Л.П. Шильников

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ

Нижний Новгород
2017

Л.П. Шильников

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ

ННГУ им. Н.И. Лобачевского

Нижний Новгород – 2017

Содержание

Предисловие 5
Введение 9

Глава 1. Бифуркации петель сепаратрис в многомерных системах 27
Шильников Л.П., Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве (ДАН СССР, 1962) 34
Шильников Л.П., О рождении периодических движений в n-мерном пространстве (Мат. сборник, 1963) 38
Шильников Л.П., О рождении периодических движений из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же. (ДАН СССР, 1966) 60
Шильников Л.П., О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло (Мат.сборник, 1968) 65
Баутин Н.Н., Шильников Л.П., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений (“опасные” и “безопасные” границы).- Дополнение I к кн. Дж.Марсден, М.Мак-Кракен “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980 77
Шильников Л.П., Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем (ДАН СССР, 1969) 95

Глава 2.Гомоклиническая петля седло-фокуса и математическая теория спирального хаоса 99
Шильников Л.П., Об одном случае существования счетного множества периодических движений (ДАН СССР, 1965) 106
Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса (ДАН СССР, 1967) 111
Шильников Л.П., К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус (Мат. сборник, 1970) 116
Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность – I (Методы КТДУ, Горький, 1986) 128
Беляков Л.А., Шильников Л.П., Гомоклинические кривые и сложные стационарные волны (Методы КТДУ, Горький, 1985) 136
Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О бифуркациях состояний равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы (Методы КТДУ, Горький, 1984) 144

Глава 3. Гомоклинический хаос 151
Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой (ДАН СССР, 1967) 163
Шильников Л.П., Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа (Мат. сборник, 1967) 168
Шильников Л.П., К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора (ДАН СССР, 1968) 186
Шильников Л.П., О структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора (рукопись) 192
Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, ч. 1 (Мат. сборник, 1972) 213
Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, ч. 2 (Мат. сборник, 1973) 230
Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре (Труды 7 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, 1977) 247

Глава 4. Математическая теория синхронизации и хаос 261
Афраймович В.С., Шильников Л.П., О малых периодических возмущениях автономных систем. ДАН СССР, 1974, т.214(4) 252
Афраймович В.С., Шильников Л.П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел (ДАН СССР, 1974) 276
Афраймович В.С., Шильников Л.П., Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем (ПММ, 1977) 281
Лукьянов В.И., Шильников Л.П., О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами (ДАН СССР, 1978) 290
Афраймович В.С., Шильников Л.П., Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность (Методы КТДУ, Горький, 1983) 295
Афраймович В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях коразмерности один, приводящих к появлению счетного множества торов (ДАН СССР, 1982) 306
Морозов А.Д., Шильников Л.П., К математической теории синхронизации колебаний (ДАН СССР, 1975) 311

Глава 5. Аттрактор Лоренца 317
Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О возникновении и структуре аттрактора Лоренца (ДАН СССР, 1977) 328
Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца (Труды ММО, 1982) 333
Шильников Л.П., Теория бифуркаций и модель Лоренца (Доп. II к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980) 395
Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца (УМН, 1980) 410
Шильников Л.П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы. (УМН, 1981) 411

Научные труды Л.П. Шильникова 413

Леонид Павлович Шильников
(17.12.1934–26.12.2011)

Предисловие

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, столетие которого отмечалось в 2016 году, положил начало высшему образованию и академической науке в регионе и сохраняет свою ведущую роль в развитии российской науки и образования.

В 1945 году по решению руководства страны в университете был создан первый в стране радиофизический факультет для подготовки кадров по теоретическим и прикладным вопросам генерации и распространения радиоволн. Выпускники университета составили ядро исследовательских, проектных и производственных кадров, труд которых со временем превратил Нижний Новгород в столицу отечественной радиолокации. Город стал признанным в мире центром исследования волновых явлений в различных средах. На базе лабораторий университета сформировались уникальные физические институты Российской Академии Наук (Институт прикладной физики и Институт физики микроструктур).

В 1963 году по инициативе сотрудников университета, поддержанной органами власти, был открыт первый в стране факультет вычислительной математики и кибернетики. В тот период еще не было микропроцессоров, суперкомпьютеров, не было мощной машинной графики, но было понимание перспектив развития вычислительной техники и новой роли математического моделирования. В итоге университет стал признанным центром исследований и подготовки специалистов в области новых информационных технологий. Эта традиция опережения сохраняется и сегодня.

Университет систематически выпускает издания (серия “Нижегородское имя в науке” и др.) посвященные выдающимся ученым, яркая жизнь и дела которых составляют историю университета. Таким человеком был Леонид Павлович Шильников (1934-2011) – выдающийся российский математик, один из основоположников современной теории динамических систем. Настоящая книга – дань его памяти.

Наследие, оставленное трудами Л.П. Шильникова и плодотворно развиваю-

щееся его школой, важно для развития науки и сохранения научных традиций в Нижегородском университете. То, что начиналось, как некий небольшой раздел качественной теории дифференциальных уравнений, превратилось ныне в широкий поток исследований, ведущихся по всему миру, имеющий важные значения как для самой теории динамических систем, так и ее приложений. Развитие и поддержка этих исследований помогут новому поколению ученых в выборе научных направлений, интересных и перспективных путей научного творчества. Нижегородский университет всегда старался поддерживать перспективные направления, это будет сохраняться и в будущем.

Л.П. Шильниковым была создана теория глобальных бифуркаций многомерных систем, и был внесен фундаментальный вклад в становление современной теории динамического хаоса. Л. П. Шильников был ярким представителем плеяды таких выдающихся математиков 60-х годов как В.М. Алексеев, Д.В. Аносов, В.И. Арнольд, Ч.К. Конли, Ю. Мозер, Ж. Пэлис, Д. Рюэль, Я.Г. Синай, С. Смейл, Ф. Такенс, А.Н. Шарковский, которые совершили воистину революционный прорыв в области нелинейной динамики. К этому времени (60е – 70е годы) относятся первые работы Л.П. Шильникова по теории глобальных бифуркаций, которые уже давно стали классическими.

Собственно говоря, математическая теория нелинейных колебаний и современная теория динамических систем зародились именно в нашем университете еще в 30-х годах 20-го века. В то время в Горький из Москвы приехала группа молодых математиков и физиков под руководством А.А. Андронова. В короткое время в ГГУ была создана научная школа, известная сейчас во всем мире как школа Андронова. Это был блистательный синтез строгой математической науки и прикладных исследований, прежде всего в области нелинейной динамики. Фактически, многие современные достижения физики и математики в Нижнем Новгороде и, в частности, в Нижегородском университете, восходят к Андронову и его ученикам.

Л.П. Шильников не был прямым учеником А.А. Андронова, но он вырос в атмосфере школы, проникся ее идеями и развивал их дальше. Поэтому одним из его принципов был тот, что любое направление исследований, пусть даже самое абстрактное, должно в конце концов находить приложения. Шильников обладал исключительными качествами, необходимыми исследователю – научная смелость, порядочность, этика. Он делал науку по-своему, создавая новые направления и оригинальные методы. Сейчас в теории динамических систем хорошо известны такие понятия как “условия Шильникова”, “координаты Шильникова”, “краевая задача Шильникова”, “нормальная форма Шильнико-

ва”, “аттрактор Шильникова” и многие другие.

Леонид Павлович родился 17 декабря 1934 г. в г. Котельниче Кировской области. Окончив среднюю школу в 1952 г., он поступил на физико-математический факультет Горьковского государственного университета, который закончил в 1957 г. В 1957-1960 он был аспирантом Горьковского университета, а затем – научным сотрудником ГИФТИ. С 1963 г. основным местом работы Леонида Павловича был НИИ ПМК – Институт прикладной математики и кибернетики при Нижегородском университете, где он был последовательно старшим научным сотрудником, зав. лабораторией (с 1967 г.), и зав. отделом – с 1982 г. до конца жизни. Он преподавал в Нижегородском университете, читал как регулярные, так и специальные курсы. Студенты, живо интересующиеся наукой, высоко ценили его лекции и семинары.

Мемориальная доска Л.П. Шильникову на стене уч. корп. 6 университетского городка ННГУ

В 1962 году он защитил кандидатскую диссертацию на тему “Рождение периодических движений из особых траекторий” (научный руководитель - Ю.И. Неймарк), в которой обобщил на многомерный случай нелокальные бифуркации, открытые и исследованные для систем на плоскости А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович. Вскоре после этого Л.П. Шильников занялся только что зарождавшейся тогда теорией систем со сложной (хаотической) динамикой. Он практически сразу же обнаружил (1965), что такая динамика существует в окрестности гомоклинической петли седлофокуса. Шильников понял, что изучение гомоклинических бифуркаций дает ему уникальную возможность для исследования сложной динамики многомерных систем, и это стало центральной темой его научной деятельности.

Работы Л.П. Шильникова получили широкое признание в мировом научном сообществе. Подтверждением этого является также присуждение Л.П. Шильникову премии А. М. Ляпунова Российской академии наук (1998) и премии М.А. Лаврентьева Национальной академии наук Украины (2005). В 2001 г.

ему была присуждена премия фонда А. Гумбольдта. Л.П. Шильников был несомненным лидером нижегородской математической жизни, он был одним из инициаторов создания Нижегородского математического общества (1995) и его первым президентом. Л.П. Шильников был членом редакций нескольких международных математических журналов, в его честь был организован ряд международных конференций по динамическому хаосу. Две такие конференции, “Динамика, бифуркации и хаос” и “Shilnikov WorkShop” проводятся в нашем университете ежегодно, начиная с 2012 г.

7 ноября 2016 г. в Нижегородском университете была открыта мемориальная доска в честь Леонида Павловича Шильникова. На ее открытии присутствовали ученики и коллеги, семья Л.П. Шильникова, сотрудники и руководство университета. О вкладе Л.П. Шильникова в науку было сказано, в частности, следующее: “Ценность людей не определяется академическими званиями, не определяется даже степенями. Есть люди, которые определяют вектора развития. Сегодня мы вспоминаем такого человека...” (Е.В. Чупрунов) и “Л.П. Шильников, о котором мы сегодня говорим, сделал не просто много, он открыл направление математической мысли – возникли объекты, связанные с его именем, что бывает очень редко, и он получил международное признание. Он оставил много учеников, и я думаю что то, что он сделал, это большой задел для будущего – там много, много еще можно сделать...” (Р.Г. Стронгин).

За более чем полувековой период научной деятельности Л.П. Шильникова опубликовал около 200 работ, в том числе несколько монографий. В этой книге представлена только лишь малая их часть. Это прежде всего его классические работы по теории глобальных бифуркаций, относящиеся к 60-70м годам. Они опередили на много лет общий уровень мировых исследований и сохраняют актуальность по сей день. Во-вторых, это фундаментальные работы, в которых были заложены математические основы теории динамического хаоса. Кроме этого, в книге содержатся некоторые труднодоступные работы Л.П. Шильникова, изданные в сборниках “Методы качественной теории и теории бифуркаций” Горьковского университета.

Е.В. Чупрунов,
Ректор ННГУ

Р.Г. Стронгин,
Президент ННГУ

Введение

В этой книге мы собрали вместе некоторые работы замечательного ученого, выдающегося специалиста по теории многомерных динамических систем Леонида Павловича Шильникова (1934-2011). Его математические работы оказали решающее влияние на развитие нелинейной динамики. Специалисты самых различных разделов точного естествознания активно используют его результаты и методы в своих исследованиях. Результаты, полученные Л.П. Шильниковым, давно уже стали классическими и вошли в учебники и монографии по теории динамических систем и теории бифуркаций.

Л.П. Шильников является основоположником теории глобальных бифуркаций многомерных систем. Основные бифуркации систем на плоскости были исследованы А.А. Андроновым и Е.А. Леонтович еще в 30-е годы двадцатого столетия, в том числе и бифуркации гомоклинических петель сепаратрис состояний равновесия, см. [1, 2]. В самом начале 60-х годов Шильников изучил многомерные аналоги этих нелокальных бифуркаций и нашел условия (коразмерности один), при которых из петли рождается только одна периодическая траектория [3]–[6]. Как он показал, при этих условиях бифуркации соответствующих многомерных систем похожи на то, что происходит в двумерном случае.

Однако вскоре после этого Шильниковым [7] было открыто совершенно неожиданное и принципиально новое явление, коренным образом изменившее представление о динамике многомерных систем. Он обнаружил, что наличие гомоклинической петли у состояния равновесия типа седло-фокус влечет, при выполнении определенных условий, которые сейчас называются условиями Шильникова, существование бесконечного множества периодических траекторий. При этом в любой окрестности гомоклинической петли лежит нетривиальное гиперболическое множество, что свидетельствует о хаотической динамике с весьма богатой структурой [7, 8, 9]. К настоящему времени открытый Л.П. Шильниковым в [7] спиральный хаос обнаружен во многих моделях, вне зависимости от их происхождения, будь то математика, физика или биоло-

гия. А вот тогда, в 1965 году, никто даже не подозревал, что такая простая на первый взгляд структура приводит к столь сложному поведению траекторий.[1] Для самого Шильникова это открытие стало определяющим моментом его научной жизни, и последующее десятилетие он фактически полностью посвятил исследованию основных гомоклинических структур, ответственных за различные типы хаотического поведения многомерных систем.

Сюда в первую очередь относятся важнейшие работы Л.П. Шильникова [10, 11], в которых им была решена задача Пуанкаре-Биркгофа о структуре множества траекторий, целиком лежащих в окрестности грубой (трансверсальной) гомоклинической траектории Пуанкаре. Шильников показал, что данное множество локально максимально, гиперболично и допускает полное описание в терминах топологической схемы Бернулли из двух символов. Шильников считал этот результат принципиально важным и не уставал подчеркивать, что существование грубой гомоклинической траектории Пуанкаре является универсальным критерием хаоса, см. обзор [12]. Для преодоления технических трудностей, возникающих при исследовании поведения нелинейной системы в окрестности седловых состояний равновесия и периодических траекторий, Шильников создает новую технику "краевой задачи",[2] которая потом была развита и использована им во многих других ситуациях.[3] Таким путем были изучены структура множества траекторий вблизи гомоклинической трубы инвариантного тора [15] и вблизи гомоклинических траекторий в бесконечномерных системах [16], а также вблизи аналога гомоклинической структуры в неавтономных системах [17]. Указанные работы намного опередили свое время. Так, еще в [15] Шильников писал, что гомоклинические трубы к инвариантным торам важны в задаче о диффузии Арнольда [18]. И действительно, в последние десятилетия конструкция Шильникова стала активно применяться в подобных задачах, см. [19]–[23].

В другой замечательной работе [24] было показано, что если у негрубого состояния равновесия типа седло-седло (в трехмерном случае оно имеет нулевой, положительный и отрицательный характеристические корни) существует несколько трансверсальных гомоклинических петель (это всегда условие коразмерности один, независимо от числа петель), то при исчезновении состоя-

[1] По словам самого Шильникова, когда он рассказал о своем открытии Е.А. Леонтович, ее первая реакция была: "Этого не может быть!..."

[2] Для нас, учеников Леонида Павловича, эта техника кажется весьма естественной и очень удобной при исследовании глобальных бифуркаций. Поэтому удивительно, но факт, что многие математики до сих пор используют в своих исследованиях подходы основанные на "линеаризации", что, естественно, обедняет полученные результаты.

[3] Подробно техника "краевой задачи" изложена в книге [14].

ния равновесия на месте букета гомоклинических петель возникает нетривиальное гиперболическое инвариантное множество. Это был исторически первый пример, в котором было дано описание перехода от систем с простой динамикой (систем Морса-Смейла) к системам с хаотическими поведением (с гомоклиническими кривыми Пуанкаре). По простоте конструкции, сценарий, предложенный в [24], превосходит все известные на сегодня. Здесь бесконечное множество неблуждающих (в том числе, периодических) траекторий возникает мгновенно, в результате одной бифуркации.[4] После этого результата Шильников начал систематическое исследование сценариев перехода к хаосу, и он был первым, кто поставил и начал исследовать такую задачу.

С начала 70-х годов вокруг Леонида Павловича стал образовываться научный коллектив учеников и единомышленников. В течение многих лет Шильников был заведующим лабораторией в руководимом Е.А. Леонтович-Андроновой отделе дифференциальных уравнений НИИ прикладной математики и кибернетики Горьковского университета, а с 1982 г. он стал заведующим этим отделом. В разное время учениками Леонида Павловича были Н.К. Гаврилов, В.С. Афраймович, Л.М. Лерман, А.Д. Морозов, Л.А. Беляков, В.В. Быков, А.Н. Баутин, В.И. Лукьянов, С.В. Гонченко, М.И. Малкин, Д.В. Тураев, М.В. Шашков, А.Л. Шильников, И.В. Белых, О.В. Стенькин, В.С. Гонченко, В.Ш. Ройтенберг, Н.В. Рощин, И.М. Овсянников, В.С. Бирагов, С.А. Алексеева, Ю.А. Комлев. Кроме них в отделе работали С.Х. Арансон, В.З. Гринес, А.А. Кириллов, В.С. Медведев, Я.Л. Уманский, Г.М. Полотовский, В.П. Тареев, Е.Л. Федоров, и др.

В работах шильниковской школы был, по существу, создан новый раздел теории многомерных динамических систем – теория глобальных бифуркаций. Один из важнейших вопросов этой теории связан с фундаментальной проблемой о сценариях перехода к хаосу, т.е. о том какие бифуркации ведут от систем с простой структурой к системам со сложным поведением траекторий. Были выделены два таких сценария: переход к хаосу через гомоклинические касания и через разрушение двумерных инвариантных торов, см. обзор [29].

Основные бифуркации гомоклинических касаний были изучены в работе Н.К. Гаврилова и Л.П. Шильникова [27]. В последствии эти исследования активно продолжались. Было получено много интересных результатов, а главным открытием, как считал сам Шильников, явилось то, что бифуркации систем с квадратичными касаниями приводят к появлению гомоклинических

[4]Такие явления впоследствии стали называться омега-взрывом, этой теме было посвящено немало работ Шильникова с соавторами, см., например, [25]–[28].

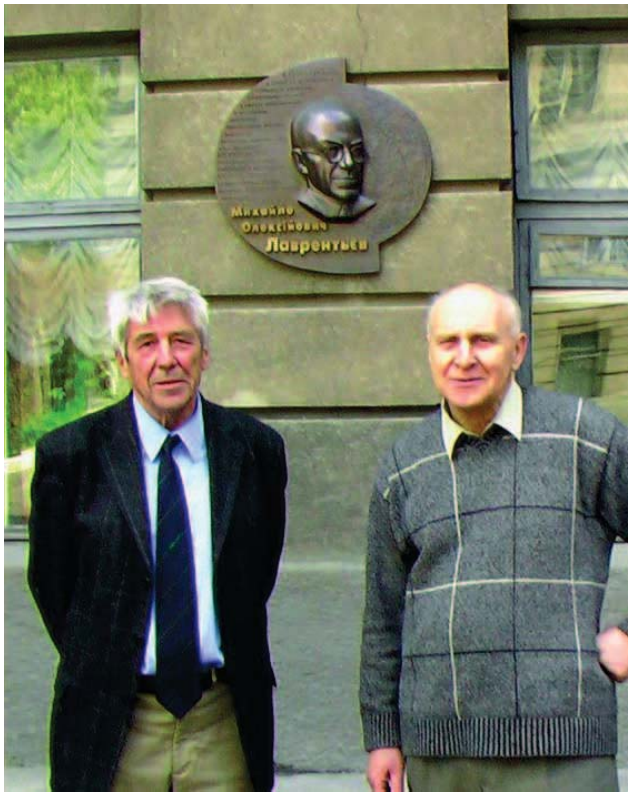
касаний сколь угодно высокого порядка [30, 31, 32]. Таким образом, было явно показано, что традиционная логика исследования бифуркаций по степени увеличения коразмерности, идущая от теории особенностей, не работает при изучении многих классов систем со сложной динамикой. В частности, если система зависит от конечного числа параметров и при некотором их значении имеется гомоклиническое касание, то полное описание динамики и бифуркаций системы получить в принципе невозможно! Эти результаты в совокупности с теорией Ньюхауса о всюду плотной негрубости [33] составляют в настоящее время фундамент теории "гомоклинического хаоса", см. [34].

Второй сценарий связан с исчезновением седло-узловой периодической траектории, имеющей гомоклинику. Первые работы Шильникова на эту тему относятся к началу 70-х годов [35, 36, 37]. До этих работ считалось, что такая бифуркация должна обязательно приводить к появлению гладкого двумерного инвариантного тора (по аналогии с системами на плоскости). Поэтому совершенно неожиданным оказалось сделанное в [35, 36] открытие, что еще до момента бифуркации резонансный тор может быть негладким, а после бифуркации (когда седло-узел исчезает) тор разрушается, и на его месте возникает хаотическое множество. Фактически, здесь был открыт и исследован новый универсальный механизм перехода к хаосу через разрушение двумерного тора – т.е. через внезапную, взрывную хаотизацию двухчастотного режима, см. [38]. В тех же работах был указан класс задач, в которых этот сценарий реализуется естественным образом – системы с петлей сепаратрисы под воздействием периодического возмущения. Вскоре переход к хаосу через разрушение тора был действительно обнаружен в большом числе прикладных задач. Исследование математической теории этого явления продолжалось в [39, 40, 41]. Другая бифуркация такого же типа в том случае, когда неустойчивое многообразие седло-узла имеет трансверсальное пересечение с его сильно-устойчивым многообразием, была изучена в работе [42].[5]

Позже, в работах [44, 45, 46], были получены новые примеры таких бифуркаций, объединенные термином "катастрофа голубого неба". Они приводят к рождению периодических траекторий неограниченно большой длины. Кроме того, было показано, что катастрофа голубого неба может приводить не только к рождению устойчивых периодических траекторий, но и к образованию нетривиальных гиперболических аттракторов. В дальнейших работах было установлено, что катастрофа голубого неба – естественное явление в быстро-

[5]Эта работа дает, в частности, теоретическое обоснование явлению чередования регулярных и хаотических колебаний, которое чуть позже было также описано в [43], где оно было названо "переходом к хаосу через перемежаемость".

медленных системах, особенно в моделях нейродинамики [47].[6]



Леонид Шильников — студент физико-математического факультета Горьковского университета.
Два классика многомерной и одномерной динамики — Л.П. Шильников и А.Н. Шарковский (Киев, 2005)

В конце 70-х годов системами со сложной динамикой заинтересовались физики и ученые из других областей. Вопрос о том, насколько открытый математиками динамический хаос нужен для естествознания, обсуждался весьма широко, и Шильников принимал в дискуссиях активное участие [51]–[55]. Поворотным моментом, как у нас, так и на Западе, по сути, доказательством того, что динамический хаос – одно из фундаментальных явлений природы, стало открытие и исследование странного аттрактора в системе Лоренца. В то время в теории динамических систем были известны только гиперболические странные аттракторы. Однако в системах из приложений они тогда не наблюдались, и физики относились к ним с недоверием, как к чисто математическому объекту. Шильников понимал, что исследование системы Лоренца неминуемо приведет к совершенно новому взгляду на природу динамического

[6]В частности, в моделях нейронов она отвечает за переход от режима быстро-осциллирующих колебаний к так называемому пачечному режиму, когда серии быстрых колебаний (пачки) следуют одна за другой после медленных переходных режимов [48, 49]. Интересно также, что рассмотренная В.И. Лукьяновым и Л.П. Шильниковым в [42] бифуркация оказалась типичной для многих моделей нейронов, где она влечет сложную динамику и сосуществование быстрых спайковых и медленных пачечных колебаний [50].

хаоса. Он немедленно начал серию замечательных работ по аттрактору Лоренца, выполненных совместно с В.С. Афраймовичем и В.В. Быковым.

Его идея состояла в том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием так называемой геометрической модели – двумерного, разрывного, сингулярно-гиперболического отображения с определенными эффективно проверяемыми свойствами. По существу, эта модель обобщала отображение Пуанкаре вблизи сепаратрисы седла, а условия гиперболичности были записаны в форме, близкой к принципу кольца, предложенному в работах по разрушению двумерного инвариантного тора [35, 37]. Геометрическая модель позволила дать детальное описание структуры аттрактора Лоренца. Кроме того, было показано, что аттрактор Лоренца – всегда негрубый: в нем при малых возмущениях возникают и исчезают петли сепаратрис. Что особенно важно, были исследованы бифуркации аттрактора Лоренца, приводящие к его рождению, образованию лакун и разрушению аттрактора. В 1977 г. вышло краткое изложение полученных результатов [56], и была послана в печать статья с подробным изложением теории и полными доказательствами [57], также был опубликован очень интересный обзор [53]. Практически одновременно и независимо на Западе появилось большое число статей по аттрактору Лоренца, см., например, [58]. Тем не менее, по сравнению с другими подходами, теория Афраймовича-Быкова-Шильникова до сих пор остается наиболее полной и удобной для практического анализа структуры и эволюции аттракторов лоренцевского типа в различных системах.

Л.П. Шильников очень гордился этими результатами и тематика с аттракторами Лоренца оставалась для него приоритетной вплоть до конца жизни.[7] В первую очередь его занимал вопрос о бифуркационных механизмах возникновения и разрушения аттрактора Лоренца. В частности, он предложил эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях [60].[8] Позднее, в работе [66] были построены также критерии рождения аттрактора Лоренца при локальных бифуркациях.

Еще при работе над первыми статьями [56, 57] было замечено, что аттрактор Лоренца может разрушаться при образовании т.н. “крючков” в отображении Пуанкаре[9], и центральную роль при этом играет бифуркация образования гетероклинического контура, содержащего седло и седло-фокусы. Такие

[7]Так, одна из его самых последних работ [59] была посвящена изучению символической динамики системы Лоренца.

[8]Критерии Шильникова исследовались также в [61, 62, 63], и они были использованы впоследствии А.Л. Шильниковым при исследовании аттрактора Лоренца в системе Мориока-Шимицу [64, 65].

[9]Систематически это явление было исследовано в [67, 64, 65].

бифуркации были исследованы в кандидатской диссертации В.В. Быкова, см. [68, 69, 70]. Тот факт, что при переходе за "быковскую точку" аттрактор в системе Лоренца теряет гиперболичность (перестает быть аттрактором Лоренца), и в нем появляются устойчивые периодические траектории больших периодов, был впервые отмечен в заметке [71], и послужил непосредственным толчком для формирования концепции квазиаттрактора – притягивающего множества, которое наряду с гиперболическими подмножествами может содержать и устойчивые периодические траектории больших периодов [54, 38]. Шильников считал, что идея квазиаттрактора дает наиболее адекватный математический образ динамического хаоса, наблюдаемого во многих прикладных задачах.

В дальнейшем этой теме – исследованию глобальных бифуркаций, приводящих к рождению устойчивых периодических траекторий, было посвящено немало работ Шильникова с его учениками. В работах [72, 73, 74] были изучены такие бифуркации в случае многомерных систем, содержащих гомоклинические петли седло-фокуса.[10] При этом были найдены условия появления устойчивых периодических траекторий в окрестности гомоклинической петли, а также построены критерии их отсутствия (как у самой системы, так и у всех близких). Впоследствии это привело к открытию [79] диких спиральных аттракторов (у систем размерности не меньше четырех). Такие аттракторы сродни аттракторам Лоренца, но седло заменено на седло-фокус. Как и в аттракторе Лоренца, все траектории в диком спиральном аттракторе неустойчивы, и это свойство сохраняется при всех малых гладких возмущениях. Оба типа аттракторов являются негрубыми, однако в спиральных аттракторах возникают гомоклинические касания и, соответственно, дикие гиперболические множества (в терминологии Ньюхауса [33]), что свидетельствует о чрезвычайно сложном поведении траекторий и невозможности полного описании структуры и бифуркаций таких аттракторов[11]. Дикий спиральный аттрактор принадлежит классу так называемых "псевдо-гиперболических странных аттракторов", теория которых была разработана в статьях [79, 81], и которую можно рассматривать как далеко идущее обобщение теории аттракторов Лоренца. Одним из главных примеров псевдогиперболических аттракторов Шильников считал аттрактор в

[10] К этой же тематике относятся работы Л.А. Белякова о глобальных бифуркации на границе систем с гомоклинической петлей седло-фокуса, выполненные в его кандидатской диссертации, см. [77, 78], а также работы Л.П. Шильникова с В.С. Бираговым и В.С. Гонченко [75, 76] о петлях седло-фокуса в консервативных системах.

[11] Для сравнения отметим, что в диссертации М.И. Малкина было построено полное описание аттрактора Лоренца в геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова в терминах символической динамики, см. [80].

периодически возмущенных системах лоренцевского типа. Как показано в [81], такие аттракторы не содержат устойчивых периодических траекторий, т.е. они являются настоящими хаотическими аттракторами. Интересно, что подобные аттракторы возникают в значительно более широком классе задач, не связанных, на первый взгляд, с системой Лоренца [82]–[84]. Универсальные сценарии возникновения таких аттракторов в многомерных отображениях произвольного вида были предложены в [85], а в ряде работ были исследованы глобальные бифуркации, приводящие к возникновению счетного множества дискретных аттракторов Лоренца, см., например, [86]–[88].

В конце 80-х годов энтузиазм адептов теории хаоса начал сменяться разочарованием. Математикам казалось, что ответы на главные вопросы получены. Физики же поняли, что хаос не укладывается в набор простых схем и что существующая теория не дает ответа на многие интересующие их вопросы. Шильников такого пессимизма не разделял. Он считал динамический хаос фундаментальным явлением природы, теория которого находится в самом начале своего развития. Основной задачей здесь он считал исследование хаотического поведения многомерных систем. К этому направлению относятся работы по гомоклиническим касаниям [89]–[92], петлям седло-фокуса [72]–[76], катастрофе голубого неба [44]–[46], по псевдогиперболическим аттракторам [79, 81], по гомоклиническим торам [6, 93], по бифуркациям и хаосу в гамильтоновых и близких к гамильтоновым системах [94]–[100]. В последние годы он занимался задачами о бифуркациях бесконечной коразмерности, отвечающих совпадению многомерных устойчивых и неустойчивых многообразий состояний равновесия и периодических движений; на сегодня только одна из его работ на эту тему опубликована [101].

В области приложений Л.П. Шильников опубликовал несколько работ по математическим проблемам возникновения турбулентности [55], [102]–[108], вызвавших большой интерес у физиков. Он также интересовался структурой уединенных волн (солитонов и фронтов), поскольку они естественно описываются гомоклиническими и гетероклиническими решениями, см. [109]. В основном работы по солитонной тематике [110]–[115] проводились в сотрудничестве с группой физиков из Москвы, возглавляемой В.М. Елеонским. В частности, в этих работах был открыт новый тип солитонов, математическим образом которых являются так называемые супер-гомоклиники (двоякоасимптотические траектории к гомоклиническим петлям), [116].

Леонид Павлович Шильников был одним из наиболее выдающихся специалистов в теории динамических систем, обладавшим широким кругозором и

особенной интуицией. Как истинный большой ученый он умел “волшебным образом” увидеть связь между казалось бы несвязанными вещами, найти единственно правильную постановку задачи, предложить подход, который неожиданно становился актуальным годы спустя. Это было одной из основных причин, почему многие специалисты из различных областей науки (математики, физики, химики, биологи, инженеры) поддерживали и ценили тесные контакты с Л. П. Шильниковым. Многие ученые признавали большое влияние, оказанное Шильниковым на их собственное профессиональное развитие. Для нас Леонид Павлович был больше чем просто научным руководителем и коллегой. Этот сборник – дань памяти большому человеку, учителю и другу. Мы собрали здесь лишь некоторые его работы, которые в свое время оказали большое влияние на становление нашей научной деятельности и заложили фундамент многих новых направлений в теории динамических систем. Мы уверены, что эта книга будет полезна последующим поколениям исследователей.

В книге представлена 31 работа Л.П. Шильникова по теории многомерных динамических систем. Все они составляют вместе единый фундамент этой теории. Для удобства читателя мы разбили книгу на 5 глав.

Первая глава “Бифуркации петель сепаратрис в многомерных системах” содержит шесть работ Л.П. Шильникова по теории глобальных бифуркаций многомерных динамических систем. В первых пяти работах рассматриваются основные бифуркации, не выводящие из класса систем Морса-Смейла. Результаты этих работ можно рассматривать как далеко идущие многомерные обобщения двумерных бифуркаций, исследованных А.А.Андроновым и Е.А. Леонтович еще в 30-е годы. В последней работе этой главы рассматривается совершенно новая на то время (1969 г.) бифуркация многомерной системы, имеющей несколько гомоклинических петель состояния равновесия типа седло-седло, приводящая к возникновению нетривиального гиперболического инвариантного множества. Мы поместили эту работу в главу 1, так как она имеет непосредственное отношение к бифуркациям систем с гомоклиническими петлями.

Во второй главе “Гомоклиническая петля седло-фокуса и математическая теория спирального хаоса” собрано шесть работ Л.П. Шильникова, относящихся к одному из самых главных его научных достижений – открытию сложной структуры поведения траекторий в окрестности гомоклинической петли состояния равновесия типа седло-фокус. Первые три статьи – это работы 60-х годов, в которых были заложены основы математической теории спирального хаоса, а последние три – это уже работы 80-х годов, в которых больше рассматривались приложения этой теории к математическим проблемам турбулентности,

уединенных волн и гамильтоновой динамики.

В третью главу “Гомоклинический хаос” включены семь работ Л.П. Шильникова по теории гомоклинического хаоса, т.е. сложного и непредсказуемого поведения траекторий многомерных динамических систем, вызванного существованием у них гомоклинических траекторий Пуанкаре, как грубых, так и негрубых.

В четвертой главе “Математическая теория синхронизации и хаос” представлено семь работ Л.П. Шильникова, которые составляют фундамент современной математической теории синхронизации, а также теории странных аттракторов, возникающих в результате разрушения инвариантных двумерных торов.

Пятая глава “Аттрактор Лоренца” содержит пять работ Л.П. Шильникова, посвященных одной из самых интересных тем в теории динамического хаоса – аттракторам Лоренца.

По своей структуре все главы независимы друг от друга, поэтому чтение книги можно начинать с любой главы. Для удобства читателей каждая глава начинается с соответствующего предисловия, в котором мы постарались дать не только общий обзор статей Л.П. Шильникова, представленных в главе, но также обрисовать то место, которые эти работы занимают в современной теории динамических систем, и то влияние, которое они оказали на развитие этой теории.

Составители этого издания выражают искреннюю благодарность Людмиле Ивановне Шильниковой, предоставившей материалы из личного архива Л.П. Шильникова. Также мы благодарим за помощь в подготовке рукописи сотрудников университета М. Болотова, Е. Гринеса, В. Гринеса, А. Гонченко, А. Казакова, А. Короткова и О. Починку.

