Introduction

Durant la dernière décennie, l'analyse des propriétés d'ergodicité de systèmes dynamiques en dimension éventuellement infinie a considérablement progressé. Ce développement est intimement lié à l'étude d'inégalités de coercivités. Le propos de ces notes est d'introduire le lecteur à ce sujet en plein essor en lui fournissant un exposé relativement complet et autonome.

Nous pouvons brièvement résumer notre problématique comme suit ; étant donné un semi-groupe de Markov $P_t \equiv e^{t\mathcal{L}}$, $t > 0$, défini sur un espace $\mathcal{C}(\Omega)$ de fonctions continues à valeurs réelles sur un espace polonais Ω, on peut se poser les deux questions suivantes ;

(I) Existe-t-il une mesure invariante pour P_t, c'est-à-dire une probabilité μ sur Ω telle que pour tout $f \in \mathcal{C}(\Omega)$

$$\mu(P_t f) = \mu(f)$$

(II) Si oui, est-ce que $P_t f$ converge vers μ et dans quel sens sens? Plus précisément, pouvons nous trouver une norme $||\cdot||$ sur $\mathcal{C}(\Omega)$ telle

$$||P_t f - \mu f|| \leq \gamma(t)|||f|||$$

avec une semi-norme $|||\cdot|||$ sur $\mathcal{C}(\Omega)$ et un taux $\gamma(t) \to_{t\to\infty} 0$ indépendant de f. En général, $||\cdot||$ est soit la norme uniforme, soit la norme de $L^p(\mu)$ pour un $p \geq 1$.

Fréquemment, on peut trouver une mesure μ (ou une classe de mesures) qui soit invariante pour P_t, et la question (II) devient alors primordiale.

En mécanique statistique, l'espace d'états Ω à considérer est souvent un produit infini $\Omega \equiv \mathbf{M}^{\mathbb{Z}^d}$ pour $\mathbf{M}$ un ensemble fini ou une variété riemanienne lisse de dimension finie. Dans ce contexte, on se donne à priori une famille d'espérances conditionnelles E_X indexée par les sous ensembles finis X de $\mathbb{Z}^d$, E_X impliquant l'intégration par rapport aux variables indexées par $(i \in X)$. Sous certaines hypothèses, on peut montrer l'existence d'une probabilité μ sur Ω, appelée mesure de Gibbs, caractérisée par la condition de Dobrushin-Lanford-Ruelle suivante

$$\mu(E_X f) = \mu(f) \tag{0.0.1}$$

pour tout sous ensemble fini X de $\mathbb{Z}^d$. Une classe de générateurs de sauts donnés formellement par

$$\mathcal{L}^{(X)} f \equiv \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (E_{X+j} f - f),$$

où $X + j$ est le translaté par le vecteur j de l'ensemble X fini de $\mathbb{Z}^d$, ont été étudiés dans [23], [45], and [89] (voir aussi [59] et les références de ce livre). Les semi-groupes $P_t^{(X)} = e^{t\mathcal{L}^{(X)}}$ associés laissent la mesure μ invariante. Cependant, il n'est pas clair a priori que les solutions de (0.0.1) soient les seules mesures invariantes de $P^{(X)}$. Dans [23], [45] et [59], on peut trouver des conditions suffisantes pour que $P^{(X)}$ soit uniformément ergodique, et donc d'unique mesure invariante. Dans ce cadre, on se donne souvent des familles d'espérances conditionnelles $E_{X,\beta}$, $X \subset \mathbf{Z}^d$, indexées par des paramètres réels $\beta \equiv (\beta_1, ..., \beta_n)$. Quand β varie, les solutions de (0.0.1) changent, ainsi que leurs propriétés. Dans [22] et plus tard dans [18] des conditions constructives ont été données pour assurer l'unicité des solutions de (0.0.1) en termes des noyaux $E_{\{j\},\beta}$ et $E_{Y,\beta}$ associés à des singletons et des cubes de taille finie fixée. Ces conditions sont connues sous les noms de conditions d'unicité de Dobrushin et Dobrushin-Shlosman. En général, la seconde est valide pour un domaine de valeurs de β plus large car elle implique en principe des conditions de mélange plus faibles pour les mesures E_Λ, $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^d$.

