Chapitre 3

Inégalités de Sobolev classiques et Ultracontractivité

Dans ce chapitre, nous étudions les inégalités de Sobolev classiques et leurs liens avec l'ergodicité uniforme des semi-groupes de Markov. Malheureusement, ces inégalités ne peuvent être vérifiées en dimension infinie (voir exercice 3.7). C'est une des raisons essentielles de l'attrait des inégalités de log-Sobolev qui s'étendent naturellement en dimension infinie.

Définition 3.1 *Une probabilité $\mu \in \mathcal{J}_0(P_t)$ satisfait l'inégalité de Sobolev classique ssi pour un $p \in]2, \infty[$ et deux constantes $(a, b) \in [0, \infty[^2$, on a*

$$||f||_p^2 \leq a\mu\Gamma_1(f,f) + b\mu f^2 \tag{3.0.1}$$

pour toute fonction f mesurable et telle que $\mu\Gamma_1(f,f)$ et $||f||_2$ sont finies, et, dans le cas où $b = 0$, telle que $\int f d\mu = 0$.

Exercice 3.2 – *Soit $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert convexe borné et μ la mesure de Lebesgue normalisée sur $\mathcal{O}$. Montrer que μ satisfait l'inégalité de Sobolev classique restreinte aux fonctions nulles sur la frontière de $\mathcal{O}$.*

Indication : Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour écrire $|f(x)| = \prod_{i=1}^d |\int_{x_0^i}^{x_i} \partial_i f(x_{i^c} \circ y_i) dy_i|^{\frac{1}{d}}$ pour toute fonction f nulle en dehors de $\mathcal{O}$ et tout point $(x_0^i, 1 \leq i \leq d)$ dont chaque coordonnée est à l'exterieur de $\mathcal{O}$. En majorant la moyenne géométrique par la moyenne arithmétique et en choisissant astucieusement la fonction f, démontrer le résultat avec, quand $d > 2$, $p = (2d/d-1)$.

– *Montrer que, si μ satisfait l'inégalité de Sobolev classique, toute mesure $\nu \ll \mu$ telle qu' il existe $\lambda \in [1, \infty[$ pour lequel*

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{d\nu}{d\mu} \leq \lambda$$

satisfait également une inégalité de Sobolev classique.

Remarquons que quand nous considérons une mesure de probabilité μ sur tout $\mathbb{R}$, il a été montré dans [75] que si μ a une queue du type $e^{-ax^{2+\epsilon}}$ pour a et ϵ strictement positifs, alors μ satisfait une inégalité de Sobolev classique. Ce résultat est faux quand $\epsilon = 0$ puisque le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{R}$ n'est pas ultracontractif (voir le théorème ci-dessous).

En notant

$$||f||_\infty = \sup\{\mu(fg), ||g||_1 = 1\},$$

nous allons montrer que

Théorème 3.3 *Si $\mu \in \mathcal{J}_0(P_t)$ satisfait l'inégalité de Sobolev classique, alors il existe un réel positif γ et une constante finie c tels que pour tout $f \in L^1(\mu)$*

$$||P_t f - \mu f||_\infty \leq c(\frac{a}{2et} + b)^\gamma ||f - \mu f||_1 \tag{3.0.2}$$

Si $b = 0$, pour tout $f \in L^1(\mu)$

$$||P_t f - \mu f||_\infty \leq c(\frac{a}{2et})^\gamma ||f - \mu f||_1 \tag{3.0.3}$$

et P_t est uniformément ergodique.

Par ailleurs, si μ satisfait l'inégalité de trou spectral et l'inégalité de Sobolev classique, il existe une constante finie c' telle que pour tout $f \in L^2(\mu)$

$$||P_t f - \mu f||_\infty \leq c' e^{-mt} ||f - \mu f||_2. \tag{3.0.4}$$

Soulignons que le contrôle obtenu ci-dessus n'est pas uniforme sur tout l'espace mais est de probabilité 1 pour μ. Néanmoins, si μ est supportée par un ensemble compact et est absolument continue par rapport à la mesure uniforme sur l'espace considéré, notre théorème implique l'uniforme ergodicité.

Les inégalités de Sobolev classiques sont liées à une propriété de contractivité des semi-groupes. Rappelons tout d'abord une notation courante

Définition 3.4 *Pour $(p,q) \in [1,\infty[^2$,*

$$||P_t||_{q,p} = \sup\{||P_t f||_p : f \in \mathcal{C}(\Omega), ||f||_q = 1\}$$

où μ est sous-entendue dans la notation $||f||_q = \left(\int f^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$. Cette définition s'étend à $p = \infty$.