Работа над книгой была поддержана Российским Научным Фондом, гранты 14-41-00044 “Динамика и бифуркации диссипативных и консервативных систем” (главы 1-3, 5) и 14-12-00811 “Фазовая динамика осцилляторных сред” (глава 4).

Составители-редакторы этого издания: В.С. Афраймович, Л.А. Беляков, С.В. Гонченко, Л.М. Лерман, А.Д. Морозов, Д.В. Тураев, А.Л. Шильников.

Литература

[1] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г., Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966, 567 с.

[2] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967, 487 с.

[3] * Шильников Л.П., Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве. // ДАН СССР, 1962, т.143, 2, 289-292.[12]

[4] * Шильников Л.П., О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий.// Матем.сборник, 1963, т.61(104), 4, 443-466.

[5] * Шильников Л.П., О рождении периодических движений из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же. // ДАН СССР, 1966, т.170, 1, 49-52.

[6] * Шильников Л.П., О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. //Матем.сборник, 1968, т.77 (119), N3, 461-472.

[7] * Шильников Л.П., Об одном случае существования счетного множества периодических движений. // ДАН СССР, 1965, т.169, 3, 558-561.

[8] * Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса. // ДАН СССР, 1967, т.172, 2, 298-301.

[9] * Шильников Л.П., К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. // Матем. сборник, 1970, т.81(123), 1, 92-103.

[10] * Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой. // ДАН СССР, 1967, т.172, 1, 54-57.

[11] * Шильников Л.П., Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа. // Матем. сборник., 1967, т.74(116), 3, 378-397.

[12] Шильников Л.П., Гомоклинические траектории: от Пуанкаре до наших дней. // В книге: Математические события XX века. Изд.ФАЗИС, Москва.- 2003, 466-489.

[12] В списке литературы звездочкой отмечены те работы Л.П. Шильникова, которые вошли в данное издание.

[13] Smale S., Diffeomorphisms with many periodic points. // Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, 1965, 63-80.

[14] A.L.Shilnikov, L.P. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, Methods of Qualitative theory in nonlinear Dynamics. // World Scientific; Part 1, 1998, 412c.; Part 2, 2001, 577c. [Русский перевод – Шильников А.Л., Шильников Л.П., Тураев Д.В., Чуа Л., Методы качественной теории в нелинейной динамике. // Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований; Часть 1, 2004, 416 с.; Часть 2, 2009, 546 с.]

[15] * Шильников Л.П., К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора. // ДАН СССР, 1968, т.180, 2, 286-289..

[16] Лерман Л.М., Шильников Л.П., Гомоклинические структуры в бесконечномерных системах. // Сиб. мат. журнал, 1988, т.29, 3, 92-103.

[17] Lerman L. Shilnikov L. Homoclinical Structures in Nonautonomous Systems: Nonautonomous Chaos. // Chaos: Interdisc. J. Nonlinear Sci., 1992, v.2, No.3, 447-454.

[18] Арнольд В. И. О неустойчивости динамической системы со многими степенями свободы. // ДАН СССР, 1964, т. 156, 1, 9-12.

[19] R. de la Llave, Some recent progress in geometric methods in the instability problem in Hamiltonian mechanics.// International Congress of Mathematicians, 2006, v. II, 1705-1729, Eur. Math. Soc., Zurich.

[20] A. Delshams, R. de la Llave, T.M. Seara, Geometric approaches to the problem of instability in Hamiltonian systems. // An informal presentation in W.Chreg (ed.) Hamiltonian Dynamical Systems and Applications, Springer (2008) pp.285-336.

[21] V. Gelfreich, D. Turaev, Unbounded Energy Growth in Hamiltonian Systems with a Slowly Varying Parameter // Comm. Math. Phys., 2008, v. 283, No. 3, 769-794.

[22] Sabbagh L. An inclination lemma for normally hyperbolic manifolds with an application to diffusion. // Ergodic Theory and Dynamical Systems, 2014, pp. 1-23

[23] V. Kaloshin, K. Zhang, Arnold diffusion for smooth convex systems of two and a half degrees of freedom. // Nonlinearity, 20015, v. 28, No. 8

[24] * Шильников Л.П., Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем. // ДАН СССР, 1969, т.182, 1, 53-56.

[25] Афраймович В.С., Шильников Л.П., Об особых множествах систем Морса-Смейла. // Труды ММО, 1973, т.28, 181-214.

[26] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О достижимых переходах от систем Морса-Смейла к системам со многими периодическими движениями. // Известия АН СССР, серия мат., 1974, т.38, 6, 1248-1288.

[27] * Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. // ч. 1, Матем. сборник, 1972, т.88(130), 4, с.475-492; ч. 2, Матем. сборник, 1973, т.90(132), 1, с.139-156.

[28] Стенькин О.В., Шильников Л.П., Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности. // Матем.сб., 1988, т.189, 4, 127-144.

[29] * Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре. // Труды 7 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, 1977, 16с.

[30] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., On models with non-rough Poincare homoclinic curves. // Physica D, 1993, v.62, Nos.1-4, 1-14.

[31] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса. // в кн. "Итоги науки и техники, современная математика и ее приложения; тематические обзоры (Динамические Системы 6)", 1999, т.67, 69-128.

[32] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps. // Nonlinearity, 2007, v.20, 241-275.

[33] S.E. Newhouse, The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms. // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 1979, v. 50, 101-151.

[34] Гонченко С.В., Шильников Л.П. Гомоклинические касания. // Монография (сборник статей), 2007, НИЦ "Регулярная и Хаотическая Динамика", Москва-Ижевск, 523 с.

[35] * Афраймович В.С., Шильников Л.П., О малых периодических возмущениях автономных систем. // ДАН СССР, 1974, т.214, 4, 739-742.

[36] * Афраймович В.С., Шильников Л.П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. // ДАН СССР, 1974, т.219, 6, 1281-1284.

[37] * Афраймович В.С., Шильников Л.П., Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем. // ПММ, 1977, т.41, 4, 618-627.

[38] * Афраймович В.С., Шильников Л.П., Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность. // Межвуз. сб. "Методы КТДУ", Горький, 1983, 3-26.

[39] S.E. Newhouse, J. Palis, F. Takens, Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms. // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci., 1983, v. 57, 5-72.

[40] Тураев Д.В., Шильников Л.П. Бифуркации квази-аттракторов тор-хаос. // В кн. "Матем. Механизмы турбулентности", Киев, 1986, 9 с.

[41] Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D., On some mathematical topics in classical synchronization. A tutorial. // Int.J.of Bifurcation and Chaos, 2004, v.14, No.7, 2143-2160.

[42] * Лукьянов В.И., Шильников Л.П., О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. // ДАН СССР, 1978, т.243, 1, 26-29.

[43] Pomeau Y., Manneville P., Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. // Commun. Math. Phys., 1980, v.74(2), 189-197.

[44] Тураев Д.В., Шильников Л.П., О катастрофах голубого неба. // Докл.РАН, 1995, т.342, вып.5, 596-599.

[45] Shilnikov L.P., Turaev D.V., On Simple Bifurcations Leading to Hyperbolic Attractors. // Int. J. “Computers & Mathematics with Appl.”, 1997 ,v.34, N 2-4, 173 - 193.

[46] Shilnikov L.P., Turaev D.V., A New Simple Bifurcation of Periodic Orbit of "Blue Sky Catastrophe"Type. // Methods of Qualitative Theory of Dufferential Equations and Related Topics, AMS Translations, Ser.2, 2000, V. 200 (Advances in Mathematical Sciences), 165-188.

[47] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P. and Turaev D., Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems. // AMS Moscow Math. J., 2005, 5(1), 205-218.

[48] Shilnikov A.L. and Cymbalyuk G., Transition between tonic-spiking and bursting in a neuron model via the blue-sky catastrophe. // Phys Rev Letters, 94, 048101, 2005

[49] Shilnikov A.L., Calabrese R. and Cymbalyuk G., Mechanism of bi-stability: tonic spiking and bursting in a neuron model. // Phys Review E 71(5), 056214-046221, 2005

[50] Shilnikov A.L. Complete dynamical analysis of an interneuron model. // Invited referred review. Special Issue: Dynamics in Biology and Medicine. J. Nonlinear Dynamics, 68(3), 305-328, 2012

[51] Леонтович Е.А., Шильников Л.П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. // Труды 5 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, Киев, 1970, т.2, 282-291.

[52] * Баутин Н.Н., Шильников Л.П., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений ("опасные"и "безопасные"границы. // Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980, 292 - 316.

[53] * Шильников Л.П., Теория бифуркаций и модель Лоренца. // Дополнение II к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980, 317 - 336.

[54] V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, Strange attractors and quasiattractors. // “Nonlinear Dynamics and Turbulence”, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph (Boston,Pitmen), 1983.

[55] * Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность - I. // Межвузовский сб. “Методы КТДУ”, Горький, 1986, 150-163.

[56] * Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. // ДАН СССР, 1977, т.234, 2, 336-339.

[57] * Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца. // Труды ММО, 1982, т.44, с.150-212.

[58] Странные аттракторы. // под ред. Я.Г. Синая и Л.П. Шильникова.- М.: Мир, 1981.

[59] Barrio R., Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Kneadings, symbolic dynamics, and painting Lorenz chaos. a Tutorial. // J. Bifurcations and Chaos, 2012, Vol. 22, No. 4, 1230016

[60] * Шильников Л.П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы. // УМН, 1981, т.36, в.4

[61] Robinson C., Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of the Lorenz type. // Nonlinearity, 1989, v.2, 495-518.

[62] Robinson C., Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type, II. // SIAM J. Math. Anal., 1992, v.23, 1255-1268.

[63] Rychlic M., Lorenz attractors through Shilnikov type bifurcation. // Ergod. Th. Dyn. Sys., 19990, v.10, 793-821.

[64] Шильников А.Л., Бифуркаци и хаос в системе Мориока-Шимицу. // "Методы качественной теории диф. уравнений", Горький, 1986, 180-193 [English translation in Selecta Math. Soviet., 10 (1991) 105-117].

[65] Shilnikov A.L., On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimuizu-Morioka model. // Physica D, 1993, v.62, 338-346.

[66] A.L.Shilnikov, L.P. Shilnikov, D.V.Тураев, Normal forms and Lorenz attractors. // Int.J. Bifurcation and Chaos, 1993, v. 3, N5, 1123-1139.

[67] Быков В.В., Шильников А.Л., О границах области существования аттрактора Лоренца. // "Методы качественной теории и теории бифуркаций", Горький, 1989, 1151-159.

[68] Быков В.В., О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом. // "Методы качественной теории диф. уравнений", Горький, 1978, 3-32.

[69] Быков В.В., О бифуркациях динамических систем, близких к системе с сепаратрисным контуром, содержащим седло-фокус. // "Методы качественной теории диф. уравнений", Горький, 1980, 44-72.

[70] Bykov V.V., The bifurcations of separatrix contours and chaos. // Physica D, 1993, v.62, 290- 299.

[71] * Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца. // УМН, 1980, т.35, в.4, 214.

[72] Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса. // Матем.сб., 1986, т.130, N 4(8), 557-574.

[73] Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса и спиральный хаос. // Матем.сб., 1991, No.7, 1043-1073.

[74] Alekseeva S.A., Shilnikov L.P., On Cusp-Bifurcations of Periodic Orbits in Systems with a Saddle-Focus Homoclinic Curve. // Methods of Qualitative Theory of Dufferential Equations and Related Topics, AMS Translations, Ser.2, 2000, V. 200 (Advances in Mathematical Sciences), 23-34.

[75] Бирагов В.С., Шильников Л.П., О бифуркации петли седло-фокуса в трехмерной консервативной динамической системе. // "Методы качественной теории и теории бифуркаций", Горький, 1989, 25-34.

[76] Гонченко В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической петли к седло-фокусу индекса 1/2. // Доклады Академии Наук, 417(6), 2007.

[77] Беляков Л.А., Бифуркациии систем с гомоклинической кривой седло-фокуса с нулевой седловой величиной. // Матем. заметки, 1985, т.36, вып. 5, 681-689.

[78] Беляков Л.А., О бифуркационном множестве в системе с гомоклинической кривой седла. // Матем. заметки, 1980, т.28, вып. 6, 911-922.

[79] Тураев Д.В., Шильников Л.П., Пример дикого странного аттрактора. // Матем. сборник, 1998, т.189, N2, 137-160.

[80] Малкин М.И., Интервалы вращения и динамика отображений лоренцева типа. // "Методы качественной теории диф. уравнений", Горький, 1986, 122-139.

[81] Тураев Д.В., Шильников Л.П., Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа. // Доклады Академии Наук, 2008, 418(1).

[82] S.V. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, C. Simó, D. Turaev, Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors // Int.J. Bifurcation and Chaos, 2005, v.15, 3493-3508.

[83] Гонченко А.С., Гонченко С.В. О существовании аттракторов лоренцевского типа в неголономной модели кельтского камня. // Нелинейная динамика, 2013, т.9, № 1, с. 77-89.

[84] S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, D.V. Turaev, Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps. // Math. Model. Nat. Phenom., 2013, Vol.8, No.5, pp. 32-54.

[85] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений. // Нелинейная Динамика, 2012, т.8, №1, 3-28.

[86] S.V.Gonchenko, J.D.Meiss, I.I.Ovsyannikov, Chaotic dynamics of three-dimensional Henon maps that originate from a homoclinic bifurcation. // Regular and Chaotic Dynamics, 2006, v.11, No.2, pp.191-212.

[87] S.V. Gonchenko, L.P.Shilnikov, D. Turaev, On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors. // Regular and Chaotic Dynamics, 2009, v.14, No.1, 137-147.

[88] С.В. Гонченко, И.И.Овсянников, О бифуркациях трехмерных диффеоморфизмов с негрубым гетероклиническим контуром, содержащим седло-фокусы. // Нелинейная Динамика, 2010, т.6, No.1, с.61-77.

[89] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай). // Докл. РАН, т. 329, 1993, 404-407.

[90] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Динамические явления в системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. // Доклады РАН, 1993, т. 330, 2, 144-147.

[91] Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits. // Int.J. Chaos, 1996,v.6, N1, 15-31.

[92] Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. // Nonlinearity, 2008, 21(5), 923-972.

[93] * Афраймович В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях коразмерности один, приводящих к появлению счетного множества торов. // ДАН СССР, 1982, т.262, 4, 777-780.

[94] * Морозов А.Д., Шильников Л.П., К математической теории синхронизации колебаний. // ДАН СССР, 1975, т.223, 6, 1340-1343.

[95] Морозов А.Д., Шильников Л.П., О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым. // ПММ, 1983, т.47, 5, 385-394.

[96] * Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.,О бифуркациях состояний равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. //Межвуз. сб. Методы КТДУ, Горький, 1984, 60-72.

[97] Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Elliptic periodic orbits near a homoclinic tangency in four-dimensional symplectic maps and Hamiltonian systems with three degree of freedom. // Regular and Chaotic Dynamics, 1998, v.3, N4, 3-26.

[98] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П.,Существование счетного множества эллиптических периодических траекторий у четырехмерных симплектических отображений с гомоклиническим касанием. // Труды МИРАН, 2004, Т.244, 115-142.

[99] Гонченко С.В., Шильников Л.П., О двумерных сохраняющих площадь отображениях с гомоклиническими касаниями. // Доклады РАН, 2001, Т.378, No.6, 727-732.

[100] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P.,On two-dimensional area-preserving maps homoclinic tangencies that have infinitely many generic elliptic periodic points. // Записки научных семинаров ЛОМИ, 2003, Т.300, 155-166.

[101] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Showcase of Blue Sky Catastrophes. // Int. Journal of Bifurcation and Chaos, 20114, Vol. 24, No. 8, 1440003 (10 pages)

[102] Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность. //(англ.) В кн. “Нелинейные и турбулентные процессы”, 1984, изд."Процесс 8с.

[103] Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность. // В кн. “Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике”, т.II, 1985, “Наукова думка”,118-124.

[104] Shilnikov L.P., Mathematical problems of dynamical chaos. // “Dynamic of Systems”, 1993, 163-170

[105] Shilnikov L.P., Contemporary problems of dynamical chaos. // Int.Workshor “Non-linear Dynamics of Electronics Systems”, Dresden, 1993, 12 c.

[106] Shilnikov L.P., Strange attractors and dynamical models. // J. of Circuits, Systems and Computers, 1993, v. 3, N 1, 1-10.

[107] Shilnikov L.P., Mathematical problems of nonlinear dynamics: a Tutorial. // in book: Visions of Nonlinear Sciences in the 21st Century, 69-156. World Scientific. 1999.

[108] Shilnikov L.P., Bifurcations and Strange Attractors. // Proc. Int. Congress of Mathematicians, Beijing (China), August 29-28 2002 (Invited Lectures). - 2002. - Vol.3, 349-372

[109] * Беляков Л.А., Шильников Л.П., Гомоклинические кривые и сложные стационарные волны.// Межвузовский сб. “Методы КТДУ“, Горький, 1985, 22-35.

[110] Елеонский В.М, Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О классификации самолокализованных состояний электромагнитного поля в нелинейной среде. // Межвуз. сб. “Методы КТДУ”, 1988, 49-57.

[111] Ахмедиев И.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Шильников Л.П., Стационарные импульсы в нелинейном двулучепреломляющем волокне. Процессы размножения солитонов. // Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, вып. 15, 19-23.

[112] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О классификации самолокализованных состояний электромагнитного поля в нелинейной среде. // ДАН СССР, 1989, т. 309, 4, 848-851.

[113] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Королев В.Л., Шильников Л.П., Бифуркации векторных солитонов огибающих и интегрируемость гамильтоновых систем. // сб. “Методы качеств. теории и теории бифуркаций”, Н.Новгород, 1990, 123-137.

[114] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Королев В.Л., Шильников Л.П., Бифуркации ветвления векторных солитонов огибающих. // Письма в ЖТФ, т. 17, вып. 2, 1991, 786-793.

[115] Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Королев В.Л., Шильников Л.П., Ветвление векторных солитонов и интегрируемость гамильтоновых систем. // ЖЭТФ, 1991? т. 99, вып. 4, 1113-1120.

[116] Shilnikov L.P., Turaev D.V., Superhomoclinic orbits and multipulse homoclinic loops in Hamiltonian systems with discrete symmetries. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, T.2, N 3-4, 126-138.

Глава 1

Бифуркации петель сепаратрис в многомерных системах.

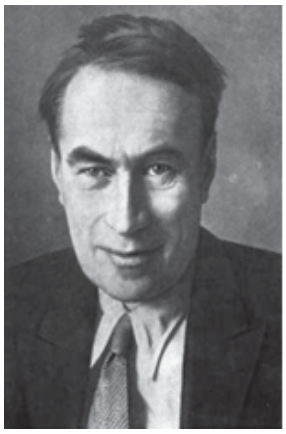
В этой главе представлены шесть работ Л.П. Шильникова [1-6] по теории глобальных бифуркаций многомерных динамических систем. По классификации Шильникова такие бифуркации делятся на три основных типа:

- Бифуркации, не выводящие из класса систем Морса-Смейла.[1]
- Бифуркации при переходе через границу систем Морса-Смейла и систем со счетным множеством периодических траекторий.
- Бифуркации в классе систем со сложной структурой (в классе систем со счетным множеством периодических траекторий).

Первые четыре работы, [1-4], посвящены исследованию основных глобальных бифуркаций, не выводящих из класса систем Морса-Смейла. Полученные там результаты являются многомерным обобщением двумерных бифуркаций, исследованных А.А.Андроновым и Е. А. Леонтович еще в 30-е годы двадцатого столетия – это нелокальные бифуркации систем с петлей сепаратрисы седлового и седло-узлового состояния равновесия [7,8] (см. также [9,10]). Заметим, что в работах [1-4] найдены условия (коразмерности 1), при выполнении которых из гомоклинической петли Γ_0 состояния равновесия типа седло [1,2,4], седло-узел [1,2], или седло-седло [3] многомерной динамической системы рождается ровно одна периодическая траектория (предельный цикл).

При этом даны критерии устойчивости родившегося предельного цикла.

[1]Напомним, что системами Морса-Смейла называются системы с простой структурой множества неблуждающих траекторий, т.е. они имеют конечное число периодических траекторий и состояний равновесия, которые все являются гиперболическими, и инвариантные устойчивые и неустойчивые многообразия этих траекторий пересекаются трансверсально. Системы Морса-Смейла являются естественным обобщением грубых систем на плоскости или на замкнутых двумерных многообразиях.



А.А. Андронов

Е.А. Леонтович

А.Г. Майер

Л.П. Шильников в начале 60-х

Так, в случае, когда состояние равновесия O имеет собственные значения матрицы линеаризации $\lambda_1, ..., \lambda_n$, эти условия выглядят так:

- В случае, когда O – седло с собственными значениями такими, что $\mathrm{Re}\ \lambda_i < 0 \quad (i = 1, ..., n-1), \lambda_n > 0$, и седловая величина $\sigma \equiv \lambda_n + \max \mathrm{Re}\ \lambda_i$ отрицательна, рождающийся из петли предельный цикл является асимптотически устойчивым (см. рис. 5(а) из [2]).
- В случае, когда O – седло-узел с устойчивым сектором, т.е. O имеет собственные значения такие, что $\mathrm{Re}\ \lambda_i < 0, i = 1, ..., n-1, \lambda_n = 0$, и гомоклиническая петля Γ входит в седло-узел общим образом (т.е. касаясь в O собственного направления, отвечающего $\lambda_n = 0$), то из петли седло-узла при его исчезновении рождается единственный предельный цикл, который является асимптотически устойчивым (см. рис. 2(а) из [2]).

Отметим, что эти два случая соответствуют двум основным (коразмерности 1) бифуркационным границам областей устойчивости периодических траекторий. Всего таких основных границ насчитывается в настоящее время 7

разных типов, см. [11] § 14.1. Кроме указанных двух, к ним добавляются еще 5 границ, переходам через которые отвечает одна из следующих невырожденных бифуркаций:[2]

(1) седло-узловая бифуркация, когда периодическая траектория в критический момент имеет мультипликатор $+1$;

(2) бифуркация удвоения периода, когда периодическая траектория в критический момент имеет мультипликатор -1;

(3) рождение инвариантного тора, когда периодическая траектория в критический момент имеет пару мультипликаторов $e^{\pm i\omega}, \omega \neq \{0, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$;

(4) бифуркация Андронова-Хопфа, когда устойчивая периодическая орбита влипает в сложный фокус – состояние равновесия, имеющее пару чисто мнимых собственных значений (эта граница совпадает с границей устойчивости такого состояния равновесия в случае, когда его первая ляпуновская величина отрицательна, т.е. при переходе через границу происходит мягкая бифуркация Андронова-Хопфа);

(5) "катастрофа голубого неба" – эта граница выделяется существованием седло-узловой периодической орбиты L^* такой, что все траектории неустойчивого множества $W^u(L^*)$ возвращаются к L^* при $t \to +\infty$, причем $W^u(L^*)$ имеет специальный вид, см. подробнее в [11,12].

Заметим, что указанные границы могут быть также разделены на опасные и безопасные [13]. *Безопасная граница* – это такая, при переходе через которую происходят лишь малые количественные изменения в поведении траекторий. *Опасная граница* – это такая, для которой произвольно малые возмущения (выводящие из области устойчивости) приводят к значительным и необратимым изменениям в поведении системы. В работе Н.Н. Баутина и Л.П. Шильникова [5], которая приведена в этой главе, дана классификация указанных границ устойчивости[3] по типу "опасная – безопасная", и кроме того, среди опасных границ там были выделены *динамически определенные* и *динамически неопределенные* границы.

Глобальные бифуркации, связанные с возникновением седловых предельных циклов, были рассмотрены в [3,4]. Так, общая теория бифуркаций многомерных систем с гомоклинической петлей состояния равновесия типа седло (не выводящих из класса систем Морса-Смейла) была представлена Л.П.

[2]а также две границы устойчивости состояний равновесия, когда в критический момент система имеет состояние равновесия типа седло-узел или сложный фокус (переходу через эти границы отвечают соответственно седло-узловая бифуркация и бифуркация Андронова-Хопфа)

[3]Заметим, что (безопасная) граница "катастрофа голубого неба" в [5] не упоминается, поскольку она была открыта значительно позже – в работе Д.В. Тураева и Л.П. Шильникова [12].

Шильниковым в работе [4], в которой были указаны условия рождения из петли единственной периодической траектории. Эта траектория может быть асимптотически устойчивой, когда выполнены приведенные выше условия, т.е. условия из работ [1,2], либо вполне неустойчивой (когда условия из [1,2] выполняются при замене t на $-t$), либо седловой. В последнем случае, помимо соответствующих условий на собственные числа матрицы линеаризации в состоянии равновесия, требуются также определенные условия общего положения (в классе систем с гомоклинической петлей) на характер вхождения петли в седло O, см., например, рис. 1.1.

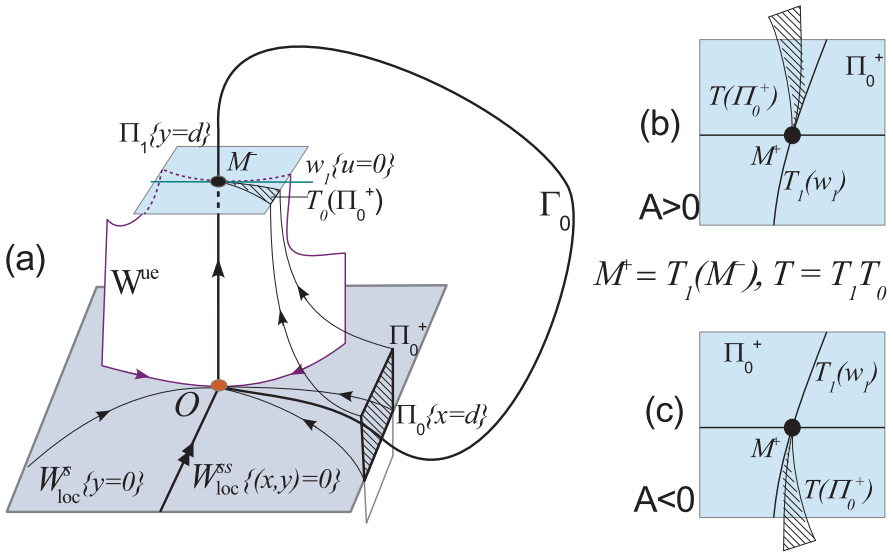


Рис. 1.1. (a) Пример гомоклинической петли Γ_0 состояния равновесия O типа седло в трехмерном случае. Седло O имеет здесь собственные значения $\lambda_{ss} < \lambda_s < 0 < \lambda_u$. Если $\lambda_u + \lambda_s < 0$, то при соответствующем расщеплении петли вовнутрь рождается единственный устойчивый предельный цикл. Если $\lambda_u + \lambda_s > 0$, то для рождения единственного (уже седлового) предельного цикла требуются дополнительные условия общего положения. Так, петля Γ_0 должна входить в седло O при $t \to +\infty$, касаясь ведущего направления (отвечающего λ_s), и сепаратрисная величина A отлична от нуля (что влечет, но не эквивалентно тому, что устойчивое многообразие $W^s(O)$ при $t \to -\infty$ будет касаться в O неведущего многообразия W^{ss}_{loc}). Если $A > 0$, то предельный цикл рождается при расщеплении петли наружу, а если $A < 0$ – то при расщеплении вовнутрь.

Случай гомоклинической петли Γ_0 к состоянию равновесия типа седло-седло был рассмотрен в работах [3,6]. В [3] было показано, что в случае, когда O – седло-седло, т.е. среди его собственных значений есть одно нулевое, а также несколько с отрицательными и несколько с положительными реальными

частями, при выполнении условий

(а) гомоклиническая петля Γ выходит из седло-седла O и входит в него, касаясь собственного направления, отвечающего нулевому собственному значению $\lambda_n = 0$,

(б) устойчивое и неустойчивое многообразия точки O пересекаются вдоль Γ трансверсально

из петли седло-седла рождается единственный предельный цикл, который является седловым, см. рис.1.2.

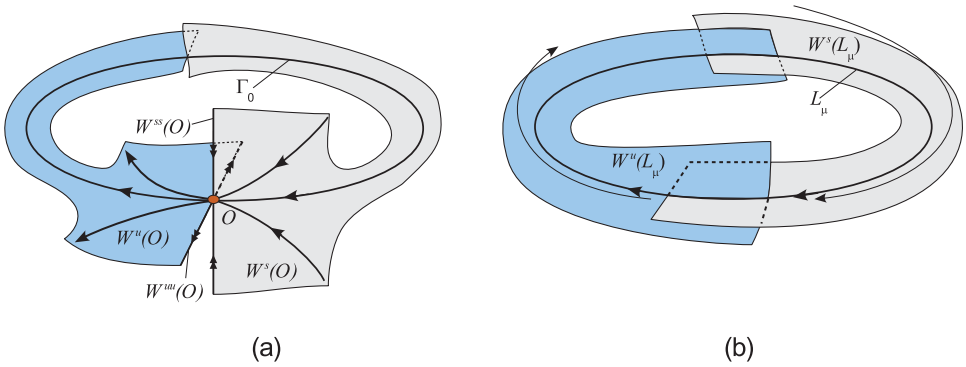


Рис. 1.2. (a) Пример гомоклинической петли состояния равновесия типа седло-седло O в трехмерном случае: в критический момент его устойчивое $W^s(O)$ и неустойчивое $W^u(O)$ инвариантные многообразия являются двумерными поверхностями с краем, и они пересекаются трансверсально в точках петли Γ_0. (b) После исчезновения равновесия O рождается седловой предельный цикл L_μ.

Совершенно замечательное явление было открыто в работе [6], где была рассмотрена бифуркация многомерной системы, имеющей несколько гомоклинических петель состояния равновесия типа седло-седло (это всегда условие коразмерности один, независимо от числа петель). В этой работе было показано, что при исчезновении такого состояния равновесия на месте гомоклинического букета возникнет нетривиальное гиперболическое инвариантное множество, см. рис. 1.3.

Это был исторически первый пример, где было дано описание перехода от систем с простой динамикой (систем Морса-Смейла) к системам со сложной динамикой – со счетным множеством периодических траекторий. По простоте конструкции, предложенный в [6] сценарий превосходит все известные на

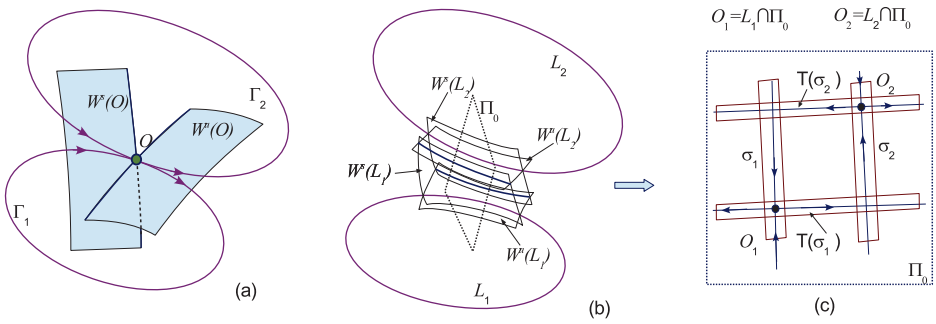


Рис. 1.3. (а) Пример трехмерной системы, имеющей 2 гомоклинические петли состояния равновесия O типа седло-седло. (б) При исчезновении равновесия рождаются два седловых цикла, инвариантные устойчивое и неустойчивое многообразия которых пересекаются трансверсально. (в) В результате такой бифуркации возникает гиперболическое множество (подкова Смейла в соответствующем отображении Пуанкаре некоторой двумерной секущей).

сегодня сценарии такого рода. Причем здесь имеет место случай перехода от систем Морса-Смейла к системам, неблуждающее множество которых имеет равномерно гиперболическую структуру и топологически эквивалентно надстройке над топологической схемой Бернулли из p символов, где p – это число петель седло-седла. Других примеров такого рода бифуркаций к настоящему времени нет, за исключением рассмотренного Д.В. Тураевым и Л.П. Шильниковым случая “катастрофы голубого неба” [14], в котором при исчезновении устойчивой периодической траектории возникает странный гиперболический аттрактор.

Мгновенный переход от систем Морса-Смейла к системам с бесконечным неблуждающим множеством стал впоследствии называться “омега-взрывом”, этой теме был посвящен ряд работ Шильникова с соавторами, см., например, [15,16,17].

Литература к главе 1.

[1*] Л.П. Шильников, Некоторые случаи рождения периодических траекторий в n-мерном пространстве.- ДАН СССР, 1962, т.143, №2, 289-292.

[2*] Л.П. Шильников, О некоторых случаях рождения периодических траекторий из особых траекторий.- Матем. сб., 1963, т.61(103), №4, 443-466.

[3*] Л.П. Шильников, О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же.- ДАН СССР, 1966, т.170, №1, 49-52.

[4*] Л.П. Шильников, О рождении периодического движения из траектории, двояко-асимптотической к состоянию равновесия типа седло.- Матем. сб., 1968, т.77(119), №3, 461-472.

[5*] Н.Н. Баутин, Л.П. Шильников, Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений ("опасные"и "безопасные"границы.// Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена "Бифуркация рождения цикла и ее приложения."М., Мир, 1980.

[6*] Шильников Л.П., Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем.// ДАН СССР, 1969, т.182, 1, 53-56.

[7] А.А. Андронов и Е.А. Леонтович, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра, Уч. записки Горьк. ун-та, вып. 6 (1937), 3-24.

[8] А.А. Андронов и Е.А. Леонтович, О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел, Матем. сб., т. 48 (90) (1959), 335-376.

[9] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г., Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966, 567 с.

[10] Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967, 487 с.

[11] L.P. Shilnikov, A.L.Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, Methods of Qualitative theory in nonlinear Dynamics // World Scientific. Part 1, 1998, 412c.; Part 2, 2001, 545 c. [Русский перевод - Методы качественной теории в нелинейной динамике // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, Часть 1, 2004, 416 с.; Часть 2, 2009, 548 с.]

[12] Тураев Д.В., Шильников Л.П., О катастрофах голубого неба.// Докл.РАН, 1995, т.342, вып.5, 596-599.

[13] Баутин Н.Н., Поведение динамических систем вблизи границ областей устойчивости. // ОГИЗ ГОСТЕХИЗДАТ: Ленинград, 1949.

[14] D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, On Simple Bifurcations Leading to Hyperbolic Attractors. // Int. J. "Computers & Mathematics with Appl. v.34, N 2-4, 173 - 193, 1997.

