambda^\omega(x) = \frac{1}{Z_\Lambda^\omega} e^{-\beta H_\Lambda^\omega(x)} d\mu^{\otimes|\Lambda|}(x).$$

Alors, si $\bar{\Gamma}_1 = \sum_{i \in \Lambda} \Gamma_1^i$, il existe une constante c dépendant de U telle que pour toute fonction mesurable f

$$\mu_\Lambda^\omega (f - \mu_\Lambda^\omega f)^2 \leq |\Lambda| e^{c l^{d-1}} \mu_\Lambda^\omega(\bar{\Gamma}_1(f, f)).$$

Remarquons que la propriété précédente ne donnait que

$$\mu_\Lambda^\omega (f - \mu_\Lambda^\omega f)^2 \leq e^{c l^{d-1} L} \mu_\Lambda^\omega(\bar{\Gamma}_1(f, f)).$$

Cette propriété est donc nettement plus fine quand L est grand. Elle souligne déjà qu'en dimension 1, le trou spectral est borné inférieurement par l'inverse du volume de Λ. En fait, nous verrons plus loin qu'il reste d'ordre 1 (ce qui est lié à l' absence de transition de phase). Ce contrôle est optimal (modulo la multiplication par le volume de Λ) dans une telle généralité (voir la borne inférieure de Thomas [90] pour des températures très faibles).

Preuve :

Nous choisissons tout d'abord un ordre lexicographique dans Λ et notons $\{i_1, .., i_k, ...\}$ les points de Λ ainsi classés. Cet ordre est choisi de façon que l'ordonnée $(i_k^1)_{1 \leq k \leq |\Lambda|}$ croisse le plus lentement possible, c'est à dire qu'on remplit les faces de volume d'ordre l^{d-1} de Λ d'ordonnée i^1 les unes après les autres. On notera $I_k = \{i_1, .., i_k\}$.

On va procéder par interpolation successives : Notons tout d'abord que

$$\mu_\Lambda^\omega (f - \mu_\Lambda^\omega f)^2 = \frac{1}{2} \int \int \left(f(x_{i_1}, .., x_{i_{|\Lambda|}}) - f(\widetilde{x}_{i_1}, .., \widetilde{x}_{i_{|\Lambda|}}) \right)^2 d\mu_\Lambda^\omega(x) d\mu_\Lambda^\omega(\widetilde{x}).$$

En écrivant, avec $\Delta_p f(x, \widetilde{x}) \equiv f(x_{i_1}, ., x_{i_p}, \widetilde{x}_{i_{p+1}}., \widetilde{x}_{i_{|\Lambda|}}) - f(x_{i_1}, ., x_{i_{p+1}}, \widetilde{x}_{i_{p+2}}., \widetilde{x}_{i_{|\Lambda|}})$,

$$f(x_{i_1}, .., x_{i_{|\Lambda|}}) - f(\widetilde{x}_{i_1}, .., \widetilde{x}_{i_{|\Lambda|}}) = \sum_{p=0}^{|\Lambda|-1} \Delta_p f(x, \widetilde{x}),$$

on obtient par l'inégalité de Jensen

$$\mu_\Lambda^\omega (f - \mu_\Lambda^\omega f)^2 \leq |\Lambda| \sum_{p=0}^{|\Lambda|-1} (\mu_\Lambda^\omega)^{\otimes 2} \left(\Delta_p f(x, \widetilde{x}) \right)^2 \tag{2.0.5}$$

Dans chaque terme de droite, seule la variable située en i_{p+1} diffère. Remarquons aussi que les points de $J_p^+ = \{i_m, m \geq p + c_d l^{d-1}\}$ et de $J_l^- = \{i_m, m \leq p - c_d l^{d-1}\}$ sont à distance supérieure à 1

de i_{p+1} pour c_d bien choisie. Par conséquent, en bornant la densité de μ_Λ^ω uniformément sur les $\{x_{i_k}, |k-p| \leq c_d l^{d-1}\}$ on obtient, en notant $S_p = \{i_k \in \Lambda; |k-p| \leq c_d l^{d-1}\}$, pour toute fonction $F \geq 0$,

$$\mu_\Lambda^\omega F \leq e^{4c_d l^{d-1}||U||_\infty} \mu^0_{J_p^-} \otimes \mu_{S_p} \otimes \mu^0_{J_p^+} F$$

où on a posé $d\mu_{S_p}(x_i, i \in S_p) = d\mu^{\otimes |S_p|}(x_i, i \in S_p)$ et

$$d\mu^0_{J_p^\epsilon} = \frac{1}{Z_{J_p^\epsilon}} e^{-\beta H_{J_p^\epsilon}} d\mu^{\otimes |J_p^\epsilon|}$$

si, pour $\epsilon = +$ ou $-$,

$$H_{J_p^\epsilon} = \sum_{i,j \in J_p^\epsilon, |i-j|=1} U(x_i, x_j).$$

Par cette borne, il découle donc que

$$(\mu_\Lambda^\omega)^{\otimes 2} \left(\Delta_p f(x, \widetilde{x})\right)^2 \leq e^{4c_d l^{d-1}||U||_\infty} (\mu^0_{J_p^-} \otimes \mu_{S_p} \otimes \mu^0_{J_p^+})^{\otimes 2} \left(\Delta_p f(x, \widetilde{x})\right)^2. \tag{2.0.6}$$