Avec cette définition, le premier point du théorème est équivalent à

Propriété 3.5 *Sous les hypothèses du théorème 3.3, il existe une constante positive γ et une constante finie c telles que*

$$||P_t||_{1,\infty} \leq c(\frac{a}{2et} + b)^\gamma$$

Cette propriété est elle même équivalente à

Lemme 3.6 *Sous les hypothèses du théorème 3.3, il existe une constante positive $\widetilde{\gamma}$ et une constante finie $\widetilde{c}$ telle que*

$$||P_t||_{1,2} \leq \widetilde{c}(\frac{a}{4et} + b)^{\widetilde{\gamma}}$$

En effet, il est clair que la propriété 3.5 implique

$$||P_t||_{1,2} \leq ||P_t||_{1,\infty} \leq c(\frac{a}{2et} + b)^\gamma$$

si bien que le lemme est vérifié. Réciproquement, la propriété de semi-groupe implique que

$$||P_t||_{1,\infty} \leq ||P_{\frac{t}{2}}||_{1,2} ||P_{\frac{t}{2}}||_{2,\infty}. \tag{3.0.5}$$

Mais, par dualité,

$$\begin{aligned} ||P_{\frac{t}{2}}||_{2,\infty} &= \sup\{\mu(f_{\frac{t}{2}}g), ||f||_2 = 1, ||g||_1 = 1\} \\ &= \sup\{\mu(g_{\frac{t}{2}}f), ||f||_2 = 1, ||g||_1 = 1\} \\ &= ||P_{\frac{t}{2}}||_{1,2} \end{aligned}$$

ce qui donne avec (3.0.5) l'implication inverse.

Preuve du Lemme 3.6 [98]

Pour prouver le lemme, remarquons tout d'abord que l'inégalité de Sobolev classique implique l'inégalité de Nash classique suivante

$$||f||_2 \leq (a\mu\Gamma_1(f,f) + b\mu f^2)^{\frac{\alpha}{2}} ||f||_1^{\beta} \tag{3.0.6}$$

avec $\alpha = \frac{1}{2}\frac{p}{p-1}$ et $\beta = 1-\alpha$. Cette inégalité découle immédiatement de l'inégalité de Hölder

$$||f||_2 \leq ||f||_1^{\frac{1}{2v}} ||f||_{v+1}^{\frac{v+1}{2v}}$$

pour tout couple (u,v) d'exposants conjugués, en prenant $v+1 = p$. Utilisons (3.0.6) avec f_t ;

$$||f_t||_2 \leq (a\mu\Gamma_1(f_t,f_t) + b\mu f^2)^{\frac{\alpha}{2}} ||f_t||_1^{\beta} \tag{3.0.7}$$

Pour estimer $\Gamma_1(f_t,f_t)$, remarquons tout d'abord que le théorème spectral nous permet d'écrire

$$P_t = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} d\mathbf{E}_\lambda^\mu$$

où $\{\mathbf{E}_\lambda^\mu, \lambda \geq 0\}$ est la résolution de l'identité associée à l'opérateur $\mathcal{L}$ dans $L^2(\mu)$ (voir Bourbaki, théorie spectrale ou les ouvrages de Reed-Simon). Avec ces notations,

$$\begin{aligned} \mu\Gamma_1(f_t,f_t) &= -\mu(P_t f \mathcal{L} P_t f) \\ &= \int \lambda e^{-2\lambda t} d(\mathbf{E}_\lambda^\mu f, f)_{L^2(\mu)}. \end{aligned}$$

En observant que pour tout réel u

$$ue^{-2u} \leq \frac{1}{2e}$$

on déduit

$$\mu\Gamma_1(f_t,f_t) \leq \frac{1}{2et}\int d(\mathbf{E}_\lambda^\mu f, f)_{L^2(\mu)} = \frac{1}{2et}\mu(f^2). \tag{3.0.8}$$

En intégrant ce résultat à (3.0.7) et en notant que $\mu|P_t f|^q \leq \mu|f|^q$ pour $q \geq 1$, nous déduisons, pour tout $t \geq 0$,

$$||f_t||_2 \leq (\frac{a}{2et} + b)^{\frac{\alpha}{2}} ||f||_2^{\alpha} ||f||_1^{\beta} \tag{3.0.9}$$

En prenant $t_0 = (t/2)$ et en procédant par récurrence, on obtient

$$||f_t||_2 \leq \prod_{n=1}^{\infty} (\frac{a}{2e\frac{t}{2^n}} + b)^{\frac{\alpha^n}{2}} ||f||_1^{\beta \sum_{n\geq 0} \alpha^n}. \tag{3.0.10}$$

Puisque

$$(\frac{a}{2e\frac{t}{2^n}}+b) \leq 2^n(\frac{a}{2et}+b)$$

on déduit

$$||f_t||_2^2 \leq 2^{\sum_{n\geq 1} n\alpha^n}(\frac{a}{2et}+b)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}||f||_1^{\frac{2\beta}{1-\alpha}} \tag{3.0.11}$$

soit le lemme.

◇

Pour finir la preuve du théorème 3.3 il suffit de remarquer que, si l'inégalité de trou spectral est vérifiée, on a

$$||P_t f - \mu f||_\infty \leq ||P_1||_{2,\infty}||P_{t-1}f - \mu f||_2 \leq ce^{-mt}||f-\mu f||_2.$$

◇

Malheureusement, l'inégalité de Sobolev classique n'est pas satisfaite en dimension infinie dans le sens où elle ne satisfait pas de propriété produit comme l'inégalité de trou spectral.