[15] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О достижимых переходах от систем Морса-Смейла к системам со многими периодическими движениями. // Известия АН СССР, серия мат., 1974, т.38, 6, 1248-1288.

[16*] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой// ч. 1, Матем. сборник, 1972, т.88(130), 4, с.475-492; ч. 2, Матем. сборник, 1973, т.90(132), 1, с.139-156.

[17] Стенькин О.В., Шильников Л.П., Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности// Матем.сб., 1988, т.189, N4, 127-144.

Доклады Академии наук СССР
1962, Том 143, № 2, с. 289-292

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. Шильников

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ РОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 2 XI 1961)

1. Одной из основных задач качественной теории дифференциальных уравнений является рассмотрение бифуркаций состояний равновесий и периодических движений ([1–6]). В настоящей заметке устанавливаются условия рождения устойчивых периодических движений из траекторий, идущих из состояния равновесия в него же. Полученные результаты являются обобщением соответствующих результатов А. А. Андронова и Е. А. Леонтович ([2,3]) на случай n-мерного пространства.

2. Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ \mu),\ \ i = 1, ...n, \tag{1}$$

зависящую от параметра μ ($|\mu| < \mu_0$). Относительно правых частей предположим, что они являются достаточно гладкими функциями переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ и μ. Допустим, что при $\mu = 0$ система (1) имеет состояние равновесия $O(0, ..., 0)$, в котором корни $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ характеристического уравнения

$$\left| \left(\frac{dX_i}{dx_j} \right)_0 - \delta_{ij}\lambda \right| = 0, \tag{2}$$

имеют действительные части одного знака, а $\lambda_n = 0$. С помощью линейной неособой замены систему (1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j + P_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ \mu),\ \ i = 1, ..., n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= P_n(x_1, x_2, ..., x_n;\ \mu), \end{aligned} \tag{3}$$

где функции $P_i(x_1, x_2, ..., x_n;\ 0)$, $i = 1, ..., n$, не содержат линейных членов относительно $x_1, x_2, ..., x_n$.

Рассмотрим функцию

$$\bar{P}_n(x_n;\ \mu) = P_n(U_1 + \mu u_1, ..., U_{n-1} + \mu u_{n-1}, x_n;\ \mu),$$

где

$$x_i = U_i(x_n) + \mu u_i(x_n; \mu), \;\; i = 1, ..., n-1,$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\sum a_{ij} x_i + P_i(x_1, x_2, ..., x_n; \;\; \mu) = 0, \;\; i = 1, ..., n-1.$$

Предположим, что в разложении $\bar{P}_n(x_n;\, 0) = l_m x_n^m + ...$ первая не равная нулю величина l_m ([7]) имеет четный номер и положительна (если $l_m < 0$, то, сделав замену x_n на $-x_n$, придем к рассматриваемому случаю). В этом случае состояние равновесия O называется седло-узлом.

Пусть для определенности $\mathrm{Re}\, \lambda_i < 0, \;\; i = 1, 2, ..., n-1$. Поведение интегральных кривых системы (3) при $\mu = 0$ в достаточно малой окрестности O описывается следующей леммой, являющейся обобщением результата Р. М. Минц ([8]), установленного для $n = 3$.

Лемма. *Существует $(n-1)$-мерная сепаратрисная поверхность I_{n-1}, касающаяся плоскости $x_n = 0$, состоящая из O^+-кривых и разделяющая окрестность O на узловую и седловые области. В узловой области каждая интегральная кривая является O^+-кривой, а в седловой области все интегральные кривые, за исключением одной O^--кривой, проходят на конечном расстоянии от седло-узла.*

Условие отсутствия состояний равновесия у системы (3) в достаточно малой окрестности начала координат эквивалентно определенно-положительности выражения

$$\bar{P}_n(x_n;\, \mu) = l_m x_n^m (1 + q_1(x)) + \mu\, q_2(x_n;\, \mu).$$

В частности, если $q_2(0, 0) > 0$, то при изменении параметра μ имеет место следующая бифуркационная картина: два простых состояния равновесия – седло и узел, существующие при $\mu < 0$, при увеличении μ сближаются и затем сливаются в одно состояние равновесия (седло-узел), которое исчезает при $\mu > 0$. Исследуя уравнение $\bar{P}_n(x_n;\, \mu) = 0$, можно показать, что достаточно малые значения параметра μ, при которых в некоторой фиксированной окрестности начала координат будут отсутствовать состояния равновесия, будут образовывать интервалы (один или два), одним из концов которых будет точка с координатой $\mu = 0$, соответствующая существованию седло-узла[1]. Обозначим значения параметра μ из указанных интервалов через $\bar{\mu}$.

Согласно лемме 1 из седло-узла выходит только одна O^--кривая. Обозначим ее через Γ_0.

Теорема 1. *Если траектория Γ_0 при $t \to +\infty$ входит в седло-узел и не лежит на сепаратрисной поверхности, то при исчезновении седло-узла (в результате изменения параметра) из Γ_0 рождается только одно периодическое движение, устойчивое при $Re\, \lambda_i < 0, \;\; i = 1, ..., n-1$.*

Доказательство теоремы основывается на методе точечных отображений.

Обозначим через S_0 и S_1 поверхности $x_n = -d$ и $x_n = d$, где $d > 0$. При достаточно малом d траектория Γ_0 будет пересекать S_0 и S_1 в точках M_0^0 и M_1^0. Можно показать, что при всех достаточно малых $\bar{\mu}$ (по абсолютной величине) на поверхности S_0 найдется σ_0-окрестность точки M_0^0 такая, что траектория, проходящая при $t = 0$ через точку $M^0 \in \sigma_0$,

[1]Отметим, что существование двух интервалов $(-\mu^*, 0)$ и $(0,\, \mu^*)$ возможно в том случае, когда $x_n = \mu = 0$ есть изолированное решение уравнения $\bar{P}_n(x_n;\, \mu) = 0$

при некотором $t = t_1$ пересечет поверхность S_1 в некоторой точке M^1. Устанавливаемое таким образом точечное отображение области σ_0 на поверхность S_1 обозначим через T_0. Доказано также, что при $\bar{\mu} \to 0$ область $T_0\sigma_0$ равномерно стягивается к точке M_1^0, а норма матрицы линеаризованного отображения T_0 стремится к нулю. В силу того, что Γ_0 пересекает поверхности S_1 и S_0 без касания, из общих теорем теории точечных отображений ([6]) следует, что для каждой точки, достаточно близкой к точке M_1^0, можно указать некоторую точку на поверхности S_0. Кроме того, можно указать такую σ_1-окрестность точки M_1^0 на S_1, что ее образ при указанном соответствии, которое обозначим через T_1, будет лежать внутри σ_0. Рассмотрим отображение $T = T_1T_0$. Отображение T является сжимающим при всех достаточно малых $\bar{\mu}$. Из сжимаемости T и известной связи ([9]) между периодическими движениями динамической системы и неподвижными точками соответствующего отображения вытекает существование единственного и устойчивого периодического движения.

3. Пусть система вида (1) при $\mu = 0$ имеет простое состояние равновесия типа седло, в котором корни $\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ характеристического уравнения различны и имеют отрицательные части, а $\lambda_n > 0$. Относительно функций X_i будем предполагать, что они дважды непрерывно дифференцируемы. Заменой переменных рассматриваемую систему при достаточно малых μ можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(\mu)\, x_j + P_i(x_1, ..., x_n;\ \mu), \quad i = 1, ..., n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \lambda_n(\mu)\, x_n + P_n(x_1, ..., x_n;\ \mu), \end{aligned} \tag{4}$$

где функции $P_i(x_1, ..., x_n;\ \mu)$, $i = 1, ..., n$, не содержат линейных членов по $x_1, ..., x_n$ и, кроме того,

$$P_i(0, ..., 0;\ \mu) \equiv 0.$$

Как известно ([7,10–12]), в этом случае существуют два интегральных многообразия I_1 и I_{n-1}, на которых расположены все O^--кривые рассматриваемого состояния равновесия.

Уравнения многообразия I_1, состоящего из двух O^--кривых, записываются в виде

$$x_i = F_i(x_n;\ \mu_1), \quad i = 1, ..., n-1,$$

где $\partial F_i(0;\ \mu)/\partial x_n = 0,\ i = 1, ..., n-1$, а уравнение многообразия I_{n-1}, состоящего из O^+-кривых в виде

$$x_n = F_n(x_1, ..., x_{n-1};\ \mu),$$

где $\partial F_n(0, ..., 0;\ \mu)/\partial x_i = 0,\ i = 1, ..., n-1$. Многообразие I_{n-1} разделяет достаточно малую окрестность начала координат на две области, которые обозначим через D^+ (D^+ содержит отрезок положительной полуоси Ox_n) и D^- (D^- содержит отрезок отрицательной полуоси Ox_n). Обозначим через Γ_0 траекторию, выходящую из седла в область D^+.

Т е о р е м а 2. *Если:* 1) *при* $\mu = 0$ *и* $t \to +\infty$ *траектория* Γ_0 *входит в седло* O, *а при* $\mu > 0$ $(\mu < 0)$ *проходит мимо седла, пересекая* D^+; 2) $-Re\,\lambda_i > \lambda_n$, $i = 1, .., n-1$, *то при достаточно малых* $\mu > 0$ $(\mu < 0)$ *из* Γ_0 *рождается только одно периодическое движение, устойчивое при* $t \to +\infty$.

Можно указать такую поверхность S_0, уравнение которой $S_0(x_1, ..., x_{n-1}) = 0$, где функция S_0 дважды непрерывно дифференцируема, что Γ_0 при достаточно малых μ будет пересекать S_0. Обозначим точку пересечения Γ_0 с S_0 через M_μ^0, а через γ – пересечение поверхностей S_0 и I_{n-1}. Очевидно, точка M_0^0 (точка M_μ^0 при $\mu = 0$) лежит на γ. Можно доказать, что при каждом достаточно малом и фиксированном μ траектория системы (4), проходящая при $t = 0$ через точку M^0, близкую к $M_0^0 \in S_0$ и лежащую в D^+, при некотором $t = t_1$ снова пересечет поверхность S_0. Полученное отображение поверхности S_0 на себя обозначим через T. Если $-Re\lambda_i > \lambda_n,\ i = 1, .., n-1$, то при достаточно малых μ в точках M^0, близких к γ, норма линеаризованного отображения T будет меньше величины q, где $q < 1$.

Отметим, что отображение T можно доопределить по непрерывности на самой кривой γ и затем продолжить с сохранением гладкости на ту часть поверхности S_0, которая лежит в D^-. Это продолженное отображение, которое обозначим через $\tilde{T}$, при $\mu = 0$ будет иметь неподвижную точку M_0^0. Из теоремы о неявных функциях, в силу того, что якобиан в M_0^0 меньше единицы, следует, что при достаточно малых μ отображение $\tilde{T}$ будет иметь единственную и устойчивую неподвижную точку M_μ^*, стремящуюся к M_0^0 при $\mu \to 0$. Можно доказать, что точка M_μ^* будет лежать в D^+ и, следовательно, является неподвижной точкой отображения T, если M_μ^0 лежит также в D^+. Использовав связь между периодическими движениями и неподвижными точками, в результате приходим к теореме 2.

Исследовательский физико-технический институт
Горьковского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
2 XI 1961

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

(1) А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, ДАН, 14, № 5, 247 (1937).
(2) А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Уч. зап. Горьковск. гос. унив., в. 6,3 (1937); А. А. Андронов, Собр. тр. Изд. АН СССР, 1956, стр. 188.
(3) А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Матем. сборн., 48 (90), 3, 335 (1959).
(4) А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, 1959.
(5) Ю. И. Неймарк, Изв. Высш. учебн. завед., Радиофизика, № 1,41 (1958); № 2, 95 (1958); № 5-6, 146 (1958).
(6) Ю. И. Неймарк, ДАН, 129, 736 (1959).
(7) А. А. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935.
(8) Р. М. Минц, ДАН, 111, № 3, 539 (1956).
(9) А. А. Андронов, Вестн. АН СССР, № 6 (1944).
(10) А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, М.-Л., 1947.
(11) И. Г. Петровский, Матем. сборн., 41, 107 (1934).
(12) В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, 1949.
(13) Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления. Дополнение, 1, М.-Л., 1951.

1963 Математический Сборник т.61(103),№ 4, с. 443-466

О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий

Л.П. Шильников (Горький)

В настоящей работе рассматриваются два случая рождения устойчивых периодических движений из особых траекторий. Полученные результаты являются обобщением на n-мерный случай следующих бифуркаций периодических движений автономной системы второго порядка, рассмотренных в работах А. А. Андронова и Е. А. Леонтович [1], [2]:

1. Рождение предельного цикла из петли сепаратрисы простого состояния равновесия типа седло.

2. Рождение предельного цикла из сепаратрисы простейшего (двукратного) сложного состояния равновесия типа седло-узел, выходящей из него и возвращающейся в него же.

Перенесение этих результатов на n-мерный случай потребовало нового подхода, в основе которого лежит использование метода точечных отображений [3], [4].

Работа состоит из двух глав. В первой главе показано, что при исчезновении сложного состояния равновесия типа седло-узел из траектории, идущей из седло-узла в седло-узел и не лежащей на сепаратрисной поверхности, рождается только одно периодическое движение, устойчивое либо при $t \to +\infty$, либо при $t \to -\infty$. Заметим, что используемый метод доказательства позволяет в случае $n = 2$ усилить результат А. А. Андронова и Е. А. Леонтович, сняв ограничение на кратность седло-узла. Во второй главе установлены условия рождения устойчивого периодического движения из траектории, идущей из простого состояния равновесия типа седло в него же.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Ю. И. Неймарку, а также Е. А. Леонтович-Андроновой за полезные советы и обсуждение работы.

Глава I
Рождение периодического движения при исчезновении сложного состояния равновесия типа седло-узел

§ 1. Характеристика сложного состояния равновесия типа седло-узел

Рассмотрим систему $n+1$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_0, x_1, ..., x_n; \mu), i = 0, 1, ..., n. \tag{1.1}$$

Относительно функций X_i будем предполагать, что они определены и аналитичны (достаточно гладкие) по переменным $x_0, x_1, ..., x_n$ и параметру μ в области $G \times (-\mu_0, \mu_0)$. Здесь G – некоторая область $(n+1)$-мерного пространства переменных $x_0, x_1, ..., x_n$.

Предположим, что при $\mu = 0$ система (1.1) имеет состояние равновесия O, в котором один из корней $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения

$$\left| \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 - \delta_{ij}\lambda \right| = 0 \tag{1.2}$$

равен нулю, а у остальных корней действительные части имеют одинаковые знаки. Пусть $\lambda_1 = \alpha_1 + i\omega_1,\ \lambda_2 = \alpha_1 - i\omega_1, \ldots, \lambda_{2m} = \alpha_n - i\omega_n$ – комплексные корни, а $\lambda_{2m+1}, \ldots, \lambda_n$ – действительные ($\lambda_0 = 0$). Не ограничивая общности, можно считать, что корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ имеют отрицательные действительные части.

Система (1.1) с помощью линейной неособой замены переменных может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{gathered} \frac{dx_0}{dt} = P_0(x_0, x_1, ..., x_n; \mu), \\ \frac{dx_i}{dt} = L_i x + P_i(x_0, x_1, ..., x_n; \mu),\ i = 1, ..., n, \end{gathered} \tag{1.3}$$

где

$$L_i x = \begin{cases} \alpha_j x_{2j-1} - \omega_j x_{2j}, & \text{если } i = 2j - 1 < 2m, \\ \omega_j x_{2j-1} + \alpha_j x_{2j} + \beta_{2j+1}, & \text{если } i = 2j \le 2m, \\ \lambda_j x_j + \beta_j x_{j+1}, & \text{если } i = j > 2m, \end{cases}$$

а функции $P_i(x_0, x_1, ..., x_n; 0), i = 0, 1, \ldots, n$, обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными. При этом, если все корни характеристического уравнения (1.2) простые, то все $\beta_i = 0$.

Сделаем замену:

$$z_i = x_i - U_i(x_0, \mu),\ i = 1, \ldots, n, \tag{1.4}$$

где $x_i = U_i(x_0, \mu),\ i = 1, \ldots, n,$ – решение системы

$$L_i x + P_i(x_0, x_1, ..., x_n; \mu) = 0. \tag{1.5}$$

Тогда система (1.3) примет следующий вид:

$$\begin{gathered} \frac{dx_0}{dt} = Q_0(x_0, z_1, ..., z_n; \mu), \\ \frac{dz_i}{dt} = L_i z + Q_i(x_0, z_1, ..., z_n; \mu). \end{gathered} \tag{1.6}$$

Здесь функции $Q_i,\ i = 0, 1, ..., n$, представимы в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \sum_{j=1}^{n} Q_0^j(x_0, z_1, ..., z_n; \mu) z_j + R(x_0, \mu), \\ Q_i &= \sum_{j=1}^{n} Q_i^j(x_0, z_1, ..., z_n; \mu) z_j - \frac{\partial U(x_0, \mu)}{\partial \mu} R(x_0, \mu), \\ R(x_0, \mu) &= P_0(x_0, U_1(x_0, \mu), \ldots, U_n(x_0, \mu); \mu); \end{aligned} \tag{1.7}$$

при этом $Q_i^j(0, \ldots, 0; 0) = 0,\ i = 0, 1, ..., n;\ j = 1, ..., n.$

Предположим, что в разложении (см. [5])

$$R(x_0, 0) = l_m x_0^m + l_{m+1} x_0^{m+1} + \ldots \tag{1.8}$$

первая не равная нулю величина l_m (так называемая ляпуновская величина) имеет четный номер и положительна (случай, когда $l_m < 0$ приводится к рассматриваемому заменой x_0 на $-x_0$). Такое состояние равновесия O называется седло-узлом.

Поведение интегральных кривых системы (1.6) при $\mu = 0$ в достаточно малой окрестности $\sum$ рассматриваемого состояния равновесия описывается следующей теоремой, установленной Р.М. Минц (см. [6]).

Теорема. *Существует n-мерная сепаратрисная поверхность $\mathfrak{M}$, касающаяся плоскости $x_0 = 0$ и состоящая из O^+-кривых, которая разделяет $\sum$ на узловую и седловую области. В узловой области каждая интегральная кривая является O^+-кривой и входит внутрь поверхности*

$$\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - kx_0^{2m} = 0, \tag{1.9}$$

где $k \neq 0$ – произвольная положительная константа. В седловой области все интегральные кривые за исключением одной O^--кривой, лежащей внутри поверхности (1.9), проходят на конечном расстоянии от седло-узла.

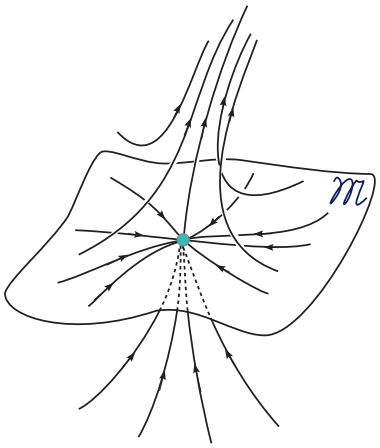


Рис. 1

В дополнение к теореме нам понадобится

Лемма 1. *Уравнения O-кривой, не лежащей на сепаратрисной поверхности $\mathfrak{M}$, в достаточно малой окрестности $\sum$ могут быть записаны в виде $z_i = \psi_i(x_0)$, $i = l, ..., n$, где функции ψ_i имеют непрерывные первые производные, обращающиеся в нуль при $x_0 = 0$.*

Пусть L – некоторая O-кривая, не лежащая на сепаратрисной поверхности $\mathfrak{M}$. Из теоремы следует, что существует такое $b > 0$, что при $-b \leq x_0 \leq 0$ $(0 \leq x_0 \leq b)$ L будет лежать внутри поверхности (1.9). Сделаем следующую замену переменных:

$$z_i = x_0^{m-1} z_i'. \tag{1.10}$$

В новых переменных систему (1.6) при $\mu = 0$, исключив время, можно записать в виде:

$$\frac{dz_i'}{dx_0} = \frac{L_i z' + Q_i'(x_0, z_1', \ldots, z_n')}{l_m x_0^m}, \quad i = 1, ..., n, \tag{1.11}$$

где функции $Q_i'(x_0, z_1', \ldots, z_n')$ обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными. Очевидно, L лежит внутри конуса $\sum\limits_{i=1}^{n} z_i'^2 - kx_0^2 = 0$ при $-b \leq x_0 \leq 0 (0 \leq x_0 \leq b)$ и является O-кривой системы (1.11). Сделаем замену

$$z_i'' = z_i' - V_i(x_0), \quad i = 1, ..., n, \tag{1.12}$$

где $z_i' = V_i(x_0)$, $i = 1, ..., n$, – решение системы

$$L_i z' + Q_i'(x_0, z_1', \ldots, z_n') = 0.$$

В новых переменных система (1.11) запишется в виде

$$\frac{dz_i''}{dx_0} = \frac{L_i z'' + Q_i''(x_0, z_1'', \ldots, z_n'')}{l_m x_0^m}, \tag{1.13}$$

где уже в разложениях функции $Q_i^{''}$ в окрестности начала координат отсутствуют члены вида $a_{ij}x_0^j,\ j \le m$.

Ясно, что O-кривая L при замене (1.12) не лежит в плоскости $x_0 = 0$. Поэтому, применив теорему к системе (1.13), получим, что при $-b_1 \le x_0 \le 0$ $(0 \le x_0 \le b_1)$, O-кривая L будет лежать внутри поверхности

$$\sum_{i=1}^{n} \left(z_i^{''}\right)^2 - kx_0^{2m} = 0. \tag{1.14}$$

Отсюда следует, что вдоль L будут выполняться следующие оценки:

$$\begin{aligned} &|z_i^{''}(x_0)| \le \sqrt{k}x_0^m, \\ &\left|\frac{dz_i^{''}}{dx_0}\right| < \frac{|\mathrm{Re}\ \lambda_i| + |\mathrm{Im}\ \lambda_i| + |\beta_i| + \varepsilon}{l_m}\sqrt{k}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

где ε – некоторая константа. В результате получим, что уравнения O-кривых L представимы в виде $z_i^{''} = \psi_i^{''}(x_0)$, где функции $\psi_i^{''}$ имеют ограниченные первые производные на сегменте $[-b_1, 0]([0, b_1])$.

Из гладкости функций V_i и из представления уравнений O кривой L в виде $z_i^{''} = x_0^{m-1}\psi_i'(x_0) = \psi_i(x_0)$ (здесь $z_i' = \psi_i'(x_0)$ – уравнения O-кривой L в переменных $x_0, z_1', \ldots, z_n'$) следует, что функции ψ_i на сегменте $[-b_1, 0]$ $([0, b_1])$ имеют непрерывные и ограниченные производные, причем $\dfrac{d\psi_i(0)}{dx_0} = 0$. Лемма доказана.

Пусть окрестность $\sum$ начала координат такова, что внутри ее и на границе система (1.3) при $\mu = 0$ не имеет состояний равновесия, отличных от рассматриваемого седло-узла. В силу положительности l_m, условие отсутствия в $\sum$ при достаточно малых μ состояний равновесия, координаты которых определяются из системы

$$\begin{gathered} P_0(x_0, x_1, \ldots, x_n; \mu) = 0, \\ L_i x + P_i(x_0, x_1, \ldots, x_n; \mu) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \end{gathered} \tag{1.16}$$

эквивалентно положительности выражения

$$R(x_0, \mu) = l_m x_0^m (1 + q_0(x_0)) + \mu q_1(x_0, \mu) \tag{1.17}$$

где $q_0(0) = 0$. В частности, достаточным условием отсутствия в $\sum$ состояний равновесия при достаточно малых μ является условие

$$\mu q_1(0, 0) > 0. \tag{1.18}$$

Достаточно малые значения параметра μ, при которых в $\sum$ нет состояний равновесия, образуют интервалы (один или два), одним из концов которых является точка с координатой $\mu = 0$, соответствующая существованию седло-узла. Отметим, что одновременное существование двух интервалов $(-\mu^*, 0)$ и $(0, \mu^*)$ возможно в том случае, когда $x_0 = \mu = 0$ – изолированное решение уравнения $R(x_0, \mu) = 0$.

Всюду ниже для значений параметра μ из указанных интервалов будем использовать обозначение $\bar{\mu}$.

§ 2. Теорема о рождении периодического движения из траектории, идущей из седло-узла в него же

В теореме § 1 отмечалось, что при $\mu = 0$ у системы (1.3) существует только одна O^--кривая, выходящая из седло-узла в седловую область. Обозначим эту траекторию через Γ_0. Предположим, что Γ_0 удовлетворяет следующим условиям:

1) Γ_0 при $t \to +\infty$ входит в седло-узел,

2) Γ_0 не лежит на сепаратрисной поверхности $\mathfrak{M}$.

Ниже мы установим следующую основную теорему первой части- работы.

Теорема 1. *При исчезновении седло-узла из* Γ_0 *рождается только одно периодическое движение, устойчивое при* $t \to +\infty$ (рис. 2).

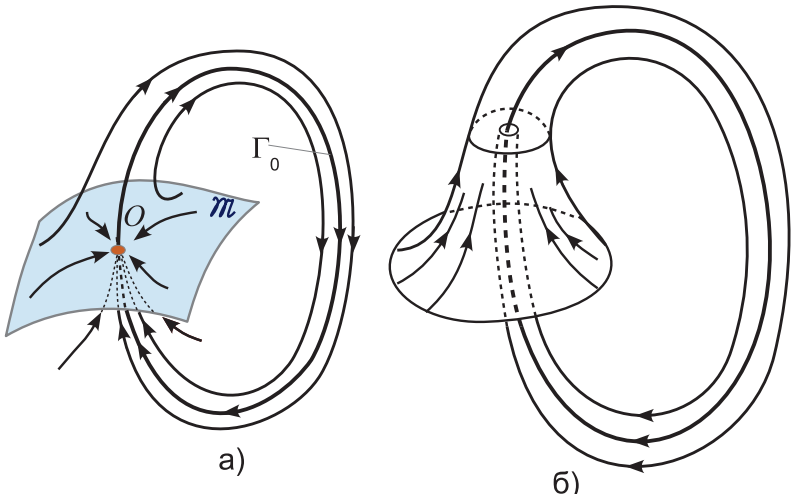


Рис.2

Для доказательства этого утверждения воспользуемся методом точечных отображений. Идея доказательства такова.

Пусть Γ – периодическое движение и S_0 – некоторая поверхность, пересекающая Γ в точке M^*. Фазовые траектории, близкие к периодическому движению Γ, порождают в окрестности точки M^* некоторое отображение T.

Как известно (см. [3,4]), устойчивому или неустойчивому периодическому движению Γ взаимно однозначно соответствует устойчивая или неустойчивая неподвижная точка M^* отображения T.

Из сказанного следует, что для доказательства существования периодического движения, рождающегося из траектории Γ_0, достаточно доказать существование неподвижной точки отображения T. В нашем случае в качестве поверхности S_0 мы выберем плоскость $x_0 = -d$ $(d > 0)$. Соответствующее точечное отображение будем искать в следующем виде:

$$T = T_1 T_0, \tag{2.1}$$

где T_0 – отображение плоскости S_0 в плоскость S_1, уравнение которой $x_0 = d$, а T_1 – отображение S_1 в S_0.

а) Вспомогательные утверждения.

Будем рассматривать поверхность

$$V(x_0, z_1, \ldots, z_n; \bar{\mu}) \equiv \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - R^2(x_0, \bar{\mu}) = 0. \tag{2.2}$$

Согласно определению $\bar{\mu}$ (см. § 1), $R(x_0, \bar{\mu}) > 0$ при $|x_0| < d_1$ и $|\bar{\mu}| < \bar{\mu}_1$, где d_1 и $\bar{\mu}_1$ – некоторые постоянные. Качественный вид этой поверхности изображен на рис.3. Очевидно, в области $V \leq 0$

$$|z_i| \leq R(x_0, \bar{\mu}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Лемма 2. *В области $V \leq 0$ при $|x_0| < d_2$ $(0 < d_2 \leq d_1)$ и $|\bar{\mu}| < \bar{\mu}_2$ $(0 < \bar{\mu}_2 \leq \bar{\mu}_1)$ справедливо неравенство:*

$$Q_0(x_0, z_1, \ldots, z_n; \bar{\mu}) > \frac{1}{2} R(x_0, \bar{\mu}). \tag{2.4}$$

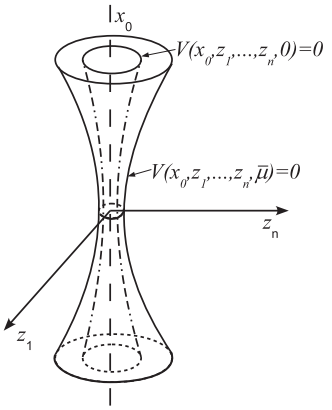


Рис. 3

Пусть $d_2 > 0$ $(d_2 \leq d_1)$ и $\bar{\mu}_2 > 0$ $(\bar{\mu}_2 \leq \bar{\mu}_1)$ таковы, что

$$\sum_{i=1}^{n} |Q_0^j| < \frac{1}{2}. \tag{2.5}$$

Тогда, используя оценки (2.3) и (2.5), получаем, что

$$Q_0(x_0, z_1, \ldots, z_n; \bar{\mu}) > R(x_0, \bar{\mu}) - R(x_0, \bar{\mu}) \sum_{j=1}^{n} |Q_0^j| > \frac{1}{2} R(x_0, \bar{\mu}).$$

Аналогично доказывается, что

$$Q_0(x_0, z_1, \ldots, z_n; \bar{\mu}) < \frac{3}{2} R(x_0, \bar{\mu}). \tag{2.6}$$

Используя соотношение (1.17), получаем отсюда, что

$$Q_0(x_0, z_1, \ldots, z_n; \bar{\mu}) < K_1 x_0^m + K_2 |\bar{\mu}|, \tag{2.7}$$

где K_1 и K_2 – некоторые постоянные.

Лемма 3. *Существуют такие $d_3 > 0$ и $\bar{\mu}_3 > 0$ $(d_3 \leq d_1, \bar{\mu}_3 \leq \bar{\mu}_1)$, что при $|x_0| < d_3$ и $|\bar{\mu}| \leq \bar{\mu}_3$ поверхность $V = 0$ будет поверхностью без контакта.*

Оценим следующее выражение:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial t} =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{n} z_i \left(L_i z + \sum_{j=1}^{n} Q_i^j z_j - \frac{\partial U_i}{\partial x_0} R \right) - 2 \frac{\partial R}{\partial x_0} R \left(\sum_{j=1}^{n} Q_0^j z_j + R \right).$$

Пусть $-\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \operatorname{Re}\lambda_i$ и β_i таковы, что $|\beta_i| < \frac{\lambda}{4n}$. Тогда для формы $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i L_i y$ справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{n} y_i L_i y < -\frac{3\lambda}{4}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \tag{2.8}$$

Оценивая $\frac{dV}{dt}$, получаем:

$$\frac{dV}{dt} \le -\frac{3}{2}\lambda\sum_{i=1}^{n} z_i^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} |Q_i^j||z_i||z_j| + 2R\sum_{i=1}^{n}|z_i|\left|\frac{\partial U_i}{\partial x_0}\right| +$$

$$+2R^2\left|\frac{\partial R}{\partial x_0}\right| + 2R\left|\frac{\partial R}{\partial x_0}\right|\sum_{j=1}^{n}|Q_0^j||z_j| \le \tag{2.9}$$

$$\le -\frac{3}{2}\lambda R^2 + 2R^2\left\{\sum_{i,j=1}^{n}|Q_i^j| + \sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial U_i}{\partial x_0}\right| + \frac{\partial R}{\partial x_0}\left(1 + \sum_{j=1}^{n}|Q_0^j|\right)\right\}.$$

Пусть d_3 и $\bar\mu_3$ таковы, что выражение в фигурных скобках в формуле (2.9) меньше $\frac{1}{4}\lambda$ при $|x_0| \le d_3$ и $|\bar\mu| \le \bar\mu_3$. Тогда $\frac{dV}{dt} < -\lambda R^2(x_0, \bar\mu) < 0$.

Лемма 4. *В области $V \le 0$ справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_0}\right| < K_3, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.10}$$

где K_3 – некоторая постоянная.

Действительно,

$$\left|\frac{\partial z_i}{\partial x_0}\right| = \left|\frac{L_i z + \sum\limits_{j=1}^{n} Q_i^j z_j - R\frac{\partial U_i}{\partial x_0}}{Q_0}\right| \le \frac{|\operatorname{Re}\lambda_i| + |\operatorname{Im}\lambda_i| + |\beta_i| + \sum\limits_{j=1}^{n} Q_i^j + \left|\frac{\partial U_i}{\partial x_0}\right|}{\frac{1}{2}} < K_3,$$

где K_3 – некоторая постоянная.

Замечание. Утверждение леммы 4 верно и при $\bar\mu = 0$.

Рассмотрим замкнутую поверхность S, составленную из следующих поверхностей:

$$\begin{gathered} \bar S_0 : x_0 = -d, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \le R^2(-d, \bar\mu), \\ V = 0, -d \le x_0 \le d, \\ \bar S_1 : x_0 = d, \quad \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \le R^2(d, \bar\mu), \end{gathered} \tag{2.11}$$

где d $(0 < d \le \min(d_2, d_3))$ – некоторая постоянная.

Из доказанного выше вытекает

Лемма 5. *Интегральная кривая L системы*

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_0} = \frac{L_i z + Q_i(x_0, z_1, \dots, z_n; \bar\mu)}{Q_0(x_0, z_1, \dots, z_n; \bar\mu)}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{2.12}$$

где $|\bar{\mu}| \leq \bar{\mu}_4 = \min(\bar{\mu}_2, \bar{\mu}_3)$, *проходящая через точку* $M_0(-d, z_1^0, \ldots, z_n^0) \in \bar{S}_0$, *пересекает поверхность* S *в некоторой точке* $M_1(d, z_1^1, \ldots, z_n^1) \in \bar{S}_1$.

Отметим, что уравнения кривой L будут записываться в виде:

$$z_i = \psi_i(x_0, M_0, \bar{\mu}) = \psi_i(x_0, z_1^0, \ldots, z_n^0; \bar{\mu}), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.13}$$

где ψ_i – аналитические функции при рассматриваемых $\bar{\mu}$.

Рассмотрим поверхность

$$W = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \left(\frac{l_m}{4}\right)^2 x_0^{2m} = 0 \tag{2.14}$$

Очевидно, при достаточно малых x_0 поверхность W будет лежать в области $V(x_0, z_1, ..., z_n; \bar{\mu}) \leq 0$. В частности, это имеет место для всех таких $|x_0| \leq d_4$, при которых $|q_0(x_0)| < \dfrac{l_m}{2}$.