La condition de Dobrushin-Shlosman a été utilisée par Aizenman et Holley dans [2] où il est montré qu'une dynamique de sauts construite à partir des espérances conditionnelles $E_{Y+j,\beta}$ pour des cubes suffisament grands qui satisfont cette condition est ergodique pour la norme uniforme avec un taux décroissant exponentiellement vite vers zéro. Naturellement, ce résultat implique l'existence d'un trou spectral pour le spectre de l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}$ dans $L^2(\mu)$, générateur infinitésimal de cette dynamique. En particulier, le semi-groupe est ergodique dans $L^2(\mu)$. De plus, comme les formes quadratiques associées aux générateurs $\mathcal{L}^{(X)}$ construits avec d'autres ensembles finis X de $\mathbb{Z}^d$ sont équivalentes à celle de $\mathcal{L}^{(Y)}$ considéré ci-dessus, toutes les dynamiques correspondant à ces générateurs sont ergodiques dans $L^2(\mu)$.

Malheureusement, dans de nombreuses situations dîtes proches du point critique, la taille des cubes pour laquelle la condition de Dobrushin-Shlosman est vérifiée diverge. En particulier, la stratégie de Aizenman-Holley ne peut être utilisée pour aucune des dynamiques générée par $\mathcal{L}^{(X)}$ dans un domaine non vide des paramètres β dans lequel on sait pourtant qu'il y a une unique mesure de Gibbs. Elle peut néanmoins être étendue dans des cas particuliers tels que les systèmes dits ferromagnétiques où les espérances conditionnelles préservent les propriétés de monotonicité (voir [67]).

Pour contourner ces difficultés, une nouvelle stratégie basée sur l'utilisation de la propriété d'hypercontractivité a été introduite dans [53] et [54]. L' idée est de tout d'abord approcher le semi-groupe par un semi-groupe en dimension finie, puis, en dimension finie, de passer de la norme uniforme à la norme L^2 par une propriété d'ultracontractivité réalisée en une unité de temps tout en arrivant à contrôler la perte résultant de cette dernière opération grâce à la propriété d'hypercontractivité.

En effet, la propriété d'hypercontractivité permet de majorer la norme $L^p(\mu)$ de $P_t f$ par la norme $L^q(\mu)$ de f pour $p = p(t) = 1 + (q-1)e^{\frac{2}{c}t}$ et une constante $c > 0$. Elle est donc inhabituelle puisque p peut-être, pour des temps grands, bien plus grand que q. Elle a été introduite dans la théorie des champs (cf [80] et [42]). La propriété d'hypercontractivité a pour version infinitésimale les inégalités de log-Sobolev

$$\mu f^2 \log |f| \leq c\mu(f(-\mathcal{L}f)) + \mu f^2 \log ||f||_{\mathbf{L}_2(\mu)} \tag{0.0.2}$$

avec une constante $c \in (0, \infty)$ indépendante de la fonction f du domaine de $\mathcal{L}$. L'équivalence de la propriété d'hypercontractivité et de (0.0.2) a été donnée dans [46], bien que formellement (0.0.2) ait déjà été considérée dans [34].

Cette approche permettait déjà de traiter le cas de nombreux systèmes en dimension infinie. L'article initial de [46] avait démontré des inégalités de log-Sobolev pour des classes de mesures gaussiennes et de quelques mesures produits vivant sur un espace fini. La première percée qui a permis d'étendre cette classe est due à Bakry et Emery qui introduisirent dans [6] une excellente condition suffisante pour avoir une inégalité de log-Sobolev. Cette condition, formulée dans le contexte d'une variété $\mathbf{M}$ riemanienne lisse, connexe, compacte et de dimension finie ne nécessite essentiellement que la stricte positivité de la courbure de Ricci. Une application immédiate de ce résultat dans [9] a permis de démontrer l'inégalité de log-Sobolev pour une classe importante de mesures de Gibbs sur la sphère en dimension N, $N \geq 2$, à hautes températures, fournissant ainsi les premiers exemples non triviaux de probabilités ni produits ni gaussiennes sur un espace de dimension infinie pour lesquelles (0.0.2) est vérifiée.