En utilisant l'inégalité de trou spectral pour μ, on déduit,

$$(\mu_\Lambda^\omega)^{\otimes 2} \left(\Delta_p f(x, \widetilde{x})\right)^2 \leq \frac{1}{m} e^{4c_d l^{d-1}||U||_\infty} \mu^0_{J_p^-} \otimes \mu_{S_p} \otimes \mu^0_{J_p^+} \left(\Gamma_1^{p+1}(f,f)\right) \tag{2.0.7}$$

où Γ_1^{p+1} opère sur la i_{p+1}- ième variable. Afin de retrouver notre mesure initiale, nous réinsérons le potentiel entier et déduisons

$$(\mu_\Lambda^\omega)^{\otimes 2} \left(\Delta_p f(x, \widetilde{x})\right)^2 \leq \frac{e^{6c_d l^{d-1}||U||_\infty}}{m} \mu_\Lambda^\omega \left(\Gamma_1^{p+1}(f,f)\right) \tag{2.0.8}$$

On peut conclure grâce à (2.0.5) et (2.0.8) que

$$\mu_\Lambda^\omega (f - \mu_\Lambda^\omega f)^2 \leq \frac{|\Lambda|}{m} e^{6c_d l^{d-1}||U||_\infty} \sum_{l=0}^{|\Lambda|-1} \mu_\Lambda^\omega \left(\Gamma_1^{l+1}(f,f)\right). \tag{2.0.9}$$

◇

Exercice 2.8 *Généraliser au cas où la portée de l'interaction est finie, mais non nécessairement égale à un, et l'interaction non nécessairement homogène, c'est-à-dire quand le hamiltonien du système est décrit par*

$$H_\Lambda^\omega(x) = \sum_{X \in \mathcal{X} : X \cap \Lambda \neq \emptyset} U_X(x)$$

où $\mathcal{X}$ est une famille finie de sous ensembles de $\mathbb{Z}^d$ de diamètre inférieur ou égal à un entier naturel donné R et $(U_X)_{X \in \mathcal{X}}$ une famille de fonctions locales continues bornées telles que pour tout $X \in \mathcal{X}$, $U_X(x)$ ne dépend que de $(x_i, i \in X)$.

L'exercice suivant fournit un lien entre l'inégalité de trou spectral et le phénomène de concentration de la mesure.

Exercice 2.9 (Aida,Stroock([1])) *Si μ satisfait une inégalité de trou spectral m sur $\mathbb{R}^d$ et si Γ_1 satisfait la loi de Leibnitz*

$$\Gamma_1(f, gh) = \Gamma_1(f,g)h + \Gamma_1(f,h)g$$

Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$, pour t suffisamment faible tel que

$$\frac{t^2}{2m}||\Gamma_1(f,f)||_\infty \leq 1$$

on a

$$\mu e^{tf} \leq const.e^{\frac{t^2}{m}||\Gamma_1(f,f)||_\infty} e^{t\mu f}.$$

Indications : Ecrire

$$\mu(e^{tf}) = \mu(e^{\frac{tf}{2}}, e^{\frac{tf}{2}}) + \mu(e^{\frac{tf}{2}})^2.$$

Appliquer l'inégalité de trou spectral au premier terme et observer que, quand Γ_1 satisfait l'inégalité de Leibnitz,

$$\Gamma_1(e^{\frac{tf}{2}}, e^{\frac{tf}{2}}) = \frac{t^2}{4} e^{tf} \Gamma_1(f,f).$$

Procéder par récurrence.

Au cours de l'exercice suivant, nous proposons de démontrer quelques inégalités de trou spectral

Exercice 2.10 – $\Omega = \mathcal{S}^1$. *Pour toute fonction à valeurs réelles $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i2\pi nx}$, on définit*

$$Lf(x) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 a_n e^{i2\pi nx}$$

si la somme de droite est uniformément convergente. Soit λ la mesure de Lebesgue normalisée. Montrer que λ est réversible pour le semi-groupe associé à $\mathcal{L}$ et que l'inégalité de trou spectral est vérifiée avec $m \geq 1$.

– $\Omega = [0,a]$ *pour un réel positif a. Pour $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ telle que $f(a) = f(0) = 0$, on définit*

$$\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2}$$

Si μ est la mesure de Lebesgue renormalisée, alors l'inégalité de trou spectral est vérifiée avec $m \geq (1/a^2)$. Indications: utiliser la formule d'intégration par partie.

Pour plus de renseignements généraux au sujet des inégalités de trou spectral, le lecteur peut se reporter au livre [49] et aux références qu'il contient. Même si on cherche en général à obtenir des bornes inférieures pour le trou spectral, il peut être utile d'en connaître des bornes supérieures ; nous conseillons alors la lecture de [13]. Enfin, notons que nous nous intéresserons particuliérement aux inégalités de log-Sobolev dans le chapitre 5, inégalités qui impliquent des contrôles sur le trou spectral. Néanmoins, et dans tous les cas que nous considérerons, il est également possible de démontrer directement (et par des méthodes similaires) des bornes inférieures pour le trou spectral.

Pour obtenir un contrôle plus fort sur $P_t f$, nous avons besoin d'inégalités de contractivité. C'est le rôle joué par les inégalités de Sobolev.