Пусть L_0' – интегральная кривая системы (2.12) с $\bar{\mu} = 0$, проходящая через точку $M_0(-d, z_1^0, \ldots, z_n^0) \in \sigma_0$, где σ_0 – множество: $x_0 = -d \sum\limits_{i=1}^{n} z_i^2 \leq \left(\frac{l_m}{4}\right)^2 d^{2m}$. Уравнения кривой L_0' имеют вид:

$$z_i = \psi_i^0(x_0, M_0) = \psi_i^0(x_0, z_1^0, \ldots, z_n^0), \quad i = 1, \ldots, n; \tag{2.15}$$

здесь функции ψ_i^0 определены и непрерывно дифференцируемы на множестве $[-d_4, 0]$. Согласно теореме § 1, кривая L_0' при достаточно малых x_0 лежит в области $W \leq 0$, а следовательно, и в области $V(x_0, z_1, \ldots, z_n; 0) \leq 0$ при $-d_4 \leq x_0 \leq 0, d_4 > d$. С другой стороны, у системы (2.12) при $\bar{\mu} = 0$ существует только одна интегральная кривая, выходящая из седло-узла, уравнения которой можно записать в следующем виде:

$$z_i = \psi_i^0(x_0), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{2.16}$$

где функции ψ_i^0 определены и непрерывно дифференцируемы на множестве $[0, d_4]$. Рассмотрим кривую L_0:

$$z = \psi_i^0(x_0, M_0) = \begin{cases} \psi_i^0(x_0, M_0), & \text{если} \quad -d_4 \leq x_0 \leq 0, \\ \psi_i^0(x_0), & \text{если} \quad 0 \leq x_0 \leq d_4. \end{cases} \tag{2.17}$$

Очевидно, L_0 можно рассматривать как интегральную кривую системы (2.12) с $\bar{\mu} = 0$, проходящую через точку $M_0(-d, z_1^0, ..., z_n^0) \in \sigma_0$. Из леммы 1 § 1 вытекает, что функции ψ_i^0 непрерывно дифференцируемы при всех рассматриваемых x_0.

Лемма 6. *Для любого* $x_0 \in [-d_5, d_5]$, *где* d_5 *– некоторая постоянная* $(0 < d \leq d_5 \leq \min(d_3, d_4))$,

$$\lim_{\bar{\mu} \to 0} \psi_i(x_0, M_0, \bar{\mu}) = \psi_i^0(x_0, M_0), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.18}$$

Пусть $\rho = \sum\limits_{i=1}^{n} (\psi_i - \psi_i^0)^2$. Рассмотрим выражение:

$$\frac{d\rho}{dx_0} = 2 \sum_{i=1}^{n} (\psi_i - \psi_i^0) \left(\frac{d\psi_i}{dx_0} - \frac{d\psi_i^0}{dx_0}\right) =$$
$$= 2 \sum_{i=1}^{n} (\psi_i - \psi_i^0) \left[\frac{L_i\psi + Q_i(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})} - \frac{L_i\psi^0 + Q_i(x_0, \psi_1^0, ..., \psi_n^0; 0)}{Q_0(x_0, \psi_1^0, ..., \psi_n^0; 0)}\right] =$$
$$= \frac{2}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})} \sum_{i=1}^{n} (\psi_i - \psi_i^0) \left(G_i - \frac{d\psi_i^0}{dx_0} G_0 + L_i(\psi_i - \psi_i^0)\right),$$

где

$$G_i = Q_i(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu}) - Q_i(x_0, \psi_1^0, ..., \psi_n^0; 0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial z_j}(\psi_i - \psi_i^0) + \frac{\partial \tilde{Q}_i}{\partial \bar{\mu}}\bar{\mu}, \quad i = 0, 1, ..., n.$$

Пусть d_5 и $\bar{\mu}_5$ таковы, что при $|x_0| \le d_5, d_5 \le \min(d_3, d_4)$ и $0 \le |\bar{\mu}| \le \bar{\mu}_5$ ($\bar{\mu}_5 \le \min(\bar{\mu}_3, \bar{\mu}_4)$) имеет место оценка

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(\left| \frac{\partial Q_i}{\partial z_j} \right| + K_3 \left| \frac{\partial Q_i}{\partial z_j} \right| \right) |\xi_i||\xi_j| < \frac{\lambda}{4} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{2.19}$$

где, согласно лемме 4 и замечанию, $\left| \frac{d\psi_i}{dx_0} \right| < K_3$ при всех рассматриваемых $\bar{\mu}$, включая $\bar{\mu} = 0$.

Используя оценку (2.19), можно получить следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{d\rho}{dx_0} < -\frac{\lambda\rho - K|\bar{\mu}|}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})}, \tag{2.20}$$

где K – некоторая постоянная. Интегрируя это неравенство и учитывая при этом начальное условие $\rho(-d, \bar{\mu}) = 0$, в результате получаем, что

$$\rho(x_0, \bar{\mu}) < \frac{K|\bar{\mu}|}{\lambda} \left[1 - \exp\left(-\lambda \int_{-d}^{x_0} \frac{dx_0}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})} \right) \right]. \tag{2.21}$$

Из неравенства (2.21) вытекают соотношения (2.18).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dx_0} = \frac{L_i\xi + \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial Q_i}{\partial z_j} \right)_{z_k=\psi_k} - \frac{d\psi_i}{dx_0} \left(\frac{\partial Q_0}{\partial z_j} \right)_{z_k=\psi_k} \right] \xi_j}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})}. \tag{2.22}$$

Это – система уравнений в вариациях в окрестности решения (2.13). Обозначим через $A(x_0, \bar{\mu})$ матрицу $\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial z_j^0} \right)$; $i, j = 1, ..., n$. При $x_0 = -d$ матрица $A(x_0, \bar{\mu})$ обращается в единичную. Легко видеть, что каждый столбец матрицы $A(x_0, \bar{\mu})$ является решением системы (2.22).

Лемма 7. *Для нормы матрицы $A(x_0, \bar{\mu})$ справедлива оценка*

$$\|A(x_0, \bar{\mu})\| < n \exp\left(-\frac{\lambda}{2} \int_{-d}^{x_0} \frac{dx_0}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})} \right), \tag{2.23}$$

Действительно, умножив i-е уравнение в (2.23) на $2\xi_i$ и просуммировав полученные соотношения по всем i, можно получить, используя оценки (2.8) и (2.19), следующее дифференциальное неравенство:

$$\frac{d\eta}{dx_0} < -\frac{\lambda\eta}{Q_0(x_0, \psi_1, ..., \psi_n; \bar{\mu})}, \tag{2.24}$$

где $\eta = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Интегрируя неравенство (2.24) и учитывая начальное условие $\eta(-d,\bar{\mu}) = 1$, получаем, что

$$\eta(x_0;\bar{\mu}) < \exp\left(-\lambda \int\limits_{-d}^{x_0} \frac{dx_0}{Q_0(x_0,\psi_1,...,\psi_n;\bar{\mu})}\right). \tag{2.25}$$

Из (2.25) вытекает оценка (2.23).

Лемма 8. *При всех рассматриваемых $x_0 \geq 0$ имеет место соотношение*

$$\lim_{\bar{\mu}\to 0} \int\limits_{-d}^{x_0} \frac{dx_0}{Q_0(x_0,\psi_1,...,\psi_n;\bar{\mu})} = +\infty. \tag{2.26}$$

Используя оценку (2.7), получаем

$$\int\limits_{-d}^{x_0} \frac{dx_0}{Q_0(x_0,\psi_1,...,\psi_n;\bar{\mu})} > \int\limits_{-d}^{-|\bar{\mu}|} \frac{dx_0}{K_1 x_0^m + K_2|\bar{\mu}|} >$$
$$> \int\limits_{-d}^{-|\bar{\mu}|} \frac{dx_0}{\left(-\sqrt[m]{K_1}x_0 + \sqrt[m]{K_2|\bar{\mu}|}\right)^m}.$$

Легко видеть, что последний интеграл стремится к бесконечности при $\bar{\mu} \to 0$.

б) Построение точечного отображения T_0.

По предположению, при $\mu = 0$ траектория Γ_0 не лежит на сепаратрисной поверхности $\mathfrak{M}$. Следовательно, в силу теоремы § 1, Γ_0 при достаточно малых x_0 будет лежать внутри поверхности

$$W \equiv \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \left(\frac{l_m}{4}\right)^2 x_0^{2m} = 0.$$

Поэтому можно указать такое $d > 0$, что Γ_0 будет пересекать поверхности

$$\sigma_0 :\ x_0 = -d, \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leq \left(\frac{l_m}{4}\right)^2 d^{2m} \ \text{ и } \ \sigma_1 :\ x_0 = d, \sum_{i=1}^{n} z_i^2 \leq \left(\frac{l_m}{4}\right) d^{2m}.$$

Очевидно, что при достаточно малых $\bar{\mu}$ $\sigma_0 \subset \bar{S}_0$ и $\sigma_1 \subset \bar{S}_1$.

Обозначим точки пересечения траектории Γ_0 с поверхностями σ_0 и σ_1 через M_0^0 и M_1^0. Отметим, что координаты точки M_1^0 будут $(d, \psi_1^0(d), ..., \psi_n^0(d))$, где $z_i = \psi_i^0(x_0)$ – уравнения траектории Γ_0.

Согласно лемме 5, каждой точке $M_0 \in \sigma_0$ соответствует некоторая точка $M_1 \in \bar{S}_1$. Порождаемое таким соответствием точечное отображение обозначим через T_0:

$$z_i^1 = \psi_i(d, z_1^0, ..., z_n^0; \bar{\mu}), \quad i = 1, ..., n. \tag{2.27}$$

Из леммы 6 вытекает

Лемма 9. *Каково бы ни было $\delta > 0$, можно указать такое $\bar{\mu}(\delta) > 0$ $(\bar{\mu}(\delta) \leq \min(\mu_1, ..., \mu_5))$, что при всех $|\bar{\mu}| < \bar{\mu}(\delta)$ множество $T_0\sigma_0$ будет лежать в δ-окрестности точки M_1^0.*[1]

[1]Здесь, и ниже под δ-окрестностью точки M понимается n-мерный шар радиуса δ с центром в точке M.

Комбинируя результаты лемм 6 и 7, получаем следующую лемму.

Лемма 10. *Норма матрицы* $A_0(\bar{\mu}) = \left(\dfrac{\partial \psi_i(d, z_1^0, ..., z_n^0; \bar{\mu})}{\partial z_j^0}\right)$ *линеаризованного отображения* T_0 *стремится к нулю при* $\bar{\mu} \to 0$.

Действительно, матрица $A_0(\bar{\mu})$ совпадает с матрицей $A(d, \bar{\mu})$, для которой, согласно лемме 7, справедлива оценка (2.23). Используя соотношение (2.26), получаем, что $\|A_0(\bar{\mu})\| \to 0$ при $\bar{\mu} \to 0$.

в) Построение точечного отображения T_1.

Выше было отмечено, что траектория Γ_0 пересекает без касания плоскости S_0 и S_1 в точках M_0^0 и M_1^0. Из общих теорем теории точечных отображений следует, что при всех достаточно малых $\bar{\mu}$ между некоторыми окрестностями точек M_0^0 и M_1^0 (на плоскостях S_0 и S_1) можно установить по траекториям системы (1.3) взаимно однозначное отображение, которое мы обозначим через T_1.

Это отображение T_1:

$$\bar{x}_i^0 = f_i(x_i^1, ..., x_n^1; \bar{\mu}), \quad i = 1, ..., n, \tag{2.28}$$

непрерывно и имеет непрерывные ограниченные первые производные по всем, переменным.

Пусть $U(r, M_i^0)$ – r-окрестность точки M_i^0 на плоскости S_i, $i = 0, 1$.

Лемма 11. *Каково бы ни было* $\varepsilon > 0$, *можно указать такие* $\delta(\varepsilon)$ *и* $\bar{\mu}(\varepsilon)$, *что при* $|\bar{\mu}| < \bar{\mu}(\varepsilon)$ *множество* $T_1 U(\delta, M_1^0)$ *будет лежать* $U(\varepsilon, M_0^0)$.

г) Доказательство теоремы.

Точка M_0^0 является внутренней точкой множества σ_0. Поэтому можно указать такое $\varepsilon > 0$, что будет выполняться соотношение

$$U(\varepsilon, M_0^0) \ \subset \ \sigma_0. \tag{2.29}$$

Выбранному ε, согласно лемме 11, соответствуют такие $\delta > 0$ и $\bar{\mu}_6 > 0$ ($\bar{\mu}_6 \leq \bar{\mu}_5$), что при $|\bar{\mu}| \leq \bar{\mu}_6$

$$T_1 U(\delta, M_1^0) \subset U(\varepsilon, M_0^0). \tag{2.30}$$

Из леммы 10 вытекает, что при $\bar{\mu} \to 0$ множество $T_0\sigma_0$ стягивается к точке M_1^0. Поэтому можно указать такое $\bar{\mu}_7 > 0$ ($\bar{\mu}_7 \leq \bar{\mu}_6$), что при всех $|\bar{\mu}| \leq \bar{\mu}_7$

$$T_0\sigma_0 \subset U(\delta, M_1^0). \tag{2.31}$$

В результате получаем, что при $|\bar{\mu}| \leq \bar{\mu}_7$

$$T_1 T_0 \sigma_0 \subset \sigma_0. \tag{2.32}$$

Рассмотрим точечное отображение $T = T_1 T_0$. Обозначим через $H_0(\mu)$ и $H_1(\mu)$ отображения на плоскостях S_0 и S_1, порождаемые формулами (1.4). Формально отображение T можно аналитически записать в следующем виде:

$$T = H_0(\bar{\mu}) T_1 H_1^{-1}(\bar{\mu}) T_0.$$

Из соотношения (2.32) следует, что при $|\bar{\mu}| \leq \bar{\mu}_7$ отображение T определено на σ_0 и отображает σ_0 в себя. Нетрудно видеть, что отображение T является сжатым. Это следует из ограниченности норм матриц линеаризованных отображений H_0, T_1 и H_1^{-1} и леммы 10, в силу которой норма матрицы $A(\bar{\mu})$ линеаризованного отображения T_0 стремится к нулю

при $\bar{\mu} \to 0$. Следовательно, отображение T_0 при $|\bar{\mu}| < \bar{\mu}_8$ ($\bar{\mu}_8 \leq \bar{\mu}_7$) имеет только одну устойчивую неподвижную точку $M^*_{\bar{\mu}}$, стремящуюся к точке M^0_0 при $\bar{\mu} \to 0$. Из отмеченной выше связи между периодическими движениями и неподвижными точками вытекает существование единственного и устойчивого периодического движения $\Gamma_{\bar{\mu}}$, рождающегося из траектории Γ_0.

Глава II
Рождение периодического движения из траектории, идущей из седла в седло

§ 3. Постановка задачи и формулировка второй основной теоремы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, ..., x_n; \mu), \ i = 1, ..., n. \tag{3.1}$$

определенную в некоторой области $G \times (-\mu_0, \mu_0)$. Правые части системы являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями переменных $x_1, ..., x_n$ и параметра μ.

Предположим, что при $\mu = 0$ система (3.1) имеет простое состояние равновесия O типа седло, в котором все корни характеристического уравнения

$$\left| \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j} \right)_0 - \delta_{ij}\lambda \right| = 0 \tag{3.2}$$

кроме $\lambda_n > 0$, имеют отрицательные действительные части.[2] Будем также предполагать, что кратных корней нет.

С помощью линейной неособой замены переменных систему (3.1) при достаточно малых μ можно привести к следующему виду:

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i(\mu)x_i + P_i(x_1, ..., x_n; \mu), \quad i = 1, ..., n, \tag{3.3}$$

где функции $P_i(x_1, ..., x_n; \mu)$ $\quad (P_i(0, ..., 0; \mu) \equiv 0)$ обращаются в нуль в начале координат вместе со своими производными по переменным $x_1, ..., x_n$.

Как известно (см. [7], [8]), в этом случае существуют два интегральных многообразия $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_{n-1}$, на которых расположены O-кривые рассматриваемого состояния равновесия O. Многообразие $\mathfrak{M}_1$ состоит из двух O^--кривых. Его уравнения в достаточно малой окрестности начала координат записываются в следующем виде:

$$x_i = F_i(x_n; \mu), \quad i = 1, ..., n-1, \tag{3.4}$$

где F_i – дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial F_i(0; \mu)}{\partial x_n} \equiv 0, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{3.5}$$

[2] Случай, когда $n-1$ корней имеют положительные действительные части, а $\lambda_n < 0$, сводится к рассматриваемому заменой t на $-t$.

Многообразие $\mathfrak{M}_{n-1}$ состоит из O^+-кривых и имеет размерность $n-1$. Уравнение многообразия $\mathfrak{M}_{n-1}$ записывается в следующем виде:

$$x_n = F_n(x_1, ..., x_{n-1}; \mu), \tag{3.6}$$

где F_n – также дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\frac{\partial F_n(0, ..., 0; \mu)}{\partial x_j} \equiv 0, \quad j = 1, ..., n-1, \tag{3.7}$$

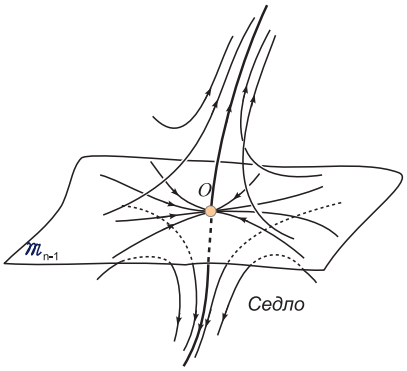


Рис. 4

Многообразие $\mathfrak{M}_{n-1}$ разделяет окрестность начала координат на области $x_n - F_n > 0$ и $x_n - F_n < 0$; эти области мы обозначим соответственно через D^+ и D^-.

Обозначим через Γ_0 O^--кривую, выходящую из седла в область D^+.

Предположим, что Γ_0 при $\mu = 0$ и $t \to +\infty$ входит в седло OO, а при $\mu \neq 0$ проходит мимо седла. В силу непрерывной зависимости от параметра, Γ_0 будет при достаточно малых $\mu \neq 0$ входить в фиксированную окрестность начала координат. Мы будем предполагать, что траектория Γ_0 при малых $\mu > 0$ ($\mu < 0$) входит в окрестность седла, пересекая область D^+.

Ниже будет доказана вторая основная теорема работы.

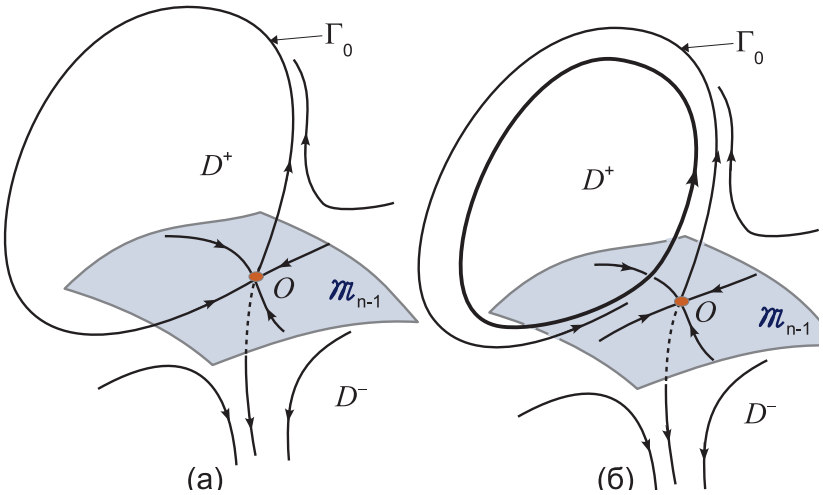


Рис. 5

Теорема 2. *Если* $-\mathrm{Re}\ \lambda_i(0) > \lambda_n(0)$, $i = 1, ..., n-1$, *то при достаточно малых* $\mu > 0$ *(*$\mu < 0$*) из* Γ_0 *рождается только одно периодическое движение, и это периодическое движение устойчиво.*

Для доказательства этой теоремы мы также воспользуемся методом точечных отображений. Предварительно приведем систему к более удобному виду и установим некоторые

свойства интегральных кривых в окрестности седла. Сделаем следующую замену переменных:

$$y_i = x_i - F_i(x_n;\mu),\ i = 1, ..., n-1,\ \ y_n = x_n - F_n(x_1, ..., x_{n-1};\mu). \tag{3.8}$$

В новых переменных система (3.3) примет вид:

$$\frac{dy_i}{dt} = \lambda_i(\mu)y_i + R_i(y_1, ..., y_n;\mu),\ \ i = 1, ..., n, \tag{3.9}$$

причем функции R_i запишутся так:

$$\begin{aligned} R_i(y_1, ..., y_n;\mu) &= \sum_{j=1}^{n-1} R_i^j(y_1, ..., y_n;\mu)y_j, \\ R_n(y_1, ..., y_n;\mu) &= R_n^n(y_1, ..., y_n;\mu)y_n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Произведем замену

$$t_1 = \frac{t}{\lambda_n(\mu) + R_n^n} \tag{3.11}$$

и сохраним старое обозначение времени. Тогда система (3.9) примет вид:

$$\frac{dy_i}{dt} = \nu_i(\mu)y_1 + Q_i(y_1, ..., y_n;\mu),\ \ i = 1, ..., n-1,\ \ \frac{dy_n}{dt} = y_n, \tag{3.12}$$

где $\nu_i(\mu) = \lambda_i(\mu)\lambda_n(\mu)^{-1}$ и

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n-1} Q_i^j(y_1, ..., y_n;\mu)y_j. \tag{3.13}$$

Уравнения траектории L, проходящей при $t = 0$ через точку $M_0(y_1^0, ..., y_n^0)$, будут удовлетворять следующим интегральным уравнениям:

$$\begin{aligned} y_i(t) = y_i^0 e^{\nu_i t} + \int_0^t Q_i(y_1(\tau), ..., y_n(\tau);\mu)e^{\nu_i(t-\tau)}d\tau,\ i = 1, ..., n-1, \\ y_n(t) = y_n^0 e^t. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Пусть δ-окрестность начала координат есть n-мерный шар радиуса δ, и $y_i(t), i = 1, ..., n$, – решение системы (3.12), проходящее при $t = 0$ через точку M_0, принадлежащую δ-окрестности. Ниже мы будем рассматривать решение $y_i(t)$ при тех $t \geq 0$, при которых оно остается в δ-окрестности начала координат.

Лемма 1. *Существует такое δ, что при всех достаточно малых μ в δ-окрестности начала координат для решения $y_i(t)$ справедливы оценки*

$$|y_i(t)| < 2\delta e^{\nu(\mu)t},\ \ i = 1, ...n-1, \tag{3.15}$$

где

$$\nu(\mu) = \max_{1\leq i\leq n-1} \operatorname{Re} \nu_i(\mu). \tag{3.16}$$

Будем искать решение системы (3.14) методом последовательных приближений:

$$\begin{gathered} y_i^1(t) = y_i^0 e^{\nu_i t}, \\ y_i^{N+1}(t) = y_i^0 e^{\nu_i t} + \int_0^t Q_i(y_1^N(\tau), ..., y_{n-1}^N(\tau), y_n^0 e^\tau;\mu)e^{\nu_i(t-\tau)}d\tau, \\ i = 1, ..., n-1. \end{gathered}$$

Очевидно, что оценка (3.15) выполняется при $N = 0$. Предположим, что она верна для N и докажем ее справедливость для $N + 1$. Предварительно отметим, что так как все рассмотрение ведется в некоторой достаточно малой δ-окрестности начала координат, то в ней будет выполняться следующее неравенство:

$$|y_n^0|e^t < \delta. \tag{3.17}$$

Оценим $(N + 1)$-е приближение:

$$|y_i^{N+1}(t)| \leq \delta e^{\nu t} + M \int\limits_0^t \left(\sum_{i,k=1}^{n-1} |y_i^N(\tau)||y_k^N(\tau)| + \sum_{k=1}^{n-1} |y_i^N(\tau)||y_n^0 e^\tau)| \right) e^{\nu(t-\tau)} d\tau \leq$$
$$\leq \delta e^{\nu t} + \left[\tfrac{4M}{|\nu|}(n-1)^2\delta^2 + 2M\delta(n-1) \int\limits_0^t |y_n^0|e^\tau) d\tau \right] e^{\nu t},$$

где

$$M = \max_{i,j,k,} \left| \frac{\partial^2 Q_i}{\partial y_j \partial y_k} \right|.$$

Так как, в силу неравенства (3.17),

$$\int\limits_0^t |y_n^0|e^\tau) d\tau = |y_n^0|(e^t - 1) < \delta,$$

то, выбрав такие δ и $\mu_1 > 0$, что при всех $|\mu| < \mu_1$

$$\frac{4M}{|\nu(\mu)|}(n-1)^2\delta + 2M\delta(n-1) < \frac{1}{2},$$

получим:

$$|y_i^{N+1}(t)| < \frac{3}{2}\delta e^{\nu(\mu)t} < 2\delta e^{\nu(\mu)t}. \tag{3.18}$$

Так как $y_i(t) = \lim\limits_{N\to+\infty} y_i^N(t)$, то из неравенства (3.18) следует, что

$$|y_i(t)| < 2\delta e^{\nu t}, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{3.19}$$

Используя представление (3.13) и оценки (3.19), легко получаем, что

$$\left| \frac{dy_i(t)}{dt} \right| < K e^{\nu t}, \tag{3.20}$$

где K – некоторая постоянная.

Пусть

$$y_i(t) = y_i(t, y_1^0, ..., y_n^0; \mu), \quad i = 1, ..., n-1, \quad y_n(t) = y_n^0 e^t \tag{3.21}$$

– решение системы (3.12), проходящее при $t = 0$ через точку $M_0(y_1^0, ..., y_n^0)$.

Ниже мы будем оценивать производные $\dfrac{\partial y_i(t)}{\partial y_j^0}$. Предварительно сформулируем два следствия из следующей известной леммы.

Лемма об интегральном неравенстве.
Если

$$x(t) < f(t) + \varepsilon \int\limits_0^t x(\tau)d\tau,$$

то

$$x(t) < f(t) + \varepsilon \int\limits_0^t e^{\varepsilon(t-\tau)} f(\tau)d\tau.$$

Следствие 1. *Если $f(t) = K$, где K – постоянная, то $x(t) < Ke^{\varepsilon t}$.*

Следствие 2. *Если $f(t) = Ke^{\gamma t}$ и $\gamma > \varepsilon > 0$, то $x(t) < \dfrac{K\gamma}{\gamma - \varepsilon} e^{\gamma t}$.*

Лемма 2. *Существует такое $\delta_1 > 0$ ($\delta_1 \le \delta_2$), что при всех достаточно малых μ в δ_1-окрестности будут иметь место следующие оценки:*

$$\left| \frac{\partial y_i(t, y_1^0, ..., y_n^0; \mu)}{\partial y_k^0} \right| < e^{-\gamma(\mu)t}, \quad i, k = 1, ..., n-1, \tag{3.22}$$

где $\gamma(\mu) > 0$.

Из интегральных соотношений (3.14) следует, что производные $\dfrac{\partial y_i}{\partial y_k^0}$ удовлетворяют следующим интегральным неравенствам:

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_k^0} = \delta_{ik} e^{\nu_i t} + \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial Q_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j(\tau)}{\partial y_k^0} e^{\nu_i(t-\tau)} d\tau, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial y_i(t)}{\partial y_k^0} \right| < e^{\nu t} + M_1 (n-1)^2 \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial y_i(\tau)}{\partial y_k^0} \right| e^{\nu(t-\tau)} d\tau,$$

где $M_1 = \max\limits_{i,j} \left| \dfrac{\partial Q_i}{\partial y_j} \right|$, или что

$$x(t) < 1 + \varepsilon \int\limits_0^t x(\tau)d\tau, \tag{3.24}$$

где

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \left| \frac{\partial y_i(t)}{\partial y_k^0} \right| e^{-\nu t}, \quad \varepsilon = M_1 (n-1)^2.$$

Воспользовавшись следствием 1, получаем, что

$$\left| \frac{\partial y_i(t)}{\partial y_k^0} \right| < e^{-\gamma(\mu)t}, \quad i = 1, ..., n-1, \tag{3.25}$$

где $\gamma(\mu) = -(\nu(\mu) + \varepsilon)$. Выбрав такую δ_1-окрестность начала координат, чтобы $M_1 < \dfrac{\nu(0)}{2(n-1)^2}$, получим, что $\gamma(\mu) > 0$ при всех достаточно малых μ.

Лемма 3. *При всех достаточно малых μ в некоторой δ_2-окрестности ($0 < \delta_2 \leq \delta_1$) справедливы следующие оценки:*

$$\left|\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_k^0}\right| < Ke^{1+\nu(\mu))t}, \quad i = 1, ..., n-1, \tag{3.26}$$

Производные $\dfrac{\partial y_i}{\partial y_n^0}$ удовлетворяют следующим интегральным уравнениям:

$$\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_n^0} = \int\limits_0^t \left[\frac{\partial Q_i}{\partial y_n} e^{\tau} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial Q_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial y_n^0}\right] e^{\nu_i(t-\tau)} d\tau, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{3.27}$$

Нетрудно получить, что

$$\left|\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_n^0}\right| < K_1 e^{(1+\nu)t} + M_1(n-1) \int\limits_0^t \sum_{i=1}^{n-1} \left|\frac{\partial y_i(\tau)}{\partial y_n^0}\right| e^{\nu(t-\tau)} d\tau, \quad i = 1, ..., n-1, \tag{3.28}$$

где $K_1 = 2M(n-1)\delta_2$.

Действительно, используя оценки (3.19), имеем

$$\left|\int\limits_0^t \frac{\partial Q_i}{\partial y_n} e^{\tau} e^{\nu_i(t-\tau)d\tau}\right| \leq \int\limits_0^t \sum_{j=1}^{n-1} \left|\frac{\partial Q_i^j}{\partial y_n}\right| |y_j(\tau)| \, e^{\tau} e^{\nu(t-\tau)} d\tau <$$

$$< 2\delta_2(n-1)M \int\limits_0^t e^{\nu\tau} e^{\tau} e^{\nu(t-\tau)} d\tau < 2(n-1)M\delta_2 e^{(1+\nu)t}.$$

Оценка другого члена очевидна. Просуммировав неравенства (3.28) и введя обозначение $x(t) = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \left|\dfrac{\partial y_i(t)}{\partial y_n^0}\right| e^{-\nu t}$, получим, что

$$x(t) < K_1(n-1)e^t + \varepsilon \int\limits_0^t x(\tau) d\tau, \tag{3.29}$$

где $\varepsilon = M_1(n-1)^2$. Пусть δ_2-окрестность такова, что $M_1 < \frac{1}{2}(n-1)^{-2}$ ($\delta_2 \leq \delta_1$). Тогда, применив следствие 2 леммы об интегральном неравенстве, получим, что

$$\left|\frac{\partial y_i(t)}{\partial y_k^0}\right| < Ke^{1+\nu(\mu))t}, \quad i = 1, ..., n-1.$$

§ 4. Доказательство теоремы 2

Как и в первой части работы, доказательство существования периодического движения, рождающегося из траектории Γ_0, сведем к доказательству существования неподвижной точки некоторого точечного отображения T, которое будем искать в виде произведения отображений T_0 и T_1. Отображение T_0 будем строить в окрестности седла, а T_1 – в окрестности траектории Γ_0.

а) Построение отображения T_0.

В переменных $y_1, ..., y_n$ уравнения многообразия $\mathfrak{M}_1$ будут $y_1 = 0, ..., y_{n-1} = 0$. По предположению (которое не ограничивает общности), траектория Γ_0 выходит в область D^+. Следовательно, рассматриваемый кусок траектории Γ_0, который мы обозначим через Γ_0^-, будет иметь уравнения $y_1 = 0, ..., y_{n-1} = 0$ $(y_n \geq 0)$ и будет пересекать плоскость S_1, уравнение которой $y_n = d_1$, где $d_1 > 0$ – постоянная. Будем предполагать величину d_1 такой, что точка $M_1^0(0, ..., 0, d_1)$ лежит в δ_2-окрестности начала координат (δ_2-окрестность введена в рассмотрение в лемме 3 § 3) вместе со своей некоторой окрестностью.

При $\mu = 0$ и $t \to +\infty$ траектория Γ_0 входит в седло и, следовательно, лежит на сепаратрисной поверхности $\mathfrak{M}_{n-1}$, уравнение которой в достаточно малой окрестности начала координат в новых переменных будет $y_n = 0$. Обозначим через Γ_0^+ этот кусок траектории Γ_0 при $\mu = 0$. По предположению, все корни характеристического уравнения (3.2) при $\mu = 0$ различны. Следовательно, (см. [7], [8]) Γ_0^+ при $\mu = 0$ и $t \to +\infty$ входит в седло, либо касаясь некоторой координатной оси, либо без определенного направления, касаясь двумерной плоскости. Без ограничения общности можно считать, что в первом случае Γ_0^+ пересекает плоскость $S_0 : y_{n-1} = d_0$, где d_0 – некоторая постоянная, а во втором случае – плоскость $S_0 : y_{n-2} + y_{n-1} = 0$.[3] Точку пересечения траектории Γ_0^+ с указанной секущей поверхностью S_0 обозначим через M_0^0.

При этом будем предполагать, что если имеет место первый случай, то величина d_0 такова, что точка M_0^0 вместе с некоторой своей окрестностью лежит в δ_2-окрестности начала координат.

Если же имеет место второй случай, то, как известно, траектория Γ_0^+ будет пересекать поверхность S_0 в счетном множестве точек $\{M_n\}$, имеющих единственную предельную точку $O(0, ..., 0)$. Точка M_0^0 будет одной из них. На окрестность M_0^0 наложим следующее ограничение: потребуем, чтобы точка чтобы точка M_0^0 лежала внутри δ_2-окрестности начала координат вместе с некоторой своей окрестностью и чтобы эта окрестность не содержала ни одной точки последовательности $\{M_n\}$, кроме M_0^0.

Пересечение выбранной таким образом окрестности точки M_0^0 с плоскостью S_0 обозначим через $\bar{S}_0$.

Пусть

$$y_i(t) = y_i(t, y_1^0, ..., y_n^0; \mu), \quad i = 1, ..., n-1,$$
$$y_n(t) = y_n^0 e^t$$

– решение системы (3.12), проходящее через точку $M_0(y_1^0, ..., y_n^0) \in \bar{S}_0$ при $t = 0$.