Exercice 3.7 *Soit $P_t = e^{t\mathcal{L}}$ un semi-groupe de Markov sur $\mathcal{C}(\Omega)$. Soit $\mu \in \mathcal{J}_0(P_t)$ satisfaisant l'inégalité de Sobolev*

$$\mu(f^p)^{\frac{2}{p}} \leq a\mu\Gamma_1(f,f) + b\mu f^2.$$

Pour tout entier n, on définit un semi-groupe $P_t^n = e^{t\mathcal{L}^n}$ où

$$\mathcal{L}^n = \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_i$$

si $\mathcal{L}_i$ agit sur la i-ième variable.

$$\Gamma_1^n(f,f) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(\mathcal{L}_i f^2 - 2f\mathcal{L}_i f) = \sum_{i=1}^n \Gamma_{1,i}(f,f)$$

Montrer que pour n suffisamment grand, on ne peut avoir

$$\mu^{\otimes n}(f^p)^{\frac{2}{p}} \leq a\mu^{\otimes n}\Gamma_1^n(f,f) + b\mu^{\otimes n}f^2$$

pour toute fonction f telle que le terme de droite soit fini.

Indication: Raisonner par l'absurde et choisir, pour une fonction $g \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$,

$$f(\omega) = \prod_{i=1}^n g(\omega_i).$$

Nous avons vu que si $\mu \in \mathcal{J}_0(P_t)$ satisfait l'inégalité de Sobolev classique, alors P_t est *ultracontractif*, i.e pour t suffisamment grand

$$||P_t||_{2,\infty} < \infty.$$

C'est cette propriété qui a été essentielle pour obtenir l'ergodicité uniforme. En fait, cette propriété peut-être obtenue directement dans le cas où l'espace d'état est une variété riemanienne lisse, compacte et connexe, comme l'illustre l'exercice suivant

Exercice 3.8 *Soit $\mathcal{S}^1$ la sphère dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\Lambda \subset\subset \mathbb{Z}^d$ et U_Λ une fonction $\mathcal{C}^2$ bornée sur $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1$. Soit*

$$H_\Lambda(x) = \sum_{i,j\in\Lambda, |i-j|=1} U_\Lambda(x_i, x_j).$$

On considère le semi-groupe associé à

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \Lambda} (\Delta_i - \nabla_i H_\Lambda(x).\nabla_i)$$

où $\Delta_i = (1/2)\frac{d^2}{dx_i^2}$ *et* $\nabla_i = \frac{d}{dx_i}$ *sur* $\mathcal{S}^1$ *pour* $i \in \Lambda$.
Montrer par la formule de Girsanov (voir théorème 5.1 dans [55]) qu'il existe une constante c finie dépendant uniquement de U_Λ *telle que, pour toute fonction* $f \geq 0$,

$$P_t f \leq e^{ct|\Lambda|} \int f(y) \prod_{i \in \Lambda} p_t(x_i, dy_i).$$

Ici, p_t *est le semi-groupe associé au laplacien sur la sphère. Montrer qu'il existe, pour tout* $t \geq 0$, *une constante finie* c_t *telle*

$$\sup_{x_i} p_t(x_i, dy_i) \leq c_t \lambda(dy_i)$$

où λ *est la mesure uniforme sur la sphère. Conclure qu'il existe une constante finie* c' *telle que*

$$||P_t||_{1,\infty} \leq (c_t)^{|\Lambda|} e^{c't|\Lambda|}.$$

Finalement, remarquons que l'inégalité de Nash est équivalente au contrôle que nous avons obtenu pour $||P_t||_{1,2}$. En effet on a

Exercice 3.9 *Soit* $\mu \in \mathcal{J}_0(P_t)$ *et supposons qu'il existe* $\gamma, a, b > 0$ *telles que*

$$||P_t||_{1,2} \leq (\frac{a}{2et} + b)^\gamma$$

Alors, il existe $A, B > 0$ *telles que*

$$||f||_2 \leq (A\mu\Gamma_1(f,f) + B\mu f^2)^{\frac{1}{2}\alpha} ||f||_1^\beta$$

avec $\alpha = \gamma(\gamma+1)$ *et* $\beta = 1 - \alpha$.
Indications : Remarquer que pour tout $t \geq 0$,

$$||f_t||_2^2 \geq ||f||_2^2 - 2t\mu\Gamma_1(f,f)$$

et déduire de l'hypothèse

$$||f||_2^2 \leq 2t\mu\Gamma_1(f,f) + (\frac{a}{2et} + b)^{2\gamma} ||f||_1^2$$

Conclure en optimisant sur le temps $t \geq 0$.

Dans le cadre de chaînes de Markov finies, Diaconis et Saloff-Coste [20] ont démontré simplement des inégalités de Nash. Dans [7] des inégalités de log-Nash et de Nash généralisées ont été introduites.