Par la suite, une idée supplémentaire basée sur l'utilisation de la structure particulière des mesures de Gibbs a été introduite afin d'inclure des variétés riemaniennes de courbure éventuellement négative ainsi que des espaces d'états discrets. En particulier, dans [95] et [96], l'inégalité de log-Sobolev a été démontrée pour des systèmes en interaction à courte portée sur $(S^1)^{\mathbf{Z}^d}$ à hautes températures et $\{-1,+1\}^{\mathbf{Z}}$ à toutes températures. Une extension de ces résultats comprenant les modèles à interaction à longue portée (du même type que ceux traités dans la théorie d'unicité de Dobrushin) pour des systèmes sur des variétés riemaniennes à hautes températures a été publiée dans [97].

Ces résultats furent étendus par la suite aux systèmes sur des réseaux de dimension plus grande et des espaces d'états plus généraux dans [85]. Il fut non seulement prouvé que le semi-groupe de Markov est uniformément ergodique mais aussi que la propriété de mélange fort est équivalente à la propriété de log-Sobolev.

Depuis, une littérature fournie s'est développée à ce sujet , voir [67], [61], [56], [47] - [48], [10] - [11], [66], ..., [87] - [88], [91], [92] - [93], [92], [3], [4], ... , [99] -[101] ... Etant donné le temps et l'espace restreints que nous nous étions impartis pour présenter ce domaine, nous ne pourrons pas en développer de nombreux développements intéressants, tels que l'extension à des variétés $\mathbf{M}$ non compactes (voir [101] ainsi que des travaux plus récents de N. Yoshida et B. Helffer et T. Bodineau), l'obtemption et l'utilisation d'autres inégalités de coercivités (telles que les inégalités de Nash généralisées (voir [7])), les liens avec les propriétés d'isoperimétrie, les asymptotiques des inégalités de Sobolev classique, les extensions aux espaces de lacets (voir [30]...), aux espaces non-commutatifs [70].....

L'organisation et le contenu de ces notes sont les suivants.

Nous commençons par introduire les objets que nous étudierons ; les semi-groupes de Markov, ainsi que leur construction infinitésimale par les générateurs, les mesures invariantes et les mesures réversibles.

Le second chapitre décrit l'ergodicité L^2 et la plus simple des inégalités de coercivité ; l'inégalité de trou spectral. Aux côtés de considérations d'ordre général, nous montrons la stabilité de ce concept par perturbation, c'est-à-dire en changeant la mesure par une densité bornée, ainsi que par produit, c'est-à-dire en considérant le produit tensoriel de deux probabilités.

Au cours du chapitre 3, nous considèrons l'inégalité de Sobolev classique et ses conséquences ; la propriété d'ultracontractivité et l'inégalité de Nash classique.

Au chapitre 4, nous étudions les propriétés générales de l'inégalité de log-Sobolev incluant la propriété produit, la stabilité par perturbation, l'équivalence avec la propriété d'hypercontractivité et ses implications telles que le trou spectral. Nous présentons également le critère de Bakry-Emery ainsi que ses formes équivalentes en termes de semi-groupes. Nous donnons enfin un exemple de système en dimension infinie décrit par des espérances conditionnelles locales et discutons ses propriétés de log-Sobolev.