Рассмотрим точечное отображение T_0 поверхности $\bar{S}_0$ в поверхность S_1. Оно имеет вид

$$y_i^1 = y_i\left(-\ln\frac{y_n^0}{d_1}, y_1^0, ..., y_n^0; \mu\right) = f_i^0(y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0; \mu), \ i = 1, ..., n-1, \tag{4.1}$$

[3] В первом случае λ_{n-1} – вещественный корень, а во втором корни λ_{n-2} и λ_{n-1} – комплексно сопряженные.

где $t_0 = -\ln \dfrac{y_n^0}{d_1}$ – время перехода, определяется из условия пересечения траектории с плоскостью S_1:

$$d_1 = y_n^0 e^t. \tag{4.2}$$

Из соотношения (4.2) следует, что отображение T_0 определено и существует в области $\bar{S}_0$ при всех $0 < y_n^0 < d_1$. Используя оценку (3.15), получаем, что

$$|f_i^0| < 2\delta_2 \left(\frac{y_n^0}{d_1}\right)^{-\nu(\mu)}, \quad i = 1, ..., n-1. \tag{4.3}$$

Итак, приходим к следующей лемме.

Лемма 4. *Каково бы ни было достаточно малое $\varepsilon > 0$, можно указать такое $b > 0$, что при всех достаточно малых μ отображение T_0 будет определено в области $\sigma_0 : \{M_0 \in \bar{S}_0, 0 < y_n^0 < b\}$ и будет отображать σ_0 в ε-окрестность точки M_1^0.*

Из оценок (3.20) и (3.26) вытекает, что

$$\left|\frac{\partial f_i^0}{\partial y_k^0}\right| < K(y_n^0)^{\gamma(\mu)} \text{ при } k \neq n, \tag{4.4}$$

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_n^0}\right| < K(y_n^0)^{-\nu(\mu)-1}, \quad i = 1, ..., n-1, \tag{4.5}$$

где K – некоторая постоянная.

б) Построение отображения T_1.

Очевидно, при достаточно малых μ траектория Γ_0 будет пересекать поверхности S_1 и S_0 в некоторых точках M_1^μ и M_0^μ, которые при $\mu = 0$ совпадают с точками M_1^0 и M_0^0. Более того, между некоторыми окрестностями точек M_1^0 и M_0^0 на поверхностях S_1 и S_0 по траекториям системы можно установить взаимно однозначное соответствие T_1

$$x_i^0 = f_i^1(x_1^1, ..., x_{n-1}^1; \mu), \quad i = 1, ..., n-2, n, \tag{4.6}$$

где функции f_i^1 дважды непрерывно дифференцируемы по всем переменным.

Рассмотрим точечное отображение $T = T_1 T_0$, которое аналитически записывается в виде:

$$T = H_0 T_1 H_1^{-1} T_0. \tag{4.7}$$

Здесь через H_0 и H_1 обозначены отображения на поверхностях S_0 и S_1, индуцируемые формулами замены (3.8). В развернутом виде отображение T записывается так:

$$\bar{y}_i^0 = f_i(y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0; \mu), \quad i = 1, ..., n-2, n. \tag{4.8}$$

Из леммы 4 и непрерывности отображений H_0, H_1^{-1} и T_1 следует, что отображение T будет определено в области σ_0 при всех достаточно малых μ.

Из соотношений (4.4), (4.5) и гладкости отображений H_0, H_1^{-1} и T_1 вытекают следующие оценки элементов матрицы линеаризованного отображения T:

$$\left|\frac{\partial f_i^0}{\partial y_j^0}\right| < K_1(y_n^0)^{\gamma(\mu)} \text{ при } j \neq n, \tag{4.9}$$

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_n^0}\right| < K_1(y_n^0)^{-1-\nu(\mu)}, \quad i = 1, ..., n-2, n, \tag{4.10}$$

где K_1 – некоторая постоянная.

в) О рождении неподвижной точки отображения T из границы области его существования.

Как было доказано, отображение T определено и непрерывно дифференцируемо в открытой области σ_0 при всех достаточно малых μ. Доопределим отображение T на границе $l : y_n^0 = 0$ области σ_0 следующим образом: каждой точке M_0, лежащей на границе l, поставим в соответствие точку M_0^μ (точку пересечения траектории Γ_0 с поверхностью S_0). Так как, согласно неравенству (4.3),

$$\lim_{y_n^0 \to 0} f_i^0(y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0; \mu) = 0, \tag{4.11}$$

то нетрудно видеть, что отображение T, определенное в замкнутой области $\bar{\sigma}_0$, будет непрерывно и при $\mu = 0$ будет иметь неподвижную точку M_0^0 (при $\mu = 0$ точка M_0^μ совпадает с точкой M_0^0).

Пусть $-\mathrm{Re}\ \lambda_i(0) > \lambda_n(0),\ i = 1, ..., n-1$, или, что то же, $-\nu(0) > 1$. Тогда из оценок (4.9), (4.10) следует, что при всех достаточно малых μ

$$\lim_{y_n^0 \to 0} \frac{df_i}{dy_j^0} = 0. \tag{4.12}$$

Как известно (см. [9]), в этом случае предельные значения производных функций $\dfrac{df_i}{dy_j^0}$ при $y_n^0 = 0$ будут производными доопределенных функций f_i на границе l. Из оценок (4.9), (4.10) также следует, что доопределенные функции f_i будут иметь непрерывные производные по $y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0$ в замкнутой области $\bar{\sigma}_0$.

Согласно [9], функции $f_i(y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0; \mu)$, определенные в некоторой замкнутой области n-мерного полупространства $y_n^0 \geq 0$ переменных $y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0$ и μ, можно продолжить с сохранением непрерывности производных $\dfrac{df_i}{dy_j^0}$ в полупространство $y_n^0 < 0$.

Рассмотрим точечное отображение $\tilde{T}$

$$\bar{y}_i^0 = \tilde{f}_i(y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0; \mu), \quad i = 1, ..., n-2, n, \tag{4.13}$$

где через $\tilde{f}_i$ обозначена функция, являющаяся продолжением функции f_i в полупространство $y_n^0 < 0$. Это отображение, при $y_n^0 \geq 0$ совпадает с доопределенным отображением T и, следовательно, при $\mu = 0$ имеет неподвижную точку M_0^0. Так как определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_1^0} - 1 & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y_n^0} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial y_1^0} & \dots & \frac{\partial \tilde{f}_n}{\partial y_n^0} - 1 \end{vmatrix}, \tag{4.14}$$

вычисленный в точке M_0^0 при $\mu = 0$, отличен от нуля (равен $(-1)^{n-1}$), то, воспользовавшись теоремой о неявных функциях, получаем, что при достаточно малых μ отображение $\tilde{T}$ будет иметь только одну неподвижную точку $M_\mu^*(y_1^*(\mu), ..., y_{n-2}^*(\mu), y_n^*(\mu))$, стремящуюся к M_0^0 при $\mu \to 0$. Имеет место следующая

Лемма 5. *Для того чтобы неподвижная точка M_μ^* отображения $\tilde{T}$ лежала в полупространстве $y_n^0 > 0$, необходимо и достаточно, чтобы точка M_0^μ лежала в полупространстве $y_n^0 > 0$.*

Из соотношения

$$y_n^*(\mu) = \tilde{f}_n(y_1^*(\mu), ..., y_{n-2}^*(\mu), y_n^*(\mu); \mu) \tag{4.15}$$

или

$$\begin{gathered} y_n^*(\mu) = f_n(y_1^*(\mu), ..., y_{n-2}^*(\mu), 0; \mu) + \\ + \frac{\partial \tilde{f}_n(y_1^*(\mu), ..., y_{n-2}^*(\mu), \theta y_n^*(\mu); \mu)}{\partial y_n^0} \, y_n^*(\mu), \quad 0 < \theta < 1, \end{gathered} \tag{4.16}$$

вытекает, что

$$y_n^*(\mu) = \frac{f_n(y_1^*, ..., y_{n-2}^*, 0; \mu)}{1 - \dfrac{\partial \tilde{f}_n(y_1^*, ..., y_{n-2}^*, \theta y_n^*; \mu)}{\partial y_n^0}} \, . \tag{4.17}$$

Числитель $f_n(y_1^*, ..., y_{n-2}^*, 0; \mu)$ в выражении (4.17) есть значение последней координаты точки M_0^μ, так как все точки границы l, а следовательно, и точка с координатами $(y_1^*(\mu), ..., y_{n-2}^*(\mu), 0)$ отображаются в точку M_0^μ. Так как $\left(\dfrac{\partial \tilde{f}_n}{\partial y_n^0}\right)_{M_\mu^*} \to 0$ при $\mu \to 0$, то

$$\operatorname{sign} y_n^*(\mu) = \operatorname{sign} f_n(y_1^*(\mu), ..., y_{n-2}^*(\mu), 0; \mu). \tag{4.18}$$

Из этого следует, что если точка M_0^μ лежит при $\mu > 0$ ($\mu < 0$) в области $y_n^0 > 0$, то при достаточно малых $\mu > 0$ ($\mu < 0$) точка M_μ^* будет лежать в области σ_0 и, следовательно, будет неподвижной точкой отображения T. Из соотношения (4.18) легко следует и необходимость.

По предположению, траектория Γ_0 при достаточно малых $\mu > 0$ ($\mu < 0$) проходит мимо седла, пересекая область D^+. Поэтому $M_0^\mu \in D^+$. В переменных $(y_1^0, ..., y_{n-2}^0, y_n^0)$ это соответствует тому, что точка M_0^μ при $\mu > 0$ ($\mu < 0$) лежит в области $y_n^0 > 0$.

Нетрудно видеть, что неподвижная точка M_μ^* устойчива. Действительно, так как в области σ_0 отображение T дважды непрерывно дифференцируемо, то для установления устойчивости точки M_μ^* достаточно доказать, что корни характеристического уравнения

$$\left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j^0}\right)_{M_\mu^*} - \delta_{ij} z \right| = 0 \tag{4.19}$$

по модулю меньше единицы, а это легко следует из малости производных $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j^0}\right)_{M_\mu^*}$ при достаточно малых μ.

Воспользовавшись леммой 5, получаем, что при достаточно малых $\mu > 0$ ($\mu < 0$) отображение T имеет только одну неподвижную точку M_μ^*, рождающуюся из точки M_0^0, а это соответствует тому, что из траектории Γ_0 рождается только одно периодическое движение и притом устойчивое. Теорема доказана.

(Поступило в редакцию 15/VI 1962 г.)

Литература

1. А.А. Андронов и Е.А. Леонтович, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра, Уч. записки Горьк. ун-та, вып. 6 (1937), 3-24.
2. А.А. Андронов и Е.А. Леонтович, О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел, Матем. сб., т. 48 (90) (1959), 335-376.
3. А.А. Андронов, Теория точечных преобразований Пуанкаре-Брауера-Биркгофа и теория нелинейных колебаний, Вестник АН СССР, № 6 (1944), 101.
4. Ю.И. Н е й м а р к, Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний, Изв. ВУЗ"ов, Радиофизика, ч. 1, т. 1, № 1 (1958), 42-66, ч. II, т. 1, № 2 ,(1958), 95-117, ч. II, т. 1, № 5-6 (1958), 146-165.
5. А.М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Москва-Ленинград, ОНТИ, 1935.
6. Р.М. Минц, Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в n-мерном пространстве, ДАН СССР, т. 147, № 1, (1962), 31-33.
7. Г.И. Петровский, Ober das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewohnlicher Differentialgleichungen in der Nahe eines singularen Punktes, Матем. сб., т. 41 (1934), 107-156.
8. В.В, Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, Москва - Ленинград, Гостехиздат, 1949.
9. Г.М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I (приложение), Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1951.

Доклады Академии наук СССР
1966, Том 170, № 1, с. 49-52

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. Шильников

О РОЖДЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИЗ ТРАЕКТОРИИ, ИДУЩЕЙ ИЗ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ТИПА СЕДЛО-СЕДЛО В НЕГО ЖЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 22 XI 1965)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $(m+n+1)$-го порядка

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y,z,\mu),\ \frac{dy}{dt} = Q(x,y,z,\mu),\ \frac{dz}{dt} = R(x,y,z,\mu), \tag{1}$$

где $P\,(P_1, P_2, ..., P_m), Q\,(Q_1, Q_2, ..., Q_n)$ и R суть аналитические или достаточно гладкие функции переменных $x(x_1, x_2, ..., x_m), y(y_1, y_2, ..., y_n), z$ и параметра μ в некоторой области $G \times (-\mu_0, \mu_0)$. Предположим, что при $\mu = 0$ система (1) имеет состояние равновесия $O \in G$, в котором характеристическое уравнение имеет m корней с отрицательными действительными частями, n корней с положительными действительными частями и один нулевой корень.

С помощью линейной неособой замены переменных систему (1) можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P_0(x,y,z,\mu),\ \frac{dy}{dt} = By + Q_0(x,y,z,\mu),\ \frac{dz}{dt} = R_0(x,y,z,\mu), \tag{2}$$

где P_0, Q_0, R_0 при $\mu = 0$ обращаются в нуль в $O(0,0,0)$ вместе с первыми производными; A – матрица m-го порядка, характеристический многочлен которой имеет корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ с отрицательными действительными частями, а B – матрица n-го порядка, характеристический многочлен которой имеет корни $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ с положительными действительными частями. Пусть

$$x = u(z), \quad y = v(z)$$

есть решение системы

$$Ax + P_0(x,y,z,0) = 0, \quad By + Q_0(x,y,z,0) = 0$$

при достаточно малых z. Предположим, что в разложении

$$R_0(u(z), v(z), z, 0) = l_k z^k + l_{k+1} z^{k+1} + ... \tag{3}$$

первая не равная нулю величина l_k имеет четный номер и, для определенности, положительна.

Поведение фазовых траекторий в окрестности такого сложного состояния равновесия было изучено в работе Р. М. Минц ([1]), само же состояние равновесия она назвала состоянием равновесия типа C. Это состояние равновесия образуется путем слияния $2k$ простых состояний равновесия типа седло, поэтому, как нам кажется, более естественно называть O сложным состоянием равновесия типа седло-седло.

Опишем поведение интегральных кривых в окрестности O. Оно характеризуется прежде всего существованием $(n+m)$-мерной сепаратрисной поверхности π, проходящей через O и касающейся осей x и y. Эта поверхность разделяет окрестность O на две области. В области, содержащей полуось $z \leq 0$, существует единственная $(m+1)$-мерная интегральная O^+ -полуповерхность (полуповерхность, состоящая из O^+ -кривых), которую мы обозначим через π^+. В области, содержащей полуось $z \geq 0$, существует единственная $(n+1)$ -мерная интегральная O^--полуповерхность (полуповерхность, состоящая из O^--кривых), которую мы обозначим π^-. Границы полуповерхностей π^+ и π^-, которые мы обозначим через Π^+ и Π^-, являются многообразиями размерности соответственно m и n. Они лежат в π и пересекаются в точке O. Все интегральные кривые, за исключением тех, которые лежат в π^+ и π^-, проходят мимо O.

Целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а. *Пусть при $\mu = 0$ система* (1) *обладает следующими свойствами:* 1) *существует траектория Γ_0, выходящая из O и вновь в него возвращающаяся при $t \to +\infty$;* 2) *Γ_0 не лежит в Π^+ и Π^-;* 3) *π^+ и π^- пересекаются по Γ_0, не касаясь*[1].

Тогда при всех достаточно малых $\mu \neq 0$, при которых исчезает сложное состояние равновесия типа седло-седло, из Γ_0 рождается единственное периодическое движение седлового типа.

Условия исчезновения состояния равновесия типа седло-седло полностью аналогичны условиям исчезновения сложного состояния равновесия типа седло-узел ([4]).

Доказательство теоремы основывается на методе точечных отображений и состоит в доказательстве существования неподвижной точки у отображения T плоскости $z = -d$ $(d > 0)$ в себя.

Отображение T мы будем искать в виде $T = T_1 T_0$, где T_0 – отображение плоскости $z = -d$ в $z = d$ в окрестности начала координат, а T_1 – отображение $z = +d$ в $z = -d$ в окрестности глобального куска Γ_0.

2. П о с т р о е н и е о т о б р а ж е н и я T_0. Рассмотрим предварительно систему (2) при $\mu = 0$. Как следует из результатов В. А. Плисса ([2,3]), в окрестности начала координат O существуют две интегральные поверхности

$$y = \psi(x, z), \quad x = \varphi(y, z), \tag{4}$$

размерности которых соответственно $m+1$ и $n+1$. Функции ψ и φ достаточно гладкие и обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными. На этих поверхностях O будет сложным состоянием равновесия типа седло-узел. Из единственной интегральной O^+-полуповерхности π^+ и O^- -полуповерхности π^- следует, что в области слева от π поверхность $y = \psi(y, z)$ совпадает с π^+, а в области слева от π поверхность $x = \varphi(y, z)$ совпадает с π^-.

[1]Из работ В. А. Плисса ([2,3]) следует, что π^+ и π^- являются гладкими поверхностями.

С помощью некоторой достаточно гладкой замены переменных в достаточно малой окрестности начала координат систему (2) можно записать в виде

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= A\xi + P'(\xi,\eta,z)\,\xi + \mu\,\alpha(z,\mu)\,R_0(z,\mu), \\ d\eta/dt &= B\eta + Q'(\xi,\eta,z)\,\eta + \mu\,\beta(z,\mu)\,R_0(z,\mu), \\ dz/dt &= R_0(z,\mu) + R_1'(\xi,\eta,z,\mu)\,\xi + R_2'(\xi,\eta,z,\mu)\,\eta, \end{aligned} \tag{5}$$

где P', Q', R_1', R_2' малы при достаточно малых ξ, η, z, μ, а $R_0(z,0) = l_k z^k + \ldots$. В новых переменных уравнения поверхностей (4) будут соответственно $\eta = 0$ и $\xi = 0$, а уравнения $\Gamma_0\ \xi = 0, \eta = 0$. Очевидно, условие исчезновения седла-седла будет состоять в выполнении неравенства $R_0(z,\mu) > 0$. Пусть, для определенности, $(0,\bar\mu_0)$ есть такой интервал при значениях μ, из которого выполняется это неравенство. Значение μ из этого интервала будем обозначать через $\bar\mu$.

Введем в рассмотрение замкнутую поверхность $S_{\bar\mu}$, составленную из поверхностей

$$\begin{gathered} V \equiv \|\xi\|^2 - R_0^2(z,\bar\mu) = 0, \quad W \equiv \|\eta\|^2 - R_0^2(z,\bar\mu) = 0, \\ S_0 : z = -d, \quad S_1 : z = d. \end{gathered} \tag{6}$$

Легко видеть, что внутри $S_{\bar\mu}$ при достаточно малом d и достаточно малых $\bar\mu$ выполняется условие $dz/dt > 0$. После исключения времени t систему (5) внутри $S_{\bar\mu}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dz} &= \frac{A\xi + P_1(\xi,\eta,z,\bar\mu)\,\xi + \bar\mu\,\alpha(z,\bar\mu)\,R_0(z,\bar\mu)}{R_0(z,\bar\mu)}, \\ \frac{d\eta}{dz} &= \frac{B\eta + Q_1(\xi,\eta,z,\bar\mu)\,\eta + \bar\mu\,\beta(z,\bar\mu)\,R_0(z,\bar\mu)}{R_0(z,\bar\mu)}, \end{aligned} \tag{7}$$

где P_1 и Q_1 малы внутри $S_{\bar\mu}$ при достаточно малых d и $\bar\mu_0$.

Л е м м а 1. *Для каждой пары ξ_0 и η_1, удовлетворяющих условиям $\|\xi\| < a < R_0(-d,0)$, $\|\eta_1\| < b < R_0(d,0)$, существует решение системы* (7)

$$\xi(z) = \xi(z,\xi_0,\eta_1,\bar\mu), \quad \eta(z) = \eta(z,\xi_0,\eta_1,\bar\mu), \tag{8}$$

лежащее внутри $S_{\bar\mu}$ и удовлетворяющее условиям

$$\xi(-d) = \xi_0, \quad \eta(d) = \eta_1,$$

причем

$$\begin{aligned} \|\xi(z)\| &< \|\xi_0\|\ exp\left[\lambda \int\limits_{-d}^{z} \frac{dz}{R_0(z,\bar\mu)}\right] + K\bar\mu, \\ \|\eta(z)\| &< \|\eta_1\|\ exp\left[\gamma \int\limits_{+d}^{z} \frac{dz}{R_0(z,\bar\mu)}\right] + K\bar\mu, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\max\limits_{1\le i\le m} Re\,\lambda_i < \lambda < 0,\ 0 < \gamma < \min\limits_{1\le i\le n} Re\,\gamma_i$, *$K$ – некоторая фиксированная константа.*

Л е м м а 2. *Справедливы оценки*

$$\left\|\frac{\partial\xi}{\partial\xi_0}\right\| + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial\xi_0}\right\| < exp\left[\lambda \int\limits_{-d}^{z} \frac{dz}{R_0(z,\bar\mu)}\right],$$

$$\left\|\frac{\partial\xi}{\partial\eta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial\eta}{\partial\eta_1}\right\| < exp\left[\gamma \int\limits_{+d}^{z} \frac{dz}{R_0(z,\bar{\mu})}\right]$$

для всех $z \in [-d, d]$ *при достаточно малых* d *и* $\bar{\mu}_0$.

Рассмотрим интегральную кривую (8). Очевидно, задание ξ_0, η_1 позволяет однозначно найти $\xi_1 = \xi(d, \xi_0, \eta_1, \bar{\mu})$ и $\eta_0 = \eta(-d, \xi_0, \eta_1, \bar{\mu})$. Полученное таким образом отображение точек $M_0(\xi_0, \eta_0) \in S_0$ в точки $M_1(\xi_1, \eta_1) \in S_1$ обозначим через T_0. При этом заметим, что так как

$$\lim_{\bar{\mu}\to 0} \int\limits_{-d}^{d} \frac{dz}{R_0(z,\bar{\mu})} = +\infty,$$

то

$$\|\xi_1\| + \|\eta_0\| + \|\partial\xi_1/\partial\xi_0\| + \|\partial\eta_0/\partial\xi_0\| + \|\partial\xi_1/\partial\eta_1\| + \|\partial\eta_0/\partial\eta_1\| \to 0 \tag{10}$$

при $\bar{\mu} \to 0$.

3. П о с т р о е н и е о т о б р а ж е н и я T_1. В переменных ξ, η, z Γ_0 пересекает S_0 и S_1 в точках $M_0^0(0,0)$ и $M_1^1(0,0)$. Как известно, по достаточно малому $0 < a < \frac{1}{2} R_0(-d, 0)$ можно указать такое $0 < b < \frac{1}{2} R_0(d, 0)$, что при всех достаточно малых μ траектории, проходящие через точки $M_1 \in S_1$, лежащие в b-окрестности M_1^1, будут пересекать S_0 в точках $\bar{M}_0(\bar{\xi}_0, \bar{\eta}_0)$, лежащих в a-окрестности M_0^0. Полученное отображение обозначим через T_1. В рассматриваемых переменных оно будет записываться в виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_0 &= f_1(\xi_1, \eta_1, \mu) = A_1(\mu) + A_{11}(\mu)\,\xi_1 + A_{12}(\mu)\,\eta_1 + ..., \\ \bar{\eta}_0 &= g_1(\xi_1, \eta_1, \mu) = A_2(\mu) + A_{21}(\mu)\,\xi_1 + A_{22}(\mu)\,\eta_1 + ... \end{aligned} \tag{11}$$

Так как, по предположению, π^+ и π^- пересекаются по Γ_0 не касаясь, то $|A_{22}(0)| \neq 0$.

4. Окончание доказательства теоремы сводится к доказательству существования у отображения $T = T_1 T_0$ неподвижной точки $M^*(\xi_0^*, \eta_0^*)$, стремящейся к M_0^0 при $\mu \to 0$. Обозначим через $\sigma(a, b)$ образ области $\|\xi_0\| < a, \|\eta_1\| < b$ при отображении $(\xi_0, \eta_1) \to (\xi_0, \eta_0)$, где $\eta_0 = \eta(-d,\, \xi_0,\, \eta_1,\, \bar{\mu})$. Легко видеть, в силу выбора a и b, что отображение T определено на $\sigma(a,\, b) \in S_0$ и $\sigma(a,\, b)$ отображает в S_0.

Рассмотрим уравнения для нахождения координат неподвижной точки. В переменных ξ_0^*, η_1^* они будут записываться в виде

$$\begin{aligned} F(\xi_0^*,\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}) &= \xi_0^* - f_1\left(\xi(d,\, \xi_0^*,\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}),\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}\right) = 0, \\ G(\xi_0^*,\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}) &= \eta(-d,\, \xi_0^*,\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}) - g_1\left(\xi(d,\, \xi_0^*,\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}),\, \eta_1^*,\, \bar{\mu}\right) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Так как, используя (10), F и G можно доопределить по непрерывности на границе $\bar{\mu} = 0$ вместе с производными и, так как при $\bar{\mu} = 0$ рассматриваемая система обладает единственным решением $\xi_0^* = 0$, $\eta_1^* = 0$ с якобианом при $\xi_0^* = \eta_1^* = \bar{\mu} = 0$ равным $-|A_{22}(0)|$, то при достаточно малых $\bar{\mu} > 0$ получаем, что система (12) имеет единственное решение $\xi_0^*(\bar{\mu}), \eta_1^*(\bar{\mu})$, где $\xi_0^*(\bar{\mu}), \eta_1^*(\bar{\mu})$ стремятся к нулю вместе с $\bar{\mu}$. Следовательно, отображение T имеет неподвижную точку $M^*(\xi_0^*, \eta_0^*)$, стремящуюся к M_0^0 при $\bar{\mu} \to 0$. Докажем, что M^*

– неподвижная точка седлового типа. Очевидно, характеристическое уравнение, используя оценки (10), можно записать в виде

$$\begin{gathered}\alpha_n(\bar{\mu})z^{m+n} + ... + \alpha_1(\bar{\mu})z^{m+1} + \\ +(|A_{22}(0)| + O(\bar{\mu})\,)z^m + \beta_m(\bar{\mu})z^{m-1} + ... + \beta_1(\bar{\mu}) = 0\end{gathered} \tag{13}$$

где $\alpha_i(\bar{\mu})$ и $\beta_i(\bar{\mu})$ стремятся к нулю при $\bar{\mu} \to 0$. Так как коэффициент при z^m не равен нулю при достаточно малых $\bar{\mu}$, то получаем, что уравнение (13) имеет m корней с модулями меньше единицы и n корней с модулями больше единицы.

Из известной связи между неподвижными точками отображения и периодическими решениями получаем, что из Γ_0 рождается единственное периодическое движение седлового типа.

Исследовательский физико-технический институт
Горьковского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
21 XI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

([1]) Р. М. Минц, ДАН, 147, 31 (1962).
([2]) В. А. Плисс, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1297 (1964).
([3]) В. А. Плисс, Дифференциальные уравнения, 1, № 1, 17 (1965).
([4]) Л. П. Шильников, ДАН, 143, 289 (1962); Матем. сборн., 61 (104), 4, 443 (1963).

1968 Математический Сборник т.77(119),№ 3, с. 461-472

О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло

Л.П.Шильников (Горький)

§ 1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Z(z, \mu) \tag{1.1}$$

где $Z\,(Z_1(z_1, ..., z_{m+n}, \mu), ..., Z_{m+n}(z_1, ..., z_{m+n}, \mu))$ определена и аналитична в некоторой области $G \subset R^{m+n}$ и непрерывно зависит от параметра μ при всех $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$.

Предположим, что при $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ система (1.1) имеет грубое состояние равновесия $O(0, ..., 0)$, в котором корни характеристического уравнения

$$\mid Z_z(0, \mu) - \lambda E \mid = 0 \tag{1.2}$$

удовлетворяют следующим условиям: m корней $\lambda_1(\mu)$, ... $\lambda_m(\mu)$ имеют отрицательные действительные части, а остальные n корней, которые мы обозначим через $\gamma_1(\mu), ..., \gamma_n(\mu)$, имеют положительные действительные части. При этом без ограничения общности можно считать, что

$$Re\,\gamma_1(0) \le Re\,\gamma_j, \;\; j = 2, ..., n, \quad Re\,\gamma_1(0) \le -Re\,\lambda_i, \;\; i = 1, ..., m. \tag{1.3}$$

Как известно, в этом случае у седла O существуют два интегральных многообразия $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, размерности которых соответственно m и n. Предположим, что при $\mu = 0$ у системы (1.1) есть траектория Γ_0, двоякоасимптотическая к O. Мы будем предполагать, что пересечение $\mathfrak{M}^+(0)$ с $\mathfrak{M}^-(0)$ является простейшим негрубым, т. е.

$$\dim\,(W_M^+ \cap W_M^-) = 1, \tag{1.4}$$

где W_M^+ и W_M^- - касательные пространства к $\mathfrak{M}^+(0)$ и $\mathfrak{M}^-(0)$ в точке $M \in \Gamma_0$.

Настоящая работа посвящена рассмотрению задачи о рождении периодического движения из траектории Γ_0. Для системы второго порядка эта задача была решена в работах А.А. Андронова и Е.А. Леонтович [1–4]. В многомерном случае автором [5–6] было найдено условие рождения единственного устойчивого периодического движения из траектории Γ_0. В предположении, что система – кусочно-линейного типа (в частности, релейная), рождение периодического движения от траектории, двоякоасимптотической к седлу, изучалось Ю.И. Неймарком и автором [7].

В работе установлено, что задача о рождении периодических движений из траектории Γ_0 может быть сведена к нахождению положительных решений некоторых систем трансцендентных уравнений. При этом вопрос о числе периодических движений, рождающихся из Γ_0, может существенным образом зависеть от добавок к системе (1.1) с $\mu = 0$. Поэтому дальше мы ограничились изучением более узкой задачи: при каких условиях, наложенных на систему (1.1) при $\mu = 0$, возможно рождение только одного периодического движения из Γ_0 и каково условие рождения?

Ниже указываются и обсуждаются условия, при которых рассматривалась эта задача.

А) Корень $\gamma_1(0)$ действителен и $\gamma_1(0) < -\mathrm{Re}\,\lambda_i,\ \ i = 1, ..., m$ [1]. Случай $\gamma_1(0) = -\mathrm{Re}\,\lambda_i(0)$, как установлено Е.А. Леонтович [3,4], уже в двумерном случае может привести к рождению из Γ_0 нескольких периодических движений.

Б) $\gamma_1(0) < -\mathrm{Re}\,\gamma_i(0),\ \ i = 2, ..., n$. При этом предположении почти все траектории, лежащие в $\mathfrak{M}^-(\mu)$, при $t \to -\infty$ будут касаться одномерного ведущего направления. Неведущее интегральное $(n-1)$-мерное многообразие $\mathfrak{M}^-(\mu)$ обозначим через $\mathfrak{M}^-_{n-1}(\mu)$. Очевидно, $\mathfrak{M}^-(\mu)$ можно представить в виде $\mathfrak{M}^-_1(\mu) \cup \mathfrak{M}^-_2(\mu) \cup \mathfrak{M}^-_{n-1}(\mu)$, где $\mathfrak{M}^-_1(\mu)$ и $\mathfrak{M}^-_2(\mu)$ – многообразия и $\mathfrak{M}^-_1(\mu) \cap \mathfrak{M}^-_2(\mu) = \emptyset$.

В) Γ_0 стремится к седлу при $t \to -\infty$, касаясь ведущего направления. Будем считать, для определенности, что $\Gamma_0 \in \mathfrak{M}^-_1(0)$. Пусть U – достаточно малая окрестность O. Пересечение Γ_0 с U тогда будет состоять из двух полутраекторий Γ^+_0 и Γ^-_0 . Обозначим через $\mathfrak{M}^-_\omega$ и $\mathfrak{M}^-_\alpha$ односвязные куски $\mathfrak{M}^-(0)$ в U, содержащие соответственно Γ^+_0 и Γ^-_0.

Г) $\overline{\mathfrak{M}}^-_\alpha \cap \overline{\mathfrak{M}}^-_\omega = \mathfrak{M}_{n-1} \cap U$. Как доказано (см. теорему 2.1), такое пересечение является общим случаем пересечения $\overline{\mathfrak{M}}^-_\alpha$ и $\overline{\mathfrak{M}}^-_\omega$.

В работе доказана следующая

Основная теорема. *При выполнении условий А), Б), В), Г) из Γ_0 может родиться только одно периодическое движение. Условие рождения периодического движения эквивалентно выполнению соотношения*

$$\lim_{\mu\to 0} \mathfrak{M}^-_1(\mu) \cap U(\Gamma_0) = \mathfrak{M}^-_1(0) \cap U(\Gamma_0), \tag{1.5}$$

в достаточно малой окрестности $U(\Gamma_0)$ траектории Γ_0. [2] *Рождающееся периодическое движение будет устойчивым при $n = 1$ и седловым при $n > 1$.*

Получено также следующее утверждение: при выполнении условий А), Б), В), Г) система (1.1) при $\mu = 0$ в достаточно малой окрестности Γ_0 не имеет периодических движений (теорема 3.1).

Найденный случай вместе со случаями рождения периодических движений из двоякоасимптотических кривых сложного состояния равновесия типа седло-узел [5,6] и типа седло-седло [10] в определенном смысле исчерпывают основные случаи рождения периодических кривых из траекторий, двоякоасимптотических к состояниям равновесия.

В основе рассмотрения лежит сведение рассматриваемой задачи к задаче о рождении неподвижной точки некоторого отображения из границы его области определения. Отображение T строится в виде произведения двух отображений T_0 и T_1, где T_0 строится в окрестности седла O, а T_1 – в окрестности глобального куска Γ_0. При этом наряду с обычным представлением отображения T_0, которое использовалось ранее автором в работах [5,6], мы будем также пользоваться и другим, которое будем называть параметрическим. Отметим, что параметрическая форма задания отображения эффективно использовалась А.А. Андроновым и его сотрудниками при решении кусочно-линейных задач.

---

[1] Случай, когда $\gamma_1(0)$ - комплексный корень и $\mathrm{Re}\,\gamma_1(0) < -Re\,\lambda_i$, как показано в [8–9], для случая систем 3-го и 4-го порядков качественно отличен от рассматриваемого, так как в любой окрестности Γ_0 содержится счетное множество периодических движений седлового типа.

[2] Здесь через lim обозначен топологический предел, а через $\mathfrak{M}^-_1(\mu) \cup U(\Gamma_0)$ обозначено множество точек $M \in \mathfrak{M}^-_1(\mu)$, образы которых при всех $t \le 0$ лежат в $U(\Gamma_0)$.

§ 2. **Построение отображения** T

а) П о с т р о е н и е о т о б р а ж е н и я T_0.

Систему (1.1) с помощью линейной неособой замены при достаточно малых μ можно привести к виду

$$\dot{x} = A(\mu) + X(x, y, \mu) \quad \dot{y} = B(\mu) + Y(x, y, \mu) \tag{2.1}$$

где X и Y обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными по $x = (x_1, ..., x_m)$ и $y = (y_1, ..., y_n)$, $A(\mu)$ и $B(\mu)$ – соответственно m-мерная и n-мерная матрицы. Корни $\lambda_1(\mu), ..., \lambda_m(\mu)$ уравнения $|A(\mu) - \lambda E| = 0$ при достаточно малых μ имеют отрицательные действительные части. Корни $\gamma_1(\mu), \dots, \gamma_n(\mu)$ уравнения $|B(\mu) - \gamma E| = 0$ имеют положительные действительные части. При предположениях А) и Б) из § 1 можно считать, что матрица $B(\mu)$ имеет вид

$$B(\mu) = \begin{pmatrix} \gamma(\mu) & 0 \\ 0 & B'(\mu) \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

где $B'(\mu)$ – квадратная матрица $(n-1)$-порядка.

Как известно, уравнения многообразий $\mathfrak{M}^+(\mu)$ и $\mathfrak{M}^-(\mu)$ в достаточно малой окрестности O и при достаточно малых μ имеют вид

$$y = \tilde{F}(x, \mu), \quad x = \tilde{G}(y, \mu), \tag{2.3}$$

где $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными. После замены

$$x = \tilde{G}(y) + \xi, \quad y = \tilde{F}(x) + \eta \tag{2.4}$$

в некоторой окрестности O система (2.1) примет вид

$$\frac{d\xi}{dt} = A(\mu)\xi + f(\xi, \eta, \mu), \quad \frac{d\eta}{dt} = B(\mu)\eta + g(\xi, \eta, \mu), \tag{2.5}$$

где f и g представимы в виде $f = f_1(\xi, \eta, \mu)\xi$, $g = g_1(\xi, \eta, \mu)\eta$, причем $f_1(0, 0, \mu) = g_1(0, 0, \mu) \equiv 0$. В новых переменных уравнения многообразий $\mathfrak{M}^+(\mu)$ и $\mathfrak{M}^-(\mu)$ будут $\eta = 0$ и $\xi = 0$. В многообразии $\mathfrak{M}^+(\mu)$ точка O будет грубым устойчивым состоянием равновесия системы

$$\frac{d\xi}{dt} = A(\mu)\xi + f_1(\xi, 0, \mu)\xi, \tag{2.6}$$

а в $\mathfrak{M}^-(\mu)$ – грубым неустойчивым состоянием равновесия системы

$$\frac{d\eta}{dt} = B(\mu)\eta + g_1(0, \eta, \mu)\eta, \tag{2.7}$$

Следовательно, для систем (2.6) и (2.7) при достаточно малых μ можно построить функции Ляпунова $S_0(\xi)$ и $S_1(\eta)$ такие, что S_0 и $S_1 \in C^2$ и поверхности $S_0 = r^2$, $S_1 = r^2$ при всех $0 < r \leq r_1$ будут поверхностями без контакта для траектории соответственно систем (2.6) и (2.7).

Из вида правых частей системы (2.5) следует, что можно указать такое r_0 $0 < r_0 \leq r_1$, что поверхности $S^+ : \ S_0(\xi) = r_0^2, \ S_1(\eta) \leq r_0^2$; $S^- : \ S_1(\eta) = r_0^2, \ S_0(\xi) \leq r_0^2$ будут поверхностями без контакта для системы (2.5).

Пусть

$$\xi(t) = \xi(t, \xi_0, \eta_0, \mu), \quad \eta(t) = \eta(t, \xi_0, \eta_0, \mu) \tag{2.8}$$

есть уравнение траектории L, проходящей при $t = 0$ через точку $M_0(\xi_0, \eta_0) \in S^+$, где $\eta_0 \neq 0$. Траектория L при некотором t_0 пересечет S^- в точке $M_1(\xi_1, \eta_1)$. Это соответствие между S^+ и S^- по траекториям (2.8) обозначим через T_0. Оно будет записываться в следующем виде:

$$\xi_1 = \xi(t_0, \xi_0, \eta_0, \mu), \quad \eta_1 = \eta(t_0, \xi_0, \eta_0, \mu), \quad S_0(\xi_0) = r_0^2, \quad S_1(\eta_1) = r_0^2\ , \tag{2.9}$$

где время перехода t_0 фазовой точки с S^+ на S^- находится из уравнения

$$S_1(\eta(t_0, \xi_0, \eta_0, \mu)) = r_0^2, \tag{2.10}$$

В тех случаях, когда можно легко найти зависимость t_0 от координат точки $M_0(\xi_0, \eta_0)$, представление отображения T_0 в виде (2.6) является весьма удобным. В общем случае T_0 удобно строить в параметрической форме.

Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{At}\xi_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\, f(\xi(\tau), \eta(\tau), \mu)\, d\tau, \\ \eta(t) &= e^{B(t-t_0)}\eta_1 + \int\limits_{t_0}^t e^{B(t-\tau)}\, g(\xi(\tau), \eta(\tau), \mu)\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Можно доказать [11], что эта система при всех достаточно малых ξ_0 и η_1 и $t_0 > 0$ имеет единственное решение

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu), \quad \eta(t) = \tilde{\eta}(t, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu), \tag{2.12}$$

которое в то же время есть решение системы (2.5), проходящее при $t = 0$ через точку $M_0(\xi_0, \eta_0)$, где $\eta_0 = \tilde{\eta}(0, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$, а при $t = t_0$ – через точку $M_1(\xi_1, \eta_1)$, где $\xi_1 = \tilde{\xi}(t_0, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$.

Пусть ξ_0 и η_1 удовлетворяют условиям $S_0(\xi_0) = r_0^2,\ S_1(\eta_1) = r_0^2$. На формулы

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \tilde{\xi}(t_0, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu) \equiv \xi_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu) \\ \eta_0 &= \tilde{\eta}(0, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu) \equiv \eta_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu) \end{aligned} \tag{2.13}$$

можно смотреть, с одной стороны, как на новую форму записи отображения T_0, а с другой стороны, как на новое отображение, которое точке (ξ_0, η_1, t_0), где $S_0(\xi_0) = r_0^2$, $S_1(\eta_1) = r_0^2$, ставит в соответствие точку (ξ_1, η_0).

Решение $\xi(t) = \tilde{\xi}(t, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu), \quad \eta(t) = \tilde{\eta}(t, t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$ может быть легко найдено либо методом последовательных приближений, либо в виде рядов по степеням ξ_0 и η_1. Из вида решения $\xi(t), \eta(t)$ легко вывести следующие оценки для $\xi_{\text{п}}$ и $\eta_{\text{п}}$ и их производных:

$$\begin{gathered} \|\xi_{\text{п}}\| + \|\eta_{\text{п}}\| < K\, e^{-\nu t_0}, \qquad \left\|\frac{\partial \xi_{\text{п}}}{\partial \xi_0}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_{\text{п}}}{\partial \eta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_{\text{п}}}{\partial t_0}\right\| < K\, e^{-\nu t_0}, \\ \left\|\frac{\partial \eta_{\text{п}}}{\partial \xi_0}\right\| + \left\|\frac{\partial \eta_{\text{п}}}{\partial \eta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial \eta_{\text{п}}}{\partial t_0}\right\| < K\, e^{-\nu t_0}, \end{gathered} \tag{2.14}$$

где K и ν – некоторые положительные постоянные.

В случае, когда выполнены условия А) и Б) из § 1, для $\eta_{\text{п}}$ будет иметь место следующее представление:

$$\eta_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu) = e^{-\gamma_1(\mu)t_0}[\varphi(\xi_0, \eta_1, \mu) + ...], \tag{2.15}$$

где $\varphi = (\eta_{11}(1 + \varphi_1(\xi_0, \mu)) + \varphi'(\eta_1, \mu),\ \eta_{12}\varphi_2(\xi_0, \mu), \ldots, \eta_{1n}\varphi_n(\xi_0, \mu))$; здесь функции $\varphi_i(\xi_0, \mu)$ обращаются в нуль при $\xi_0 = 0$, $\varphi'(\eta_1, \mu)$ обращается в нуль вместе с первыми производными при $\eta_{11} = ... = \eta_{1n} = 0$, а многоточия означают члены, стремящиеся к нулю вместе с производными по η_1, ξ_0 и t_0 при $t_0 \to +\infty$. Для $\xi_{\text{п}}$ в этом случае будет справедлива оценка

$$\|\xi_{\text{п}}\| + \left\|\frac{\partial \xi_{\text{п}}}{\partial \xi_0}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_{\text{п}}}{\partial \eta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_{\text{п}}}{\partial t_0}\right\| < K_1\, e^{-\alpha t} \tag{2.16}$$

где $\alpha > \gamma_1(\mu)$ при достаточно малых μ.

Обозначим через $M_0^+(\xi_0^+, 0)$ и $M_1^-(0, \eta_1^-)$ точки пересечения Γ_0 с S^+ и S^-, а через U_0 и U_1, где

$$U_0 = [M_0(\xi_0, \eta_0), \quad U_{\xi_0}^{m-1} : (S_0(\xi_0) = r_0^2,\ \|\xi_0 - \xi_0^+\| \le \varepsilon_0), \quad U_{\eta_0}^n : \|\eta_0\| \le \varepsilon_0],$$

$$U_1 = [M_1(\xi_1, \eta_1), \quad U_{\xi_1}^m : \|\xi_1\| \le \varepsilon_1, \quad U_{\eta_1}^{n-1} = (S_1(\eta_1) = r_0^2,\ \|\eta_1 - \eta_1^-\| \le \varepsilon_1)],$$

их окрестности на S^+ и S^-.

Как следует из представления решения в виде (2.12), при всех $t_0 \ge \bar{t}(\varepsilon_0, \varepsilon_1)$, где $\bar{t} \to \infty$ при уменьшении диаметров U_0 и U_1, концы траектории L, описываемой уравнениями (2.12), будут, в силу оценки (2.14), лежать в U_0 и U_1. Следовательно, область определения отображения
$T_0 : U_0 \to U_1$ можно записать в виде

$$\sigma_0 = \bigcup_{\xi_0 \in U_{\xi_0}^{m-1}} \sigma_{\xi_0} \tag{2.17}$$

где $\sigma_{\xi_0} = [M_0(\xi_0, \eta_0)$, где $\eta_0 = \eta_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$, $\bar{t} < t_0 < \infty$, $\eta_1 \in U_{\eta_1}^{n-1}]$, а область значений $\sigma_1 = T_0\, \sigma_0$ – в виде

$$\sigma_1 = \bigcup_{\eta_1 \in U_{\eta_1}^{n-1}} \sigma_{\eta_1}, \tag{2.18}$$

где $\sigma_{\eta_1} = [M_0(\xi_1, \eta_1)$, где $\xi_1 = \xi_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$, $\bar{t} < t_0 < \infty$, $\xi_0 \in U_{\xi_0}^{m-1}]$. Очевидно, $\sigma_{\xi_0} \in U^n(\xi_0)$, где $U^n(\xi_0)$ – слой в U_0 над точкой $M_0(\xi_0, 0)$, гомеоморфный $U_{\eta_0}^n$, а $\sigma_{\eta_1} \in U^m(\eta_1)$ – слой в U_1 над точкой $M_1(0, \eta_1)$, гомеоморфный U_ξ^m. Легко видеть, что замыкание σ_{ξ_0} гомеоморфно n-мерному шару, а замыкание σ_{η_1} – m-мерному шару.

При предположениях А), Б), как следует из представления (2.15) функции $\eta_0 = \eta_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$ получаем, что при фиксированных ξ_0 и η_1 кривая $\eta_0 = \eta_{\text{п}}(t_0, \xi_0, \eta_1, \mu)$, которая лежит в σ_{ξ_0}, при $t_0 \to +\infty$ стремится к точке $M_0(\xi_0, 0)$, касаясь направления, определяемого вектором $\varphi(\xi_0, \eta_1, \mu)$. Согласно предположению Г), траектория Γ_0 стремится к седлу O при $t_0 \to -\infty$, касаясь ведущей оси. Поэтому $\varphi_1'/\eta_{11} \to 0$ при $\eta_{11} \to 0$ вдоль Γ_0. Следовательно, при достаточно малом r_0 $\varphi(\xi_0, \eta_1, \mu)$ – ненулевой вектор, непрерывно зависящий от ξ_0, η_1 и μ.

б) Построение отображения T_1.

Как отмечалось выше, точки M_0^+ и M_1^- – точки пересечения Γ_0 с S^+ и S^-. Из общих теорем следует, что при достаточно малых μ траектории, пересекающие S^- в точках, близких к M_1^-, будут пересекать и S^+ в точках, близких к M_0^+. Это соответствие обозначим через T_1. Очевидно, T_1 можно записать в виде

$$\bar{\xi}_0 = P(\xi_1, \eta_1, \mu), \quad \bar{\eta}_0 = Q(\xi_1, \eta_1, \mu), \quad S_0(\bar{\xi}_0) = r_0^2, \quad S_1(\eta_1) = r_0^2 \tag{2.19}$$

где P и Q можно считать определенными в U_1 (что достигается выбором ε_1) при всех достаточно малых μ. Пусть

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi_i}\right)_{M_0^+} \neq 0, \qquad \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_j}\right)_{M_1^-} \neq 0. \tag{2.20}$$

Очевидно, в случае, когда Γ_0 входит в седло O, касаясь ведущей оси, можно считать, что $j = 1$. Введя переменные $\xi_0 = \xi_0^+ + \Delta\xi$, $\eta_0 = \eta_0$ на S^+ и $\eta_1 = \bar{\eta}_1 + \Delta\eta$, $\xi_1 = \xi_1$ на S^- и обозначения $\Delta\xi' = (\Delta\xi_1, ..., \Delta\xi_{i-1}, \Delta\xi_{i+1}, \dots, \Delta\xi_m)$ и $\Delta\eta' = = (\Delta\eta_1, \dots, \Delta\eta_{j-1}, \Delta\eta_{j+1}, \dots, \Delta\eta_n)$, зависимые переменные $\Delta\xi_i$ и $\Delta\eta_j$ в силу (2.20) можно выразить через $\Delta\xi'$ и $\Delta\eta'$ в виде $\Delta\xi_i = \xi'(\Delta\xi')$, $\Delta\eta_j = \eta'(\Delta\eta')$, где ξ' и η' обращаются в нуль при $\Delta\xi' = 0$ и $\Delta\eta' = 0$. В локальных переменных отображение T_1 будет записываться в виде

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}\xi' &= P'(\xi_1, \Delta\eta', \mu) = A_1(\mu) + (B_1(\mu) + \ ...)\xi_1 + (B_2(\mu) + \ ...)\Delta\eta', \\ \bar{\eta}_0 &= Q'(\xi_1, \Delta\eta', \mu) = A_2(\mu) + (B_3(\mu) + \ ...)\xi_1 + (B_4(\mu) + \ ...)\Delta\eta', \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $A_1(0) = A_2(0) = 0$, а многоточия означают, что не выписаны члены, стремящиеся к нулю при ξ_1 и $\Delta\eta' \to 0$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\omega^-(\mu)$ кусок многообразия $\mathfrak{M}^-(\mu)$, имеющего уравнения $\xi = 0$, $S(\eta) \leq r_0^2$; положим $D(\mu) = U_1 \cap \mathfrak{M}_\omega^-(\mu)$. Уравнения $D^+ = T_1 D^-$ будут следующие:

$$\Delta\xi' = P'(0,\, \Delta\eta',\, \mu), \quad \eta_0 = Q'(0,\, \Delta\eta',\, \mu). \tag{2.22}$$

По предположению (1.4) многообразия $\mathfrak{M}^-(0)$ и $\mathfrak{M}^+(0)$ пересекаются по Γ_0 грубо, следовательно,

$$\text{rang } B_4(0) = n - 1.$$

Поэтому легко видеть, что при достаточно малых η_0 и μ уравнения D^+ могут быть записаны в виде

$$\Delta\xi' = \psi_1(\eta_0, \mu), \quad \psi_2(\eta_0 - A_2(\mu), \mu) = \mid \tilde{B}_4(\eta_0, \mu), \eta_0 \mid + \psi_2(-A_2(\mu), \mu) = 0, \tag{2.23}$$

где $\tilde{B}_4(\eta_0, \mu) \to B_4(0)$ при $\eta_0, \mu \to 0$.

В частности, получаем следующую лемму.

Лемма. *Для того, чтобы при достаточно малых $\mu > 0$ ($\mu < 0$) у системы* (1.1) *не было двоякоасимптотических кривых к седлу O, стремящихся к Γ_0 при $\mu \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\psi_2(-A_2(\mu),\, \mu) \neq 0, \tag{2.24}$$

в) Построение отображения $T = T_1\, T_0$.

Как уже отмечалось выше, областью определения отображения T_1 можно считать U_1 . Так как $\sigma_1 \in U_1$, то получаем, что $T = T_1\, T_0$ определено на σ_0 и отображает σ_0 на S_0. Уравнения, описывающие T, – следующие:

$$\xi_1 = \xi(t_0, \xi_0, \eta_0), \quad \eta_1 = \eta(t_0, \xi_0, \eta_0), \quad \bar{\xi}_0 = P(\xi_1, \eta_1, \mu), \quad \bar{\eta}_0 = Q(\xi_1, \eta_1, \mu),$$
$$S_0(\xi_0) = r_0^2, \quad S_0(\bar{\xi}_0) = r_0^2, \quad S_1(\eta_1) = r_0^2 \,. \tag{2.25}$$

Из построения T следует, что задача о рождении периодического движения из Γ_0 эквивалентна задаче о рождении из точки M_0^+ либо неподвижной точки, либо k-кратного цикла $(M_0^\mu, \dots, M_{k-1}^\mu)$, где $M_i^\mu = T^i\, M_0^\mu$. Пусть $(\Delta\xi_i', \eta_i)$ – координаты точки M_i^μ , $(\xi_i, \Delta\eta_i)$ – координаты точки $T_0\, M_i^\mu$ и t_i – время перехода фазовой точки из M_i^μ в $T_0\, M_i^\mu$. Легко видеть, что задача о рождении кратного цикла из M_0^+ эквивалентна существованию у системы

$$\Delta\xi_{i+1}' - P'\left(\xi_{\text{п}}\left(\tau_i^{-1},\ \xi_0^+ + \Delta\xi_i,\ \eta_1^- + \Delta\eta_i,\ \mu\right),\ \Delta\eta_i',\ \mu\right) = 0,$$
$$\eta_{\text{п}}\left(\tau_{i+1}^{-1},\ \xi_0^+ + \Delta\xi_{i+1},\ \eta_1^- + \Delta\eta_{i+1},\ \mu\right) - Q'\left(\xi_{\text{п}},\ \Delta\eta_i',\ \mu\right) = 0, \tag{2.26}$$
$$i = 0, 1, \dots (\operatorname{mod} k)$$

решения $(\Delta\xi_0', \Delta\eta_0', \tau_0, \dots, \Delta\xi_{k-1}', \Delta\eta_{k-1}', \tau_{k-1})$, где $\tau_i > 0$ и $\Delta\xi_i', \Delta\eta_i', \tau_i \to 0$ при $\mu \to 0$.

Как следует из оценок (2.14), $\xi_{\text{п}}$ и $\eta_{\text{п}}$ стремятся к нулю при $t_0 \to \infty$ вместе с производными по ξ_0, η_1 и t_0. Легко видеть, что функции

$$\xi_{\text{п}}\left(\tau^{-1},\ \xi_0^+ + \Delta\xi,\ \eta_1^- + \Delta\eta,\ \mu\right),\ \ \eta_{\text{п}}\left(\tau^{-1},\ \xi_0^+ + \Delta\xi,\ \eta_1^- + \Delta\eta,\ \mu\right)$$

также стремятся к нулю при $\tau \to 0$ вместе с производными по $\Delta\xi'$, $\Delta\eta'$ и τ. Поэтому они, а следовательно, и правые части соотношений (2.26) допускают гладкое доопределение при $\tau = 0$. Так как $\operatorname{rang} B_4(0) = n-1$, то, используя теорему о неявных функциях, легко видеть, что $\Delta\xi_i'$, $\Delta\eta_i'$ могут быть разрешены относительно $\tau_0, \dots, \tau_{k-1}$ и μ. Подставляя их выражения в оставшиеся k уравнений, получим систему

$$F_i(\tau_0, \dots, \tau_{k-1}, \mu) = 0 \tag{2.27}$$

относительно $\tau_0, \dots, \tau_{k-1}$. Таким образом, в общем случае задача о рождении периодических решений может быть сведена к нахождению положительных решений системы вида (2.27).

Прежде чем переходить к задаче о рождении только одного периодического движения, рассмотрим вопрос о характере замыкания $\mathfrak{M}_\omega^-$ в окрестности O (см. условие Г)) в предположении, что выполнены условия А) и Б).

Уравнения $\mathfrak{M}_\omega^-$ будут записываться в следующем виде:

$$\xi_t = \xi(t, \xi_0, \eta_0, 0), \quad \eta_t = \eta(t, \xi_0, \eta_0, 0), \tag{2.28}$$

где при $t = 0$ точка $M_0(\xi_0, \eta_0) \in D^+$. Образ D^+ через время t обозначим через D_t^+ . При достаточно большом t уравнение D_t^+ в окрестности точки $M \in \Gamma_0$ с координатами $(\xi(t, \xi_0^+, 0, 0), 0)$, используя вид решения (2.12), можно также записать в виде

$$\xi_t = \xi(t, \xi_0^+ + \Delta\xi, \eta_t, 0), \quad \eta_0 = \eta(t, \xi_0^+ + \Delta\xi, \eta_t, 0), \quad \Delta\xi' = \psi_1(\eta_0), \quad \psi_2(\eta_0, 0) = 0 \tag{2.29}$$

или

$$\xi_t = \psi_{1t}(\eta_t,\, t) + \xi(t, \xi_0^+, 0, 0),$$
$$\psi_{2t}(\eta_t, \tau) = (B_4(0),\, \tilde{\varphi}(\xi_0^+))\eta_{t_1} + \psi_3(\eta_t) + \psi_4(\eta_t,\, t) = 0, \tag{2.30}$$

где ψ_{1t} стремится к нулю при $\eta_t \to 0$ и $t \to \infty$,

$$\tilde{\varphi}(\xi_0^+) = (1 + \varphi_1(\xi_0^+,\, 0),\, \dots, \varphi_n(\xi_0^+,\, 0)),$$

функция $\psi_3(\eta_t)$ обращается в нуль вместе с первыми производными при $\eta_t = 0$, ψ_4 стремится к нулю при $t \to \infty$ вместе с производными по η_t и, кроме того, $\psi_4(0,\, t) = 0$, а η_{t_1} – первая компонента вектора η_t.

Из вида функции ψ_{2t} следует, что в общем случае, когда выполняется неравенство

$$|\, B_4(0),\ \tilde{\varphi}(\xi_0^+)\, | \neq 0, \tag{2.31}$$

D_t^+ при $t \to \infty$ имеет в седле O касательную плоскость $\eta_1 = 0$, $\xi = 0$. Такую же касательную плоскость имеет в O и неведущее $(n-1)$-мерное многообразие $\mathfrak{M}_{n-1}^-(0)$. Чтобы найти множество точек, принадлежащих $\mathfrak{M}_\omega^- \cap \mathfrak{M}_\alpha^-(0)$, в формулах

$$\eta_{t_1} = \eta_{\text{п}}(t_0, \xi_{t_1}, \eta, 0), \quad \xi = \xi_{\text{п}}(t_0, \xi_t, \eta, 0), \quad \eta_0 = \eta_{\text{п}}(t_1, \xi_0^+ + \Delta\xi, \eta_{t_1}, 0)$$
$$\xi_{t_1} = \xi_{\text{п}}(t_1,\, \xi_0^+ + \Delta\xi,\, \eta_{t_1},\, 0), \quad \Delta\xi' = \psi_1(\eta_0,\, 0), \quad \psi_2(\eta_0,\, 0) = 0 \tag{2.32}$$

нужно сделать предельный переход при $t_0 \to \infty$ и $t_1 \to \infty$. Используя вид функции ψ_{2t}, получаем, что при выполнении неравенства (2.31) уравнения пересечения замыкания $\overline{\mathfrak{M}}_\omega^-(0)$ с $\mathfrak{M}_\alpha^-(0)$ будут

$$\xi = 0, \quad \eta_1 = -\psi'(\eta_1,\, \dots, \eta_n,\, 0). \tag{2.33}$$

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение: если $\overline{\mathfrak{M}}_\omega^-(0)$ пересекается с $\mathfrak{M}_\alpha^-(0)$ по неведущему многообразию $\mathfrak{M}_{n-1}^-$, то выполняется неравенство (2.31).

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *В общем случае пересечение замыкания $\bar{\mathfrak{M}}_\omega^-$ с $\mathfrak{M}_\alpha^-(0)$ происходит по неведущему многообразию $\mathfrak{M}_{n-1}^-$, и условие такого пересечения эквивалентно выполнению неравенства* (2.31).

Пусть точка $M(0,\, \eta)$ лежит на траектории, стремящейся к O при $t \to -\infty$, касаясь ведущего направления. Следовательно, вдоль траектории $\varphi'(\eta,\, 0)/\eta_1 \to 0$ при $t \to \infty$. Поэтому при выполнении неравенства (2.31) получаем, что при достаточно малом η_1 будет выполняться и следующее неравенство:

$$|\, B_4(0),\ \varphi(\xi_0,\, \eta_1,\, 0)\, | \neq 0, \tag{2.34}$$

§ 3. Доказательство основной теоремы

Лемма. *При выполнении условий А), Б), В), Г) § 1 из Γ_0 может родиться не более одного периодического движения.*

Рассмотрим систему

$$\begin{gathered}\Delta\xi'_{i+1} - P'(\xi_{\text{п}}\,(-\nu_1(\mu)^{-1}\ln\tau_i,\ \xi_0^+ + \Delta\xi_i,\ \eta_1^- + \Delta\eta_i,\ \mu),\ \Delta\eta'_i,\ \mu) = 0,\\ -\eta_{\text{п}}\,(-\nu_1(\mu)^{-1}\ \ln\tau_{i+1},\ \xi_0^+ + \Delta\xi_{i+1},\ \eta_1^- + \Delta\eta_{i+1},\ \mu) + Q'\,(\xi_{\text{п}},\ \Delta\eta'_i,\ \mu) = 0\\ i = 0, 1, ...(\bmod k)\end{gathered} \tag{3.1}$$

Существование решения $(\Delta\xi'_0,\ \Delta\eta'_0, \tau'_0,\ ...\,, \Delta\xi'_{k-1},\ \Delta\eta'_{k-1},\ \tau_{k-1})$, где $\tau_i > 0$, стремящегося к тривиальному при $\mu \to 0$, эквивалентно существованию у отображения T периодической точки кратности k. Так как функции $\xi_{\text{п}}\,(-\gamma_1(\mu)^{-1}\ \ln\tau,\ \xi_0^+ + \Delta\xi,\ \eta_1^- + \Delta\eta,\ \mu)$, $\eta_{\text{п}}\,(-\gamma_1(\mu)^{-1}\ \ln\tau,\ \xi_0^+ + \Delta\xi,\ \eta_1^- + \Delta\eta,\ \mu)$ в силу представления $\eta_{\text{п}}$ в виде (2.15) и оценки (2.16) для $\xi_{\text{п}}$ допускают гладкое доопределение на границе, то в силу теоремы Уитни они допускают гладкое продолжение в область $\tau < 0$. Обозначим их продолжения через $\xi^*_{\text{п}}\,(\tau,\ \Delta\xi',\ \Delta\eta',\ \mu)$, $\eta^*_{\text{п}}\,(\tau,\ \Delta\xi',\ \Delta\eta',\ \mu)$.

Рассмотрим функции

$$\begin{gathered}\Omega_1\,(x', y', \tau', x'', y'', \tau'', \mu) = x'' - P'(\xi^*_{\text{п}}\,(\tau',\ x',\ y',\ \mu),\ y',\ \mu),\\ \Omega_2\,(x', y', \tau', x'', y'', \tau'', \mu) = -\eta^*_{\text{п}}(\tau'',\ x'',\ y'',\ \mu) + Q'\,(\xi^*_{\text{п}}\,(\tau',\ x',\ y',\ \mu),\ y',\ \mu).\end{gathered} \tag{3.2}$$

Легко видеть, что они определены в некоторой окрестности начала координат $(2m + 2n - 1)$-мерного пространства, обращаются в нуль при $x' = y' = \ ... \ = \tau'' = \mu = 0$, а производные при $x' = \ ... \ = \mu = 0$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}\frac{\partial\Omega_1}{\partial x'} = 0,\quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial y'} = B_2(0),\quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial\tau'} = 0,\quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial x''} = E_{m-1},\quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial y''} = 0,\quad \frac{\partial\Omega_1}{\partial\tau''} = 0,\\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x'} = 0,\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial y'} = B_4(0),\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial\tau'} = 0,\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial x''} = 0,\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial y''} = 0,\ \frac{\partial\Omega_2}{\partial\tau''} = -\varphi(\xi_0^+, \eta_1^-, 0).\end{gathered} \tag{3.3}$$

Рассмотрим систему

$$\Omega_1\,(\Delta\xi', \Delta\eta', \tau, \Delta\xi', \Delta\eta', \tau, \mu) = 0,\quad \Omega_2\,(\Delta\xi', \Delta\eta', \tau, \Delta\xi', \Delta\eta', \tau, \mu) = 0. \tag{3.4}$$

Используя (3.3), получаем, что

$$\frac{D(\Omega_1,\ \Omega_2)}{D(\Delta\xi',\ \Delta\eta',\ \tau)}\Big|_{\Delta\xi'=\Delta\eta'=\tau=\mu=0} = -\ |\ B_4(0),\ \varphi(\xi_0^+,\ \eta_1^-,\ 0)\ |\ . \tag{3.5}$$

Так как Γ_0 стремится к седлу O при $t \to -\infty$, касаясь ведущего направления, то в силу (2.34) функциональный определитель отличен от нуля.

Следовательно, согласно теореме о неявных функциях, система (3.4) имеет только одно решение $\Delta\xi'(\mu)$, $\Delta\eta'(\mu)$, $\tau(\mu)$. Из этого следует, что отображение T может иметь одну неподвижную точку, стремящуюся к M_0^+ при $\mu \to 0$.

Аналогично система

$$\begin{gathered}\Omega_1\,(\Delta\xi'_i, \Delta\eta'_i, \tau_i, \Delta\xi'_{i+1}, \Delta\eta'_{i+1}, \tau_{i+1}, \mu) = 0,\\ \Omega_2\,(\Delta\xi'_i, \Delta\eta'_i, \tau_i, \Delta\xi'_{i+1}, \Delta\eta'_{i+1}, \tau_{i+1}, \mu) = 0 \quad i = 0, 1,\ ...\ (\bmod k)\end{gathered} \tag{3.6}$$

имеет только одно решение $(\Delta\xi_0'(\mu),\, \Delta\eta_0'(\mu),\, \tau_0(\mu),\, \dots,\, \Delta\xi_{k-1}'(\mu),\, \Delta\eta_{k-1}'(\mu),\, \tau_{k-1}(\mu))$, стремящееся к тривиальному при $\mu \to 0$. Так как решением этой системы является также решение $(\Delta\xi'(\mu),\, \Delta\eta'(\mu),\, \tau(\mu), \dots,\, \Delta\xi'(\mu),\, \Delta\eta'(\mu),\, \tau(\mu))$, где $\Delta\xi'(\mu)$, $\Delta\eta'(\mu)$, $\tau(\mu)$ – решение системы (3.4), то все неподвижные точки отображения T^k есть неподвижные точки отображения T.

Следующая лемма позволяет установить условие рождения периодического движения.

Лемма. *Для того чтобы при $\mu > 0$ $(\mu < 0)$ из Γ_0 рождалось периодическое движение, необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малых $\mu > 0$ $(\mu < 0)$ выполнялось соотношение*

$$\mathrm{Sign} \mid B_4(0),\ \varphi(\xi_0^+,\, \eta_1^-,\, 0) \mid = -\mathrm{Sign}\, \psi_2\,(-A_2(\mu),\, \mu). \tag{3.7}$$

По доказанному система (3.4) имеет решение $\Delta\xi'(\mu)$, $\Delta\eta'(\mu)$, $\tau(\mu)$. Следовательно, при достаточно малых μ тождественно выполняется соотношение

$$-\eta_\Pi^*(\tau(\mu),\, \Delta\xi'(\mu),\, \Delta\eta'(\mu),\, \mu) + Q'\,(\xi_\Pi^*(\tau(\mu),\, \Delta\xi'(\mu),\, \Delta\eta'(\mu),\, \mu),\, \Delta\eta'(\mu), \mu) \equiv 0 \tag{3.8}$$

или

$$\tau^*(\mu)\,[\,\varphi\,(\xi_0^+,\, \eta_1^-,\, 0) + O(\mu)] = Q'(0,\, \Delta\eta'(\mu),\, \mu). \tag{3.9}$$

Из (3.8) аналогично (2.23) получаем следующее тождество:

$$\psi_2\,(\tau^*(\mu)\,[\,\varphi\,(\xi_0^+,\, \eta_1^-,\, 0) + O(\mu)] - A_2(\mu),\, \mu) = 0, \tag{3.10}$$

или

$$\tau^*(\mu)\,[\mid B_4(0),\ \varphi(\xi_0^+,\, \eta_1^-,\, 0) \mid + O(\mu)] + \psi_2\,(-A_2(\mu),\, \mu) = 0. \tag{3.11}$$

Из (3.11) вытекает утверждение леммы.