Notre voyage en mécanique statistique commence au chapitre 5. Le lecteur cherchant uniquement à savoir comment démontrer les inégalités de log-Sobolev dans un cadre infini-dimensionnel peut directement se rendre à ce chapitre. Nous commençons par introduire le contexte des systèmes de spins sur un réseau. Puis, nous proposons différentes stratégies pour démontrer des inégalités de log-Sobolev. Les sections 5.2-5.4 développent la stratégie basée sur l'étude d'une chaîne de Markov auxiliaire construite comme la convolution d'espérances conditionnelles sur des cubes de taille fixée pour des potentiels de portée finie. En section 5.2, nous nous restreindrons au cas uni-dimensionnel, puis, en sections 5.3 et 5.4, considérerons les dimensions plus hautes. Sous une condition forte de mélange, cette chaîne de Markov va converger vers la mesure de Gibbs correspondante, l'inégalité de log-Sobolev pour cette mesure de Gibbs apparaissant alors comme, dans un certain sens, une conséquence de la propriété produit. Dans les sections 5.2 et 5.4 , nous démontrons un élément central de cette preuve appelé relations de balayage. Aussi, notre méthode est constructive car nous considérerons toujours des espérances conditionnelles en volume fini. Nous proposons un formalisme qui englobe à la fois les cas où $\mathbf{M}$ est un ensemble discret fini ou une variété riemanienne lisse compacte connexe de dimension finie. Ce formalisme s'étend aisément au cas où la mesure μ n'est pas donnée à priori mais est obtenue comme loi stationnaire d'un automate cellulaire. Dans un tel cadre, on ne sait en général ni si la mesure μ est une mesure de Gibbs pour un potentiel de Gibbs ni si la matrice de transition de l'automate cellulaire est symétrique pour μ. Une autre voie pour démontrer l'inégalité de log-Sobolev consiste à effectuer un développement en martingales

en considérant non plus des chaînes de Markov construites comme des convolutions d'espérances conditionnelles mais par des espérances conditionnelles sur une suite croissante d'ensembles finis du réseau. Nous illustrons cette idée (due originellement à [61]) dans la section 5.6 afin d'étudier des systèmes dont la portée n'est pas finie (bien que la force de l'interaction décroisse suffisament rapidement pour que le potentiel satisfasse la condition d'unicité de Dobrushin). De nouveau, l'obtention de relations de balayage est fondamentale dans cette stratégie.

Avant de déduire du chapitre 5 des propriétés d'ergodicité pour les semi-groupes de Markov en volume infini au chapitre 7, nous proposons au chapitre 6 une construction simple de ces semi-groupes qui fournit une propriété d'approximation exponentielle.

Au chapitre 8, nous décrivons le théorème d'équivalence (voir [86]) qui établit l'équivalence entre des propriétés de la mesure de Gibbs telles que la condition de mélange fort, l'analyticité uniforme et d'autres conditions dues à Dobrushin-Shlosman et des propriétés de la dynamique équivalentes aux inégalités de log-Sobolev et de trou spectral.

Au cours du chapitre 9, nous abordons les systèmes en interaction aléatoires et appliquons les idées des chapitres 5-7 pour étudier les propriétés d'ergodicité de leurs dynamiques à hautes températures.

Finalement, nous décrivons au chapitre 10 quelques éléments de réponse concernant l'ergodicité L^2 des semi-groupes de Markov à basses températures où la condition de mélange fort n'est plus vérifiée.

Nous proposons enfin une bibliographie de références de base très partielle.

Ces notes de cours sont le fruit de réflexions successives pour comprendre et organiser les diverses évolutions qu'on connut le sujet. Une partie de ce cours avait déjà été donnée par B. Zegarlinski à Bochum en 1992, qui souhaite à cette occasion remercier tout spécialement S. Albeverio pour lui avoir permis de passer une longue, heureuse et productive période à Ruhr. Nous avons également eu l'occasion à deux reprises de faire avancer notre réflexion à l'Institut Henri Poincaré à Paris où nous avons eu le plaisir de participer à deux semestres de recherches et d'y donner des cours. Le second cours que nous y avons donné conjointement a donné naissance à ces notes en français. Nous remercions donc particulièrement les organisateurs de ces deux sessions ainsi que l'équipe de l'Institut Henri Poincaré. B. Zegarlinski souhaite également remercier D. Stroock pour leur longue et fructueuse collaboration. Enfin, notre collaboration a été rendue possible grâce au soutien de European Stochastic Analysis Network et EPSRC.