Легко видеть, что условие рождения периодического движения (3.7) эквивалентно утверждению (1.5), которое, в свою очередь, эквивалентно утверждению, что выполнено (2.24) и $T_0D^+ \cap U_1 \neq \emptyset$. Существование же точек $M_1(\xi_1,\, \eta_1) \in U_1 \cap T_0D^+$ эквивалентно существованию решения $(\,\Delta\xi',\, \Delta\eta',\, t_0)$ системы

$$\begin{array}{l} \xi_1 = \xi_\Pi\,(t_0,\, \xi_0^+ + \Delta\xi,\, \eta_1^- + \Delta\eta,\, \mu), \\ \Delta\xi' = \psi_1\,(\,\eta_\Pi\,(t_0,\, \xi_0^+ + \Delta\xi,\, \eta_1^- + \Delta\eta,\, \mu),\, \mu), \\ \psi_2\,(\eta_\Pi,\, \mu) = \mid \tilde{B}_4(\eta_\Pi,\, \mu),\, \eta_\Pi \mid + \psi_2\,(-A_2(\mu),\, \mu) = 0 \end{array}, \tag{3.12}$$

удовлетворяющего условиям $t_0 > 0$, $\|\Delta\xi\| < \varepsilon_0$, $\|\Delta\eta\| < \varepsilon_1$. Но последнее уравнение, которое можно записать в виде

$$e^{-\gamma_1(\mu)t_0}\,[\mid B_4(0),\ \varphi(\xi_0^+,\, \eta_1^-) \mid + \dots] = -\psi_2\,(-A_2(\mu),\, \mu), \tag{3.13}$$

где не выписаны члены, стремящиеся к нулю при $\Delta\xi' \to 0$, $\Delta\eta' \to 0$ и $t_0 \to +\infty$, может быть разрешено относительно t_0 только при выполнении условия (3.7).

При выполнении условия (3.7) легко видеть, что уравнение $T_0D^+ \cap U_1$ может быть записано в виде

$$\xi_1 = G(\Delta\eta',\, \mu), \tag{3.14}$$

где $G \to 0$ при $\mu \downarrow 0$ $(\mu \uparrow 0)$.

Вопрос об устойчивости неподвижной точки отображения T, а следовательно, и рождающегося периодического движения сводится к исследованию корней характеристического

уравнения. Характеристическое уравнение, как нетрудно видеть, запишется в следующем виде:

$$\alpha_{m+n-1}(\mu)\, z^{m+n-1} + \ldots + \alpha_1(\mu)\, z + \alpha_0 = 0, \tag{3.15}$$

где все коэффициенты при $\mu \to 0$ стремятся к нулю, за исключением $\alpha_m(\mu)$, который стремится к $-\gamma_1(0) \mid B_4(0),\ \varphi_0(\xi_0^+,\, \eta_1^-,\, 0) \mid$. Следовательно, при $\mu \to 0$ m корней уравнения (3.12) стремятся к нулю, а модули остальных – к бесконечности. Таким образом, основная теорема доказана.

Вопрос о существовании периодических движений системы (1.1) при $\mu = 0$ вблизи Γ_0 решается следующей теоремой.

Теорема 3.1. *При выполнении условий А), Б), В), Г) существует окрестность траектории* Γ_0*, не содержащая периодических движений.*

Предположим противное, т. е. что в любой окрестности Γ_0 содержатся периодические движения. Тогда отображение T будет иметь последовательность периодических точек M_0^p, стремящихся к M_0^+ при $p \to \infty$. Обозначим через k_p период точки M_0^p. Так как, по предположению, в любой окрестности Γ_0 есть периодические движения, то, следовательно, при всех $p > \bar{p}$, где $\bar{p} \to \infty$ с уменьшением окрестности Γ_0, система (3.1) с $\mu = 0$ и $k = k_p$ будет иметь решение $(\Delta\xi_0'^p,\, \Delta\eta_0'^p,\, \tau_0^p,\, \ldots,\, \Delta\xi_{k-1}'^p,\, \Delta\eta_{k-1}'^p,\, \tau_{k-1}^p)$, где все $\tau_i^p > 0$. Следовательно, в частности, будут выполняться соотношения

$$\eta_{\text{п}}\,(\tau_{i+1}^p,\, \xi_0^+ + \Delta\xi_{i+1}^p,\, \eta_1^- + \Delta\eta_{i+1}^p,\, 0) = Q'\,(\xi_{\text{п}}\,(\tau_i^p,\, \xi_0^+ + \Delta\xi_i^p,\, \eta_1^- + \Delta\eta_i^p),\, \Delta\eta_i'^p, 0), \tag{3.16}$$

которые можно также записать в виде

$$\tau_{i+1}^p[\,\varphi\,(\xi_0^+,\, \eta_1^-, 0) + \ldots] - \tau_i^p[\ldots] = [B_4(0) + \ldots]\Delta\eta_i'^p, \tag{3.17}$$

где многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $\Delta\xi_i'^p,\, \ldots,\, \tau_{i+1}^p$, стремящихся к нулю. Так как для любого p всегда существует такое j, что $\tau_j^p \le \tau_{j+1}^p$, где j берется по $\bmod k_p$, то получаем, что определитель

$$\mid B_4(0) + \ldots,\ \varphi(\xi_0^+\, \eta_1^-,\, 0) + \ldots \mid$$

должен быть равен нулю. Но в силу, того, что $\mid B_4(0),\ \varphi\,(\xi_0^+\, \eta_1^-,\, 0) \mid \neq 0$, а $\Delta\xi_i'^p,\, \Delta\eta_i'^p,\, \tau_i^p \to 0$ при $p \to \infty$, приходим к противоречию.

(Поступила в редакцию 22/1V 1968 г.)

Литература

1. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметров, Ученые записки Горьк. ун-та, вып. 6 (1937), 3-4.
2. А. А. Андронов и Е. А. Леонтович, О рождении предельных циклов из петли сепаратрисы и из сепаратрисы состояния равновесия типа седло-узел, Матем. сб.,48 (90) (1959),335-376.
3. Е. А. Леонтович, О рождении предельных циклов от сепаратрисы, ДАН СССР, 78, № 4 (1951), 641-644.
4. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И .И. Гордон, А. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Москва, изд-во "Наука" , 1967.
5. Л. П. Шильников, Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве, ДАН СССР, 143, № 2 (1962), 289-292.

6. Л. П. Ш и л ь н и к о в, О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий, Матем. сб., 61 (104) (1963), 443-466.
7. Ю. И. Н е й м а р к и Л. П. Ш и л ь н и к о в, Об одном случае рождения периодических движений, ДАН СССР, 160, № 6 (1965), 1261-1264; Изв. ВУЗ'ов, "Радиофизика",VIII, № 2(1965), 330-340.
8. Л. П. Ш и л ь н и к о в, Об одном случае существования счетного множества периодических движений, ДАН СССР, 160, № 3 (1965), 558-561.
9. Л. П. Ш и л ь н и к о в, О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса, ДАН СССР, 172, № 1 (1967), 54-57.
10. Л. П. Ш и л ь н и к о в, О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же, ДАН СССР, 170, № 1 (1966), 49-52.
11. Л. П. Ш и л ь н и к о в, Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа, Матем. сб., 74 (116), (1967), 378-397.
12. А. М. Л я п у н о в, Общая задача об устойчивости движения, Москва-Ленинград, ОНТИ, 1935.
13. Г. М. Ф и х т е н г о л ь ц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, I (приложение), Москва-Ленинград, Гостехиздат, 1951.

Н.Н. БАУТИН, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

ПОВЕДЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВБЛИЗИ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИИ (“ОПАСНЫЕ” И “БЕЗОПАСНЫЕ” ГРАНИЦЫ)

★Опубликовано в книге Дж. Марсден, М.Мак-Кракен “Бифуркация рождения цикла и ее приложения”.(Перевод на русский язык, с дополнениями). Издательство “МИР”, Москва, 1980. Дополнение 1, с. 294 - 316.

С рождением из состояния равновесия типа фокус (или стягиванием к нему) предельного цикла связан важный для приложений вопрос о поведении динамической системы при значениях параметров, близких к границе области устойчивости состояния равновесия (или периодического движения) и о различном характере границ области устойчивости (“опасные” и “безопасные” границы). Как известно, при исследовании конкретных динамических систем и выборе значений параметров приходится считаться не только с требованием устойчивости режимов работы, но и с рядом других требований. Так, например, может оказаться, что оптимальные условия работы устройства наилучшим образом достигаются выбором (в пространстве параметров) точек, лежащих вблизи границы области, дозволенной условием устойчивости. Другой важный случай связан с тем, что некоторые параметры системы могут вести себя “квазистационарно” (эволюционировать) и притом так, что система выходит на границу области устойчивости. Естественно возникает вопрос, как при этом будет вести себя система на границе области устойчивости.

Рассмотрим сначала один из возможных случаев, имеющий большое практическое значение. Пусть начало координат есть состояние равновесия динамической системы, определяемой n уравнениями первого порядка, и характеристическое уравнение соответствующей системы первого приближения имеет вид

$$\varkappa^n + p_1\varkappa^{n-1} + ... + p_n = 0.$$

Границей области устойчивости состояния равновесия в пространстве коэффициентов p_i, на которой характеристическое уравнение имеет по крайней мере одну пару чисто мнимых корней, будет поверхность

$$R \equiv D_{n-1} = 0,$$

где D_{n-1} – предпоследний определитель в условиях Рауса-Гурвица. Будем считать коэффициенты p_i зависящими от некоторого параметра λ и предположим, что при $\lambda = \lambda_0$ выполнено $R(\lambda_0) = 0$. Ляпунов показал, что для ответа на вопрос о поведении на границе области устойчивости недостаточно уравнений линейного приближения и необходим учет влияния нелинейных членов. Именно Ляпуновым были развиты специальные методы исследования, сводившие задачу исследования устойчивости состояния равновесия на границе области устойчивости к определению знаков или к необращению в нуль некоторых постоянных величин, для вычисления которых Ляпунов дал определенные рецепты и которые получили название ляпуновских величин.

С задачей о поведении динамической системы у границы области устойчивости равновесия типа фокус тесно связаны исследования Ляпунова по устойчивости движения, относящиеся к случаю, когда среди корней характеристического уравнения есть корни, лежащие

на мнимой оси [17]. Оказалось, что поведение динамической системы вблизи границы области устойчивости определяется ее поведением на самой границе. Следующие утверждения, рассматриваемые в предположении, что $R(\lambda_0) = 0$, первая ляпуновская величина $L_1(\lambda_0)$ отлична от нуля, а λ изменяется на некотором достаточно малом интервале $\lambda_0 - \eta \leq \lambda \leq \lambda_0 + \eta$, характеризуют возможные типы границ области устойчивости [8-11].

Теорема 1. *Пусть $L_1(\lambda_0) < 0$, $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$, и пусть λ^* – фиксированное значение параметра $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (не зависящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, что для любой траектории $x_s(t)$, начальные значения которой удовлетворяют неравенству $|x_s(t)| < \varepsilon_0$, для всех t, начиная с некоторого $t > t_0$, будет выполняться неравенство $|x_s(t)| < \varepsilon_1$, если только $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$.*

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия из устойчивого становится неустойчивым, однако изображающая точка остается в малой ε_1-окрестности состояния равновесия. При обратном изменении параметра, когда состояние равновесия опять становится устойчивым, изображающая точка снова возвращается к состоянию равновесия. Система ведет себя обратимо.

Теорема 2. *Пусть $L_1(\lambda_0) > 0$, $(dR/d\lambda)_{\lambda=\lambda_0} < 0$, и пусть λ^* – фиксированное значение параметра $\lambda_0 - \eta \leq \lambda^* \leq \lambda_0 + \eta$, тогда можно указать такое ε_0 (не зависящее от λ^*), что для всякого сколь угодно малого положительного $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ можно найти такое положительное $\eta_0 < \eta$, такие t_0 и t_1 $(t_1 > t_0)$ и такие траектории $x_s(t, \lambda)$, что из неравенства $|\lambda^* - \lambda| < \eta_0$ для каждой из этих траекторий будут следовать неравенства $|x_s(t_0, \lambda^*)| < \varepsilon_1$, $|x_s(t_1, \lambda^*)| > \varepsilon_0$ (t_0 и t_1 могут быть различны для различных траекторий).*

Таким образом, при возрастании параметра состояние равновесия при $\lambda = \lambda_0$ из устойчивого становится неустойчивым. Изображающая точка срывается с состояния равновесия и отбрасывается на достаточно далекое расстояние. При обратном изменении параметра изображающая точка не возвращается в состояние равновесия, когда оно опять становится устойчивым. Система ведет себя необратимо.

Следовательно, природа границ области устойчивости может быть двоякой.

"Безопасные" границы – это такие границы, достаточно малое нарушение которых влечет за собой лишь малые (сколь угодно малые при достаточно малых нарушениях) изменения состояния системы. Можно показать, что в этом случае координаты системы будут претерпевать лишь весьма малые периодические изменения, накладывающиеся на равновесное (теперь неустойчивое) положение системы.

"Опасные" границы – это такие границы, сколь угодно малое нарушение которых влечет за собой переход системы в новое состояние, которое не может быть приближено к исходному выбором нарушений границы достаточно малыми.

Описанные ситуации имеют простой физический смысл и соответствуют, например (в частном случае), мягкому и жесткому возникновению автоколебаний. Эти ситуации для системы двух уравнений впервые были описаны А. А. Андроновым в 1931 г. в докладе "Математические проблемы теории автоколебаний" на I Всесоюзной конференции по колебаниям [1]. Выяснение особенностей поведения динамической системы вблизи границ области устойчивости в связи с возникновением или исчезновением периодических решений, классификация основных типов границ и типов поведения, а также разыскание соответствующих критериев представляют и более общий интерес с точки зрения теории бифуркаций. Мы приведем здесь некоторые факты, относящиеся к этой проблеме.

1. Опасные и безопасные границы. Поведение траектории. Алгоритмические критерии.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = ax + by + P(x, y), \quad \dot{y} = cx + dy + Q(x, y), \tag{1}$$

где

$$P(x, y) = \sum_{i+j\geq 2} a_{i,j}\, x^i y^j, \quad Q(x, y) = \sum_{i+j\geq 2} b_{i,j}\, x^i y^j$$

и коэффициенты можно считать зависящими от некоторого параметра λ (параметров λ_i).

В начале координат будет устойчивый фокус, если

$$q \equiv \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} > 0, \quad p \equiv -(a + d) > 0, \quad p^2 - 4q < 0.$$

Следуя Ляпунову и Андронову [17,2], строим в окрестности начала координат функцию

$$\psi(\rho_0, p) = \left(e^{-\frac{2\pi}{\omega}p} - 1\right)\rho_0 + \alpha_2\rho_0^2 + \alpha_3\rho_0^3 + \dots. \tag{2}$$

Теорема (Ляпунова) *Первый не равный нулю коэффициент в разложении функции $\psi(\rho_0, 0)$ непременно нечетного номера.*

Если $p = 0$, то первый не равный нулю коэффициент α_i называется ляпуновской величиной: $\alpha_3 \equiv L_1$ – первая ляпуновская величина; если $\alpha_3 = 0$, $\alpha_5 \neq 0$, то $\alpha_5 \equiv L_2$ – вторая ляпуновская величина, и т. д.

Рассмотрение функции (2) в зависимости от параметров позволяет сделать исчерпывающие заключения относительно характера траекторий в окрестности состояния равновесия $x = y = 0$ при различных значениях параметров. Отличные от нуля корни функции соответствуют предельным циклам. Вычисление ляпуновских величин в общем случае системы n уравнений с характеристическим уравнением, имеющим пару чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательной действительной частью, с помощью процедуры, указанной Ляпуновым, приводится к вычислению тех же величин α_i для некоторой системы второго порядка вида (1), выводимой из предложенной системы n уравнений.

Первая ляпуновская величина, выраженная через коэффициенты системы (1), приведена в [4,8,11,13]. Вторая ляпуновская величина вычислена в [21]. Для системы трех и четырех уравнений общего вида в [11] изложено развернутое приведение к каноническому виду и вычислена первая ляпуновская величина через коэффициенты преобразованной системы (в случае четырех уравнений отдельно для случая, когда вторая пара корней комплексная и когда она действительная). Для системы n уравнений в случае, когда разложения правых частей не содержат членов второго порядка, в [11] дано выражение первой ляпуновской величины в виде интеграла по кривым вспомогательной консервативной системы без приведения исходной системы к каноническому виду. Там же даны аналогичные выражения первой ляпуновской величины и для общего вида систем двух, трех и четырех уравнений.

Опишем применительно к системе (1) простейшие возможные случаи.

А. Пусть $p(\lambda_0) = 0$ и $L_1(\lambda_0) < 0$. При переходе через границу $p = 0$ от положительных значений к отрицательным появляется единственный устойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра устойчивый предельный цикл стягивается в точку. Переход

через границу $p = 0$ соответствует возникновению области неустойчивости внутри устойчивого предельного цикла, которая, однако, остается сколь угодно малой при достаточно малом нарушении условия устойчивости и стягивается в точку при обратном изменении параметра. Практически система при малом нарушении условия устойчивости будет вести себя как устойчивая (граница области устойчивости – безопасная).

Б. Пусть $p(\lambda_0) = 0$ и $L_1(\lambda_0) > 0$. При переходе через границу $p = 0$ от положительных значений к отрицательным к состоянию равновесия стягивается единственный неустойчивый предельный цикл. При обратном изменении параметра из состояния равновесия появляется неустойчивый предельный цикл. Переход через границу $p = 0$ соответствует исчезновению области устойчивости внутри неустойчивого предельного цикла; изображающая точка при этом срывается с состояния равновесия и уходит за пределы рассматриваемой окрестности состояния равновесия (граница области устойчивости – опасная).

Особенности в поведении динамической системы вблизи тех точек границы $p = 0$, где безопасная часть границы переходит в опасную и где, следовательно, первый ляпуновский коэффициент $L_1(\lambda_0)$ обращается в нуль, определяются знаком второй ляпуновской величины $L_2(\lambda_0)$, для вычисления которой необходимо учесть в разложениях правых частей уравнения (1) члены до пятого порядка включительно. В возможностях, которые здесь возникают, можно ориентироваться, рассматривая функцию (2). Нетрудно показать [10], что если в ряду коэффициентов $p,\ \alpha_2 \equiv L_1(\lambda),\ \alpha_5 \equiv L_2(\lambda)$ имеются одна или две перемены знака, то в малой окрестности начала координат будут существовать один или два корня функции $\psi(\rho_0, p)$ и соответственно один или два предельных цикла на фазовой плоскости вокруг начала координат.

В зависимости от знаков первой и второй ляпуновских величин и знака действительной части корней характеристического уравнения в окрестности начала координат могут существовать один или два предельных цикла при всех возможных сочетаниях устойчивости и неустойчивости. Знак второй ляпуновской величины определяет при этом характер устойчивости внешнего предельного цикла и поэтому играет здесь роль, совершенно подобную роли знака первой ляпуновской величины, увеличивая или уменьшая опасность для изображающей точки быть выброшенной случайным толчком из малой окрестности состояния равновесия.

В общем случае системы n уравнений с характеристическим уравнением, имеющим одну пару чисто мнимых корней и остальные корни с отрицательной действительной частью, все сказанное о поведении траекторий системы (1) будет справедливо по отношению к некоторому двумерному многообразию в фазовом пространстве системы, заполненному траекториями и содержащему состояние равновесия и предельные циклы (если последние существуют). Для остальных траекторий это многообразие будет элементом притяжения. Изложенное иллюстрирует (применительно к системе трех уравнений) рис. 1. В случае $L_1(\lambda_0) < 0$ при изменении знака p неустойчивый предельный цикл, расположенный на двумерном многообразии, стягивается к состоянию равновесия. При этом исчезает пространственная область устойчивости, заполненная траекториями, идущими к состоянию равновесия (область стягивается к паре сепаратрис, идущих в состояние равновесия).

Рассмотрим поведение динамической системы в малой окрестности точки на границе области устойчивости, в которой первая ляпуновская величина обращается в нуль. Рис. 2 *а,б* дают разбиения плоскости параметров (параметрами могут быть, например, сами величины p и L_1) для случаев $L_2 > 0$ и $L_2 < 0$ в точке смыкания опасной и безопасной границ. Жирной линией отмечена безопасная часть границы $p = 0$, тонкой – опасная. Пункти-

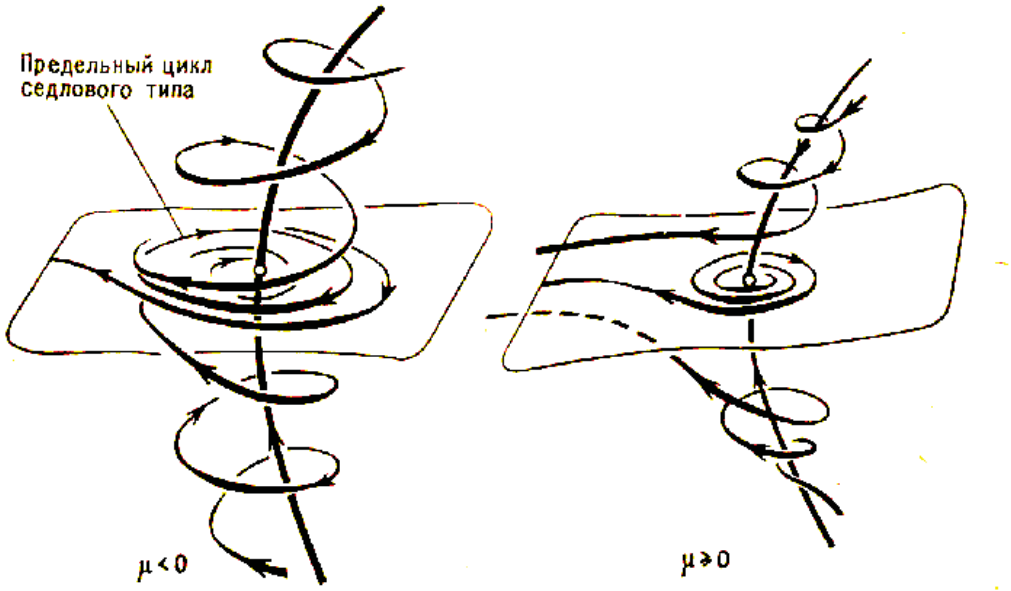


Рис. 1

ром отмечена бифуркационная кривая двойных циклов. Ее точкам соответствуют двойные циклы (полуустойчивые), возникшие из сгущения траекторий. При смещении параметров с кривой двойных циклов двойной предельный цикл либо исчезает, либо разделяется на два (устойчивый и неустойчивый). Если $L_2 > 0$, то при обходе точки $p = 0$, $L_1 = 0$, начиная с области $p > 0$, $L_1 < 0$ в направлении против часовой стрелки, последовательно осуществляются бифуркации: рождение устойчивого предельного цикла из состояния равновесия, слияние неустойчивого предельного цикла с устойчивым, исчезновение двойного цикла, рождение неустойчивого цикла. Если $L_2 < 0$, то бифуркации осуществляются в таком порядке: рождение устойчивого, рождение неустойчивого, слияние устойчивого с неустойчивым и исчезновение двойного цикла. Штриховкой покрыта область существования двух циклов. Оценка расположения бифуркационной кривой двух циклов в зависимости от значения L_2 дана в [21]. Асимптотическое представление кривой двойных циклов (в обозначениях разд. 1) дается формулой

$$\sqrt{q}\, L_1^2 + 8\,\pi\, L_2\, p = 0 \quad (L_1 L_2 < 0).$$

Более сложные ситуации возникают, если первая не обращающаяся в нуль на границе $p = 0$ ляпуновская величина будет L_k, где $k > 2$. В этом случае при малых изменениях параметров λ_i в окрестности состояния равновесия в начале координат может появиться более двух предельных циклов. Ситуации здесь будут похожими на уже рассмотренные при $L_1 \neq 0$ или $L_2 \neq 0$ на границе $p = 0$ и будут зависеть от знака первой отличной от нуля ляпуновской величины и от того, сколько будет циклов (четное или нечетное число). Сложность, возникающая в этом случае, связана в первую очередь с тем, что технические трудности вычисления последовательных ляпуновских величин с ростом их номера быстро возрастают. Эту трудность можно обойти, используя ЭВМ для алгебраического вычисления ляпуновских величин.

С. Д. Щуко [29,30,31] разработала алгоритм, позволяющий последовательно вычислять на ЭВМ ляпуновские величины (каждую следующую в предположении равенства нулю всех

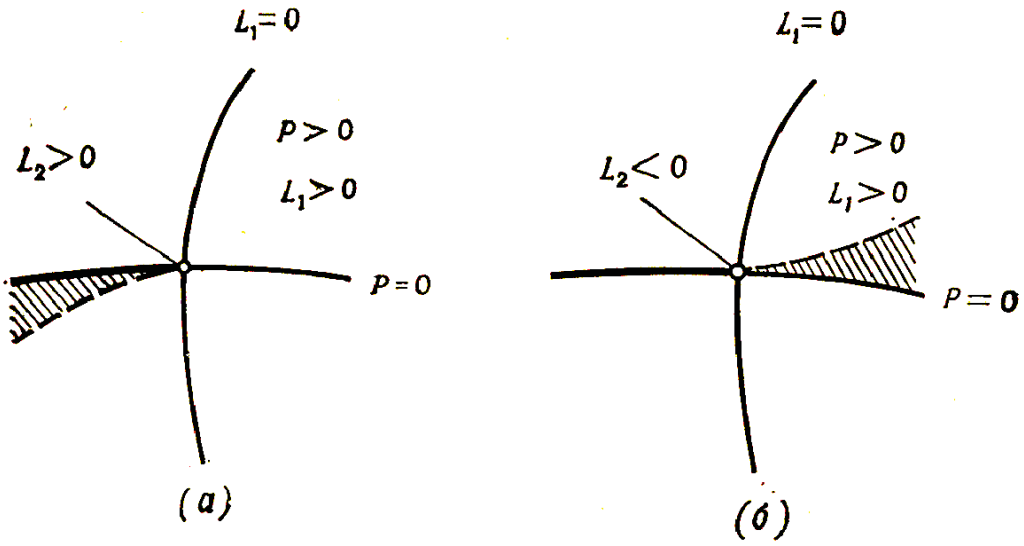


Рис. 2. Разбиение плоскости параметров в окрестности точки, где опасная часть границы переходит в безопасную.

предыдущих). В качестве исходной для вычисления ляпуновских величин рассматривается каноническая система уравнений

$$\dot{x} = -y + \sum_{m=2}^{n} P_m(x,y), \quad \dot{y} = x + \sum_{m=2}^{n} Q_m(x,y), \tag{3}$$

где P_m и Q_m – однородные полиномы степени m, взятые из разложений правых частей системы (1) после приведения ее к каноническому виду, наибольшие степени которых, n, согласуются с порядковым номером вычисляемой ляпуновской величины.

Для вычислений удобны методы, позволяющие осуществлять внутренний контроль вычислений в силу симметрии получающихся выражений. Это реализуется при переходе к комплексным переменным [14].

Полагая $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, получаем

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = -\frac{\bar{z} + Z(z,\bar{z})}{z + \bar{Z}(z,\bar{z})}, \tag{4}$$

где

$$Z(z,\bar{z}) = \sum_{m=2}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{km}\, z^k\, \bar{z}^{m-k},$$

$$\bar{Z}(z,\bar{z}) = \sum_{m=2}^{n} \sum_{k=0}^{m} \bar{a}_{km}\, \bar{z}^k\, z^{m-k},$$

Наличие центра в начале координат равносильно существованию голоморфного интеграла

$$\Phi(z,\bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \Phi_{k,\,m-k}\, z^k\, \bar{z}^{m-k}, \tag{5}$$

уравнения

$$L(\Phi) = \frac{d\Phi}{dz}\,\frac{dz}{dt} + \frac{d\Phi}{d\bar{z}}\,\frac{d\bar{z}}{dt}. \tag{6}$$

Функции $\Phi(z, \bar{z})$ сопоставляется последовательность $(m+1)$-мерных комплексных векторов Φ_m с компонентами, являющимися коэффициентами однородных полиномов степени m из (5):

$$\Phi_m = \{\Phi_{0,m};\ \Phi_{1,m-1};\ \ldots;\Phi_{m-1,1};\ \Phi_{m,0}\}.$$

Для того, чтобы в начале координат был центр системы (3), необходимо и достаточно [18], чтобы векторное уравнение (6) имело решение $\Phi = \{\Phi_m\}$, удовлетворяющее условиям

$$\Phi_{0,0} = \Phi_{0,1} = \Phi_{1,0} = \Phi_{0,2} = \Phi_{2,0} = 0;\ \ \Phi_{k,k} = 0,\ k \geq 2;$$
$$\Phi_{1,1} = 1;\ \ \Phi_{k,m-k} = \bar{\Phi}_{m-k,k}.$$

Векторы Φ_m находятся по рекуррентной формуле

$$\Phi_m = -C_{m,m}^{-1}\left\{\sum_{l=2}^{m-1} C_{m,\,l}\,\Phi_l\right\},\quad m > 2. \tag{7}$$

Здесь $C_{m,l} = \{c_{rs}^{(m,\,l)}\}$ – матрица из $m+1$ строк и $l+1$ столбцов, причем

$$c_{rs}^{(m,\,l)} = (l-s)a_{r-s,\,m-l+1} + s\,\bar{a}_{m-l-r+s,\,m-l+1},$$

где r – номер строки, s – номер столбца, $C_{m,m}^{-1} = \{c_{rs}^{-1}\}$ – квадратная диагональная $(m+1)$-матрица с элементами вида

$$\begin{cases} c_{rs}^{-1} = -\dfrac{i\delta_{rs}}{m-2s} \ \text{ при}\, m \neq 2s,\ \text{где } \delta_{rs}\text{– символ Кронекера} \\ c_{rs}^{-1} = 0 \quad \text{при}\, m = 2s, \end{cases}$$

Ляпуновские величины имеют тогда вид

$$L_k \equiv \alpha_{2k+1} = i\sum_{l=2}^{2k-1} T_{2k,\,l}\Phi_l,$$

где $T_{2k,\,l}$ – средняя строка матрицы $C_{2k,l}$. Поскольку все элементы матриц, входящих в (7), содержат в качестве множителя i, вектор Φ_m не будет иметь мнимого множителя.

При реализации алгоритма на ЭВМ нужно учитывать необходимость проведения тождественных алгебраических преобразований над полиномами, коэффициенты которых являются обыкновенными дробями, и недопустимость приближенного представления дробей как в записи исходной информации, так и на всех промежуточных этапах. Поэтому для реализации алгоритма строится арифметика обыкновенных дробей, сохраняющая целочисленность числителя и знаменателя и обеспечивающая возможность выполнения в целых числах операций умножения, сложения и сокращения обыкновенных дробей без использования арифметических операций, реализованных в системе команд ЭВМ, а также перевод числителя из двоичной системы в десятичную [31].

Как видно из (7), для построения вектора Φ_m необходимо хранить в оперативной памяти машины предыдущие векторы, что предъявляет определенные требования к объему памяти машины.

Разработанный алгоритм был применен С. Д. Щуко для вычисления ляпуновских величин некоторых систем вида (3).

а) Для системы

$$\dot{x} = -y + P_2(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_2(x, y), \tag{8}$$

приведенной к виду (4), где

$$Z(z, \bar{z}) = \alpha\bar{z}^2 + \beta z\bar{z} + \gamma z^2,$$

получены три последовательные ляпуновские величины

$$\alpha_3 = \bar{\alpha}\bar{\beta} - \alpha\beta;$$

$$\alpha_5 = \frac{2}{3}(\bar{\alpha}^2\beta\bar{\gamma} - \alpha^2\bar{\beta}\gamma) + \frac{2}{3}(\bar{\beta}^3\gamma - \beta^3\bar{\gamma}) + \bar{\alpha}\beta^2\bar{\gamma} - \alpha\bar{\beta}^2\gamma;$$

$$\alpha_7 = 8(\alpha^2\beta\bar{\beta}^2\gamma - \bar{\alpha}^2\bar{\beta}\beta^2\bar{\gamma}) + \frac{5}{4}(\bar{\alpha}\beta^2\bar{\gamma}^2\gamma - \alpha\bar{\beta}^2\gamma^2\bar{\gamma}) +$$

$$+\frac{5}{8}(\bar{\beta}^3\gamma^2\bar{\gamma} - \beta^3\bar{\gamma}^2\gamma) + \frac{53}{4}(\alpha\beta\bar{\beta}^3\gamma - \bar{\alpha}\bar{\beta}\beta^3\bar{\gamma}) + \frac{69}{8}(\bar{\beta}\beta^4\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta}^4\gamma).$$

б) Для системы

$$\dot{x} = -y + P_3(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_3(x, y), \tag{9}$$

приведенной к виду (4), где

$$Z(z, \bar{z}) = \alpha\bar{z}^3 + \beta z\bar{z}^2 z + \gamma z^2\bar{z} + \delta z^3,$$

получено шесть последовательных ляпуновских величин

$$\alpha_3 = k_3(\beta - \bar{\beta}), \qquad \alpha_5 = k_5(\alpha\gamma - \bar{\alpha}\bar{\gamma}),$$

$$\alpha_7 = k_7\left[(\alpha^2\delta - \bar{\alpha}^2\bar{\delta}) + \frac{8}{3}(\alpha\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\gamma\bar{\delta}) + (\gamma^2\delta - \bar{\gamma}^2\bar{\delta})\right],$$

$$\alpha_9 = k_9\left[(\alpha\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\gamma\bar{\delta}) + \frac{1}{3}(\gamma^2\bar{\delta} - \bar{\gamma}^2\delta)\right]\bar{\beta},$$

$$\alpha_{11} = k_{11}\left[(\alpha\bar{\gamma}\delta - \bar{\alpha}\gamma\bar{\delta})\left(\frac{207}{4}\bar{\alpha}\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}\right) + \right.$$

$$\left. +(\gamma^2\bar{\delta} - \bar{\gamma}^2\delta)\left(\frac{1}{3}\delta\bar{\delta} - 134\bar{\alpha}\bar{\gamma} + \frac{605}{12}\gamma\bar{\gamma}\right)\right],$$

$$\alpha_{13} \equiv 0, \qquad k_j = const > 0.$$

В случаях а) и б) обращение в нуль найденных ляпуновских величин дает необходимые и достаточные условия центра для систем (8) и (9), полученные впервые соответственно Каптейном [15] и К. Е. Малкиным [31].

У систем (8) и (9) при изменении коэффициентов (в том числе и линейных членов) из состояния равновесия (0,0) не может появиться более трех (для системы (8)) или более пяти (для системы (9)) предельных циклов [10,22].

в) Для системы

$$\dot{x} = -y + P_5(x, y), \quad \dot{y} = x + Q_5(x, y),$$

приведенной к виду (4), где

$$Z(z,\bar z)=\alpha\bar z^5+\beta\bar z^4 z+\gamma\bar z^3 z^2+\delta\bar z^2 z^3+\varepsilon\bar z z^4+\zeta z^5,$$

получены первые три ляпуновские величины

$$\alpha_3=k_3(\gamma-\bar\gamma),\qquad \alpha_5=k_5\left[(\alpha\varepsilon-\bar\alpha\bar\varepsilon)+(\beta\delta+\bar\beta\bar\delta)+\right],$$
$$\alpha_7=k_7\left[(\alpha\beta\zeta-\bar\alpha\bar\beta\bar\zeta)+\frac{9}{2}(\alpha\delta^2-\bar\alpha\bar\delta^2)+\frac{3}{2}(\bar\alpha\beta\bar\delta-\alpha\bar\beta\delta)+\right.$$
$$+\frac{9}{2}(\alpha\bar\delta\zeta-\bar\alpha\delta\bar\zeta)+\frac{9}{2}(\beta\bar\delta\varepsilon-\bar\beta\delta\bar\varepsilon)+3(\beta\bar\varepsilon\zeta-\bar\beta\varepsilon\bar\zeta)+$$
$$\left.+\frac{3}{2}(\delta^2\bar\varepsilon-\bar\delta^2\varepsilon)+\frac{5}{2}(\delta\varepsilon\bar\zeta-\bar\delta\bar\varepsilon\zeta)\right],\quad k_j=const>0.$$

г) В общем случае системы

$$\dot x=-y+P(x,y),\quad \dot y=x+Q(x,y),$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y))$ – функции, аналитические в окрестности начала координат, разложения которых начинаются с членов порядка не меньше двух, для вычисления α_3 в разложениях правых частей нужно удерживать члены до третьего порядка включительно, а для вычисления α_5 – до пятого включительно. После приведения (10) к виду (4) получаем

$$Z(z,\bar z)=\alpha\bar z^2+\beta z\bar z+\gamma z^2+\varepsilon\bar z^2 z+\varphi\bar z z^2+\psi z^3+\varkappa\bar z^4+\lambda\bar z^3 z+\mu\bar z^2 z^2+\nu\bar z z^3+\pi z^4+$$
$$+\rho\bar z^5+\sigma\bar z^4 z+\tau\bar z^3 z^2+\theta\bar z^2 z^3+\xi\bar z z^4+\chi z^5.$$

Первые две ляпуновские величины будут

$$\alpha_3=-\alpha\beta+\bar\alpha\bar\beta+\varepsilon-\bar\varepsilon,$$

$$\alpha_5=-\frac{2}{3}(\alpha^2\bar\beta\gamma-\bar\alpha^2\beta\bar\gamma)+(\bar\alpha\beta^2\bar\gamma-\alpha\bar\beta^2\gamma)+\frac{2}{3}(\bar\beta^3\gamma-\beta^3\gamma)+(\alpha\bar\beta\bar\delta-\bar\alpha\beta\delta)+\frac{2}{3}(\alpha\gamma\delta-\bar\alpha\bar\gamma\bar\delta)+$$
$$+2(\beta^2\delta-\bar\beta^2\bar\delta)+\frac{5}{3}(\bar\beta\gamma\delta-\beta\bar\gamma\bar\delta)+(\bar\varepsilon-\varepsilon)\bar\alpha\bar\beta+\frac{4}{3}(\bar\varepsilon-\varepsilon)\gamma\bar\gamma+(\alpha\beta\varphi-\bar\alpha\bar\beta\bar\varphi)+$$
$$+\frac{2}{3}(\alpha\gamma\bar\varphi-\bar\alpha\bar\gamma\varphi)+(\beta\bar\gamma\varphi-\bar\beta\gamma\bar\varphi)+\frac{2}{3}(\alpha\bar\gamma\psi-\bar\alpha\gamma\bar\psi)+\frac{1}{3}(\beta\gamma\bar\psi-\bar\beta\bar\gamma\psi)+(\bar\delta\bar\varphi-\delta\varphi)+$$
$$+(\varepsilon-\bar\varepsilon)\varepsilon-\frac{4}{3}(\gamma\varkappa-\bar\gamma\bar\varkappa)+(\bar\alpha\lambda+\alpha\bar\lambda)+2(\bar\beta\bar\lambda-\beta\lambda)+(\beta\bar\mu-\bar\beta\mu)+\frac{1}{3}(\gamma\bar\nu-\bar\gamma\nu)+(\tau-\bar\tau).$$

2. Основные типы границ областей устойчивости состояний равновесия и периодических движений.

Рассмотрим n-мерную гладкую динамическую систему, задаваемую уравнениями

$$\dot x=X(x,\lambda)$$

и непрерывно зависящую от параметров $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k)\in\mathbb{R}^k$. Предположим, что система при $\lambda=\lambda_0$ имеет сток Γ_{λ_0}, который есть либо грубое устойчивое состояние равновесия, либо грубое устойчивое периодическое движение. Тогда, как известно, при всех достаточно малых $\lambda-\lambda_0$ система также будет иметь сток Γ_λ, близкий к Γ_{λ_0}. Введем понятие стока Γ

рассматриваемой системы и его области устойчивости. Предварительно заметим, однако, что на эту систему, зависящую от λ, нужно смотреть как на k-параметрическое семейство систем X_λ.

Системы X_{λ_1} и X_{λ_2} будем называть Γ-эквивалентными, если в пространстве параметров существует простая дуга Λ, соединяющая системы X_{λ_1} и X_{λ_2}, и такая, что система X_λ при $\lambda \in \Lambda$ имеет грубый сток Γ_λ, непрерывно зависящий от λ. Множество Γ-эквивалентных систем в пространстве параметров будем обозначать через D_Γ и называть областью устойчивости стока Γ рассматриваемой системы или областью грубости устойчивого движения Γ.

Современное состояние теории устойчивости и теории бифуркаций позволяет в принципе решить задачу, связанную с выделением основных типов границ области D_Γ, т. е. гиперповерхностей S^{k-1} размерности $k-1$. Для изучения переходов через эти граничные поверхности удобно ограничиться рассмотрением однопараметрических семейств $X_{\lambda(\mu)} = X(\mu)$, где $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ и выбирается так, что при $\mu < 0$ будет $X(\mu) \in D_\Gamma$, $X(0) \in S^{k-1}$, а при $\mu > 0$ будет $X(\mu) \notin \bar{D}_\Gamma$. Сток Γ при $\mu < 0$ будем тогда обозначать через $\Gamma(\mu)$, а топологический предел $\Gamma(\mu)$ при $\mu \to 0$ через Γ^*. Множество Γ^* есть состояние равновесия, если $\Gamma(\mu)$ – состояние равновесия. В случае же, когда $\Gamma(\mu)$ есть периодическое движение, Γ^* может быть и более сложным множеством. Так, Γ^* в ряде случаев есть контур, составленный из траекторий, одной из которых является состояние равновесия [1].

Критерии безопасных границ. 1. Пусть $\Gamma(\mu)$ – состояние равновесия и Γ^* на границе имеет только одну пару чисто мнимых корней. Как известно, в этом случае система $X(\mu)$ в некоторых подходящих переменных может быть записана в виде

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \rho(\mu)x - \omega(\mu)y + [L(\mu)x - \alpha(\mu)y](x^2+y^2) + ... + f(x,y,z)z,\\
\dot{y} &= \omega(\mu)x + \rho(\mu)y + [\alpha(\mu)x + L(\mu)y](x^2+y^2) + ... + g(x,y,z)z,\\
\dot{z} &= [A(\mu) + h(x,y,z)]z,
\end{aligned}$$

где $\omega(0) \neq 0$, $\rho(0) = 0$, и $\rho(\mu)\mu > 0$ при $\mu \neq 0$, а матрица $A(\mu)$ устойчивая. Граница S_1^{k-1}, соответствующая этому случаю, будет безопасной, если $L(0) < 0$. При возрастании μ от нуля из устойчивого негрубого фокуса Γ^* рождается устойчивое периодическое движение, которое и будет установившимся режимом системы (рис.3).

2 . Пусть $\Gamma(\mu)$ – периодическое движение и при выходе на границу области устойчивости один из мультипликаторов становится равным (-1). Соответствующее отображение последования T на площадке, трансверсальной к периодическому движению, можно записать в виде

$$\bar{x} = \rho(\mu)x + a_2(\mu)x^2 + a_3(\mu)x^3 + ... + f(x,y,\mu)y,$$

$$\bar{y} = [A(\mu) + g(x,y,\mu)]y,$$

где $\rho(0) = -1$, $|\rho(\mu)| < 1$, при $\mu < 0$ и $|\rho(\mu)| > 1$ при $\mu > 0$, а собственные числа $A(\mu)$ лежат внутри единичной окружности. Граница S_2^{k-1}, соответствующая этому случаю, будет безопасной, если ляпуновская величина $L(0) = -2a_3(0) - 2a_2^2(0)$ отрицательна. Из вида отображения T следует, что инвариантное многообразие, соответствующее $y = 0$, есть лист Мёбиуса со средней линией, являющейся нашим периодическим движением. Поэтому при

[1] Невозможность других бифуркационных пленок коразмерности один, соответствующих другим топологическим пределам $\Gamma(\mu)$, в настоящее время полностью еще не доказана.

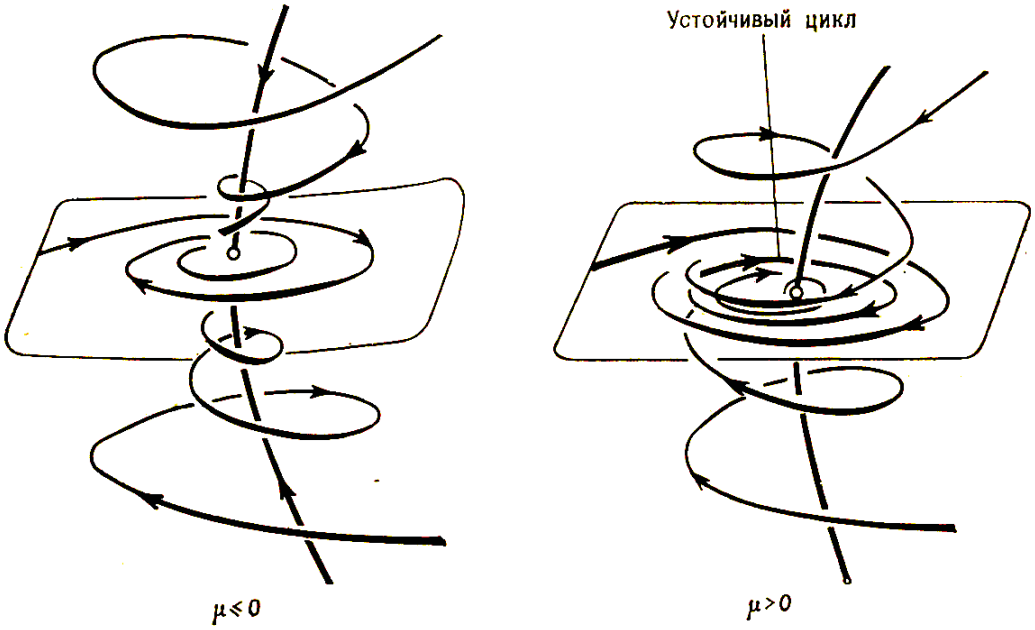


Рис. 3.

$\mu > 0$ от него будет ответвляться устойчивое периодическое движение с периодом, близким к удвоенному периоду Γ^* [20], на которое и будет "наматываться" изображающая точка (рис. 4).

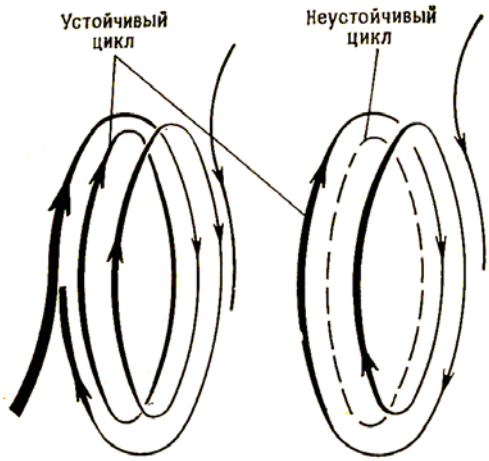


Рис. 4.

3. Пусть $\Gamma(\mu)$ – периодическое движение и при выходе системы на границу два мультипликатора становятся равными $e^{i\varphi(0)}$, где $\varphi(0) \neq 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi$. Здесь отображение последования T можно записать в виде

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \rho(\mu)[x\cos\varphi(\mu) - y\sin\varphi(\mu)] + [g(\mu)x - b(\mu)y](x^2+y^2) + ... + f(\ \ )z,\\
\bar{y} &= \rho(\mu)[x\sin\varphi(\mu) + y\cos\varphi(\mu)] + [b(\mu)x + g(\mu)y](x^2+y^2) + ... + h(\ \ )z,\\
\bar{z} &= [A(\mu) + h_1(x,y,z;\mu)]z,
\end{aligned}$$

где $\rho(\mu) < 1$ при $\mu < 0$, $\rho(0) = 1$ и $\rho(\mu) > 1$ при $\mu > 0$. В этом случае граница S_3^{k-1} безопасная, если $g(0) < 0$. Переход через S_3^{k-1} приводит к рождению из периодического движения

устойчивого двумерного инвариантного тора (см. настоящую книгу). По образному выражению А. А. Андронова, поставившего эту задачу, “с цикла слезает шкура”. Таким образом, в этом случае имеет место мягкий переход от автоколебаний к “режиму биений” (рис. 5).

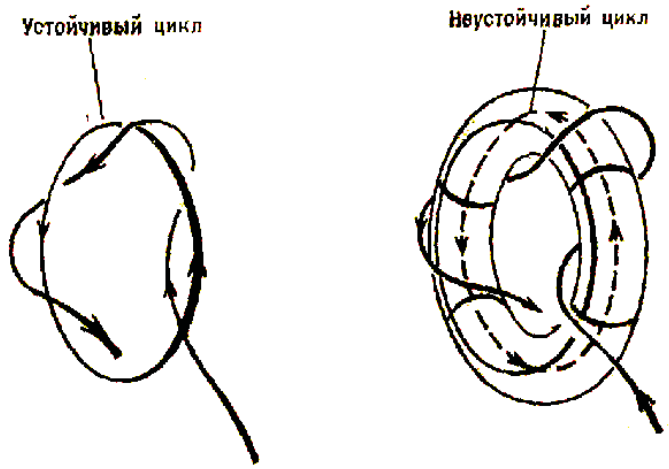


Рис. 5. Рождение устойчивого инвариантного тора.

4. Этот случай характерен тем, что пределом $\Gamma(\mu)$ при $\mu \to 0$ является контур Γ^*, составленный из простейшего негрубого состояния равновесия типа седло-узел (см. случай 6) и сепаратрисы седло-узла, возвращающейся в него. То, что граница S_4^{k-1} (а она выделяется еще дополнительным условием, что Γ^* – гладкий контур) является безопасной, есть простое следствие устойчивости Γ^*. При $\mu > 0$ установившимся режимом системы будет устойчивое состояние равновесия, возникающее при разделении седло-узла (рис. 6).

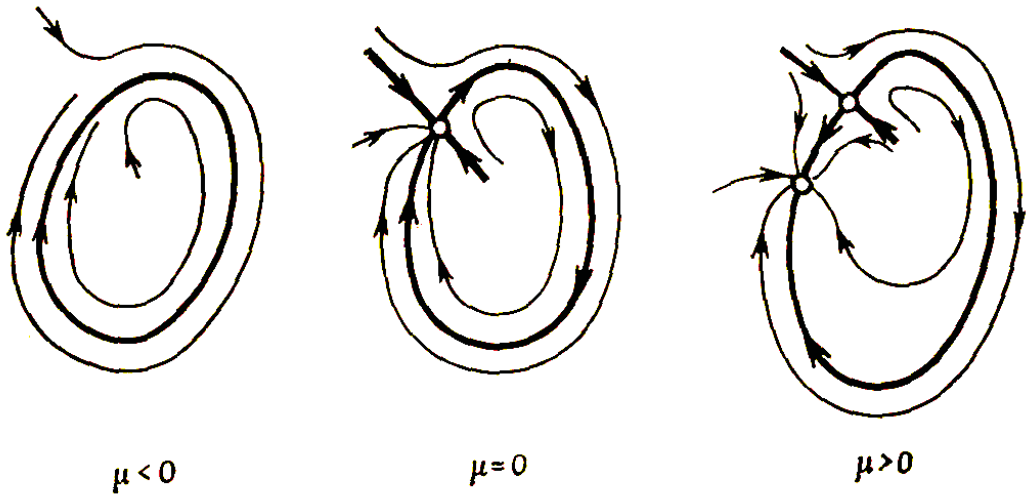


Рис. 6. Исчезновение устойчивого предельного цикла с возникновением устойчивого узла.

Критерии опасных границ. 5. В этом случае, топологическим пределом периодического движения $\Gamma(\mu)$ является контур Γ^*, составленный из седла и траектории, двояко-асимптотической к нему. Общий случай границы, которую обозначим S_5^{k-1} выделяется

следующими [4,8,9,10]: корни $\rho_1, ..., \rho_n$ характеристического уравнения в седле таковы, что $Re\,\rho_i < 0$, $(i = 1, ..., n-1)$, $\rho_n > 0$ и все седловые величины $\sigma_i = \rho_i + \rho_n < 0$ $(i = 1, ..., n-1)$. Таким образом, одна из траекторий, выходящих из седла, будет принадлежать Γ^*. Контур Γ^* неустойчив, так как другая траектория, выходящая из седла, покидает любую малую окрестность Γ^* (рис. 7).

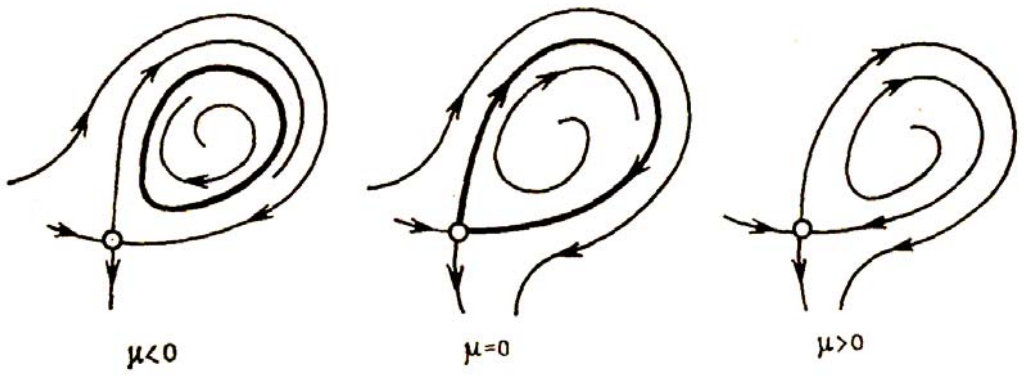


Рис. 7. Исчезновение предельного цикла через образование петли сепаратрисы седла.

6. Пусть у состояния равновесия $\Gamma(\mu)$ один корень характеристического уравнения при $\mu \to 0$ обращается в нуль. Тогда при достаточно малом μ система в окрестности Γ^* может быть записана в виде

$$\dot{x} = R(x, \mu) + f(x, y, \mu)y,$$
$$\dot{y} = [A(\mu) + g(x, y, \mu)]y,$$

где $R(0, 0) = R_x(0, 0) = 0$. Общий случай здесь выделяется условием $l_2 = R_{xx} \neq 0$. Поскольку мы предположим, что выход на границу происходит со стороны отрицательных μ, то $l_2 > 0$. Соответствующая этому случаю граница S_6^{k-1} будет опасной: при стремлении μ к нулю к $\Gamma(\mu)$ подтягивается другое состояние равновесия седлового типа; при $\mu = 0$ они сольются, образовав сложное неустойчивое состояние равновесия Γ^* типа седло-узел. При $\mu > 0$ $(R(x, \mu) > 0)$ состояние равновесия исчезает и все траектории покинут окрестность Γ^* [3,19] (рис. 8).

7. То же, что и в случае 1, но $L(0) > 0$. Здесь при $\mu \to 0$ в Γ^* влипает периодическое движение седлового типа. Это и обуславливает опасный тип границы S_7^{k-1}, поскольку исчезновение периодического движения приводит к появлению у Γ^* двумерного неустойчивого многообразия W^u (рис.1).

8. То же, что и в случае 2, но $L_2 > 0$. Неустойчивость в этом случае обусловлена влипанием неустойчивого периодического движения с периодом, близким к удвоенному периоду $\Gamma(\mu)$. При $\mu \geq 0$ возникает неустойчивое периодическое движение, имеющее неустойчивое многообразие W^u – лист Мёбиуса.

9. То же, что и в случае 3, но $g(0) > 0$. Неустойчивость Γ^* здесь связана с влипанием в него неустойчивого двумерного тора. При $\mu \geq 0$ периодическое движение уже будет иметь неустойчивое многообразие W^u, размерность которого равна трем.

10. Пусть у периодического движения $\Gamma(\mu)$ при $\mu \to 0$ один мультипликатор $\rho(\mu)$ становится равным 1. Соответствующее отображение последования на секущей здесь может быть записано в виде

$$\bar{x} = x + R(x, \mu) + f(x, y, \mu)y,$$

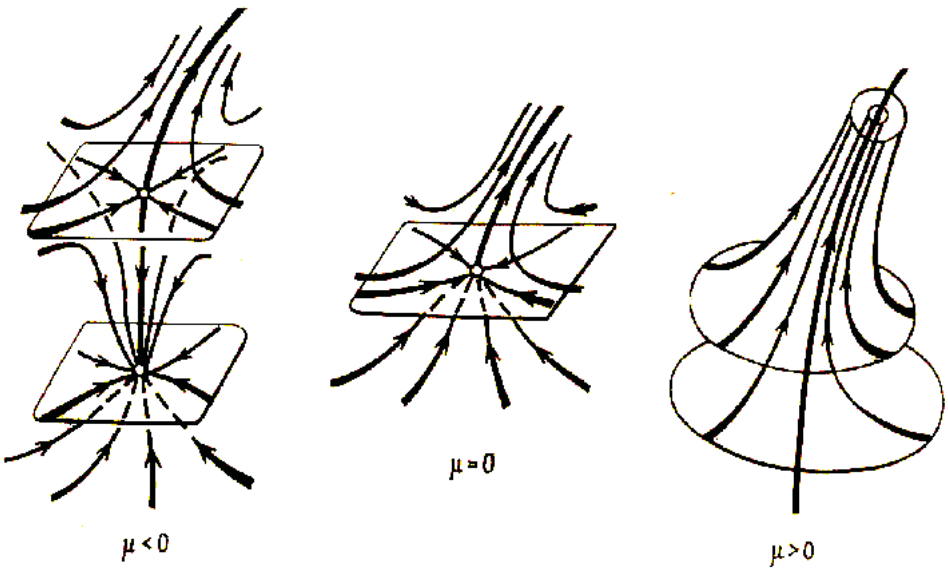


Рис.8. Исчезновение устойчивого узла при слиянии с состоянием равновесия седлового типа.

$$\bar{y} = [A(\mu) + g(x, y, \mu)]y,$$

Граница области устойчивости здесь будет $(k-1)$-мерна, если $l_2 = R_{xx}(0,0) \neq 0$. При сделанных выше предположениях о вхождении параметра μ, из $l_2 \neq 0$ следует, что $l_2 > 0$. Опасный характер S_{10}^{k-1} в этом случае обусловлен тем, что $\Gamma(\mu)$ сливается при $\mu \to 0$ с периодическим движением седлового типа. Γ^* есть периодическое движение типа седло-узел, неустойчивое многообразие W^u которого является гомеоморфным образом цилиндра $S^1 \times R^+$, где R^+ – полупрямая.

Таким образом, в границу области устойчивости состояния равновесия могут входить поверхности трех типов: S_1^{k-1}, S_6^{k-1} и S_7^{k-1}. В границу же области устойчивости периодического движения – девяти типов S_5^{k-1}, S_8^{k-1}, S_9^{k-1}, S_{10}^{k-1} – опасные и S_2^{k-1}, S_3^{k-1}, S_4^{k-1}, $\tilde{S}_1^{k-1}$, $\tilde{S}_2^{k-1}$ – безопасные ($\tilde{S}_1^{k-1}$ и $\tilde{S}_2^{k-1}$ соответствуют влипанию периодического движения в сложный фокус и в периодическое движение половинного периода).

Другие точки границ D_Γ связаны с более высоким вырождением и здесь не рассматриваются. С частью из них можно познакомиться по работам [4,5,23,28]. Отметим только, что бифуркационные явления в таких случаях весьма сложны и еще недостаточно изучены.

3. Динамически определенные и неопределенные опасные границы.

Пусть изображающая точка, описывающая состояние системы $X(\mu)$, при $\mu < 0$ находится или в стоке Γ, или в его "бесконечно малой" окрестности, другими словами, Γ является установившимся режимом системы. При переходе через опасную границу положение изображающей точки будет неопределено, поскольку Γ^* либо исчезает, либо становится неустойчивым. Поэтому естественно высказать следующую аксиому.

Аксиома неопределенности. При переходе через опасную границу: 1) изображающая точка покидает окрестность $U(\Gamma^*)$; 2) выход ее может происходить по любой траектории, покидающей $U(\Gamma^*)$; 3) новым установившимся режимом может быть только аттрактор, т. е. притягивающее предельное множество.

Дальнейшее рассмотрение связано с ответом на следующий вопрос: куда при переходе через опасную границу "перескакивает" изображающая точка [27] ?

Для случая двумерных автоколебательных систем, близких к линейным консервативным, эта задача была решена А. А. Андроновым еще в 30-х годах в связи с изучением явлений мягкого и жесткого режимов возбуждения колебаний. Характерной особенностью конкретных систем, рассмотренных как в работах А. А. Андронова, так и в публикациях других авторов, явилось следующее обстоятельство: после прохождения опасной границы новый установившийся режим системы указывался однозначно. Однако в общем случае это может быть не так. Свое рассмотрение мы ограничим случаем, когда $X(\mu)$ при $\mu \leq 0$ имеет только конечное число периодических движений и состояний равновесия, каждое из которых, кроме Γ^* на границе, является грубым, а их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально (за исключением случая негрубого контура Γ^* на границе S_5^{k-1}).

Опасную границу S_α^{k-1} назовем динамически определенной, если для любой системы $X \in S_\alpha^{k-1}$ все траектории, выходящие из $U(\Gamma^*)$, за исключением тех, которые лежат в устойчивых многообразиях седел и седловых периодических движений, идут к одному стоку. Если по крайней мере две траектории, выходящие из $U(\Gamma^*)$, имеют разные стоки, то назовем границу динамически неопределенной.

Рассмотрим случай 5. В силу наших предположений траектория, выходящая из седла и не принадлежащая контуру Γ^*, будет стремиться к некоторому стоку $\Sigma(0)$. Опасная граница S_5^{k-1} является динамически определенной; при малых $\mu \geq 0$ установившимся режимом системы будет сток $\Sigma(\mu)$.

В случае 6 при $\mu = 0$ возникает сложное состояние равновесия Γ^* типа седло-узел, из которого выходит только одна траектория $\beta(t)$. Относительно поведения $\beta(t)$ здесь возможны два подслучая: 1) $\beta(t)$ имеет своим предельным элементом новый сток $\Sigma(0)$, 2) $\beta(t)$ при $t \to \infty$ стремится к Γ^*. Границы, соответствующие этим подслучаям, будем обозначать через $S_{6_1}^{k-1}$ и $S_{6_2}^{k-1}$. Опасная граница $S_{6_i}^{k-1}$ является динамически определенной. При переходах через $S_{6_1}^{k-1}$ установившимся режимом системы будет сток $\Sigma(\mu)$; при переходах через $S_{6_2}^{k-1}$ – устойчивое периодическое движение, рождающееся из контура Γ^* [3,4,32].

Как мы уже отмечали, в случаях 7 - 10 при $\mu = 0$ Γ^* будет иметь неустойчивое многообразие W^u. Множество предельных точек траекторий из $W^u \setminus \Gamma^*$ будем обозначать через ∂W^u. Предположим, что в случае 10 $\Gamma^* \notin \partial W^u$. Границу S_{10}^{k-1} обозначим тогда через $S_{10_1}^{k-1}$. Граница S_i^{k-1} $(i = 7, 8, 9, 10_1)$ будет динамически определенной, если в ∂W^u содержится только один сток $\Sigma(0)$. Заметим, что, хотя новый установившийся режим определен однозначно, переходный процесс может носить квазислучайный характер (см. [6]).

Если же в ∂W^u содержится несколько стоков $\Sigma_1(0), \ldots, \Sigma_n(0)$, то граница S_i^{k-1} $(i = 7, 8, 9, 10_1)$ будет динамически неопределенной. Выбор стока при переходе через такую опасную границу носит случайный характер (рис. 9).

Рассмотрим случай 10 в предположении, что $\Gamma^* \subset \partial W^u$. Сразу же заметим, что тогда W^u не может быть самопредельным, ибо в противном случае мы имели бы негрубую гомоклиническую структуру и, следовательно, счетное множество периодических движений [16]. Здесь мы ограничимся только тем случаем, когда $\partial W^u = \Gamma^*$ и когда $\bar{W}^u$ есть тор[1]. При этом возможны два подслучая: тор $\bar{W}^u$ может быть гладким и негладким (рис. 10).

В первом подслучае изображающая точка будет наматываться на инвариантный тор, бифурцирующий из $\bar{W}^u$ при исчезновении Γ^* [7]. Во втором – ее предельное множество будет лежать в малой окрестности $\bar{W}^u$ и, как правило, будет содержать счетное множество

[1] $\bar{W}^u$ может быть также и бутылкой Клейна

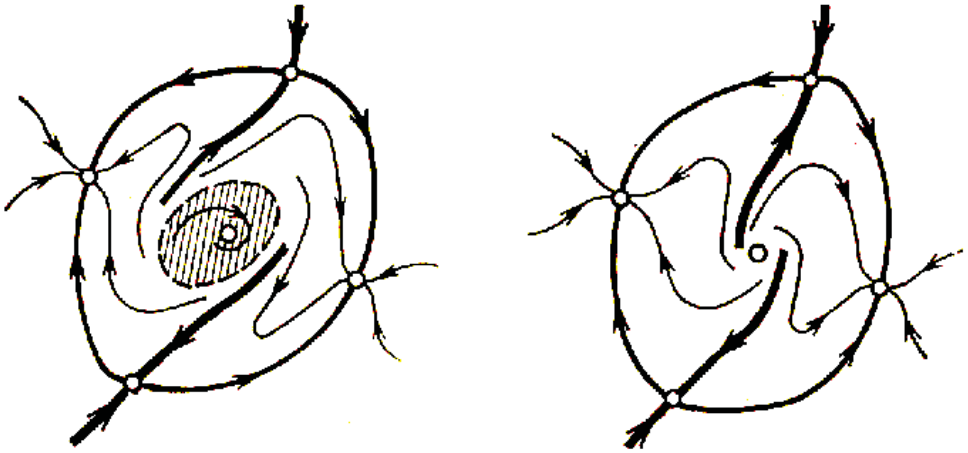


Рис. 9. Динамическая неопределенность при исчезновении области устойчивости состояния равновесия.

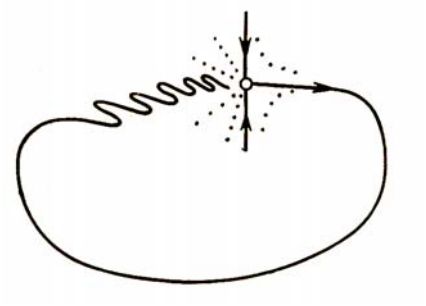


Рис. 10 . Пересечение негладкого тора секущей.

седловых периодических движений, гомоклинических траекторий, континуум траекторий, устойчивых по Пуассону, а также устойчивые периодические движения с малыми областями притяжения [7]. Поскольку в обоих случаях устойчивые периодические движения имеют малые области устойчивости по параметру μ и предельные множества на любом интервале $(0, \mu)$ претерпевают континуум бифуркаций, то новый сток нельзя указать однозначно. Тем не менее с практической точки зрения можно считать, что при малых μ в первом подслучае новым установившимся режимом будет "режим биений", а во втором – "режим квазислучайных биений".

Все безопасные границы, перечисленные выше, являются динамически определенными, поскольку при $\mu > 0$ в окрестности Γ^* возникает только один сток. Однако если система допускает группу симметрии, ее новые безопасные границы могут быть уже динамически неопределенными. Так, безопасная граница $r = 1$ в модели Лоренца является динамически неопределенной, поскольку при потере устойчивости от состояния равновесия O рождается два устойчивых стока. Более сложные примеры дают уравнения маятникового типа

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}, \lambda) = 0,$$

где $f(x, \dot{x}, \lambda)$ – периодическая по x и $f(x, \dot{x}, \lambda) = -f(-x, -\dot{x}, \lambda)$, в которых переход через границу области устойчивости лимитационных автоколебаний приводит к появлению двух симметричных предельных циклов, соответствующих противоположным вращениям маят-

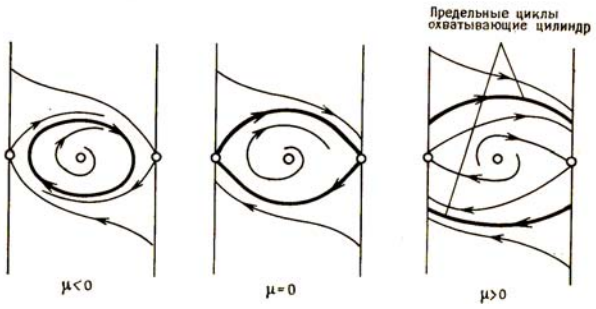


Рис. 11. Развертка фазового цилиндра. Динамическая неопределенность при разрушении петли сепаратрисы на цилиндре.

ника. Здесь Γ^* будет контуром, составленным из седла и его сепаратрис, охватывающих цилиндр [12] (рис.11).

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А.А. Всесоюзная конференция по колебаниям.- М.- Л.: ГТТИ, 1933, стр. 32; Собрание трудов, 1956.

2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний.- М.: Физматгиз, 1959; 1-е изд. 1937.

3. Андронов А.А., Леонтович Е.А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра.- Ученые записки ГГУ, вып. 6, 1939, 3-24.

4. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. - М.: Наука, 1967.

5. Арнольд В.И. Лекции о бифуркациях и версальных семействах.- УМН, вып. 5, 1972, 167.

6. Афраймович В.С, Шильников Л.П. Об особых множествах систем Морса - Смейла.- Тр. Моск. матем. о-ва, т. 28, 1973, 181-214.

7. Афраймович В.С, Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.- ДАН СССР, т. 219, № 6, 1974, 1281-1284.

8. Баутин Н.Н. О поведении динамических систем при малых нарушениях условий Раута-Гурвица.- Диссертация, Горький, 1941.

9. Баутин Н.Н. О рождении предельного цикла из состояния равновесия типа фокус.- ЖЭТФ, т. 8, вып. 6, 1938.

10. Баутин Н.Н. О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра.- ДАН СССР, т. 24, № 7, 1939; Матем. сб., новая серия, т. 30, вып. 1, 1952, 181-196.

11. Баутин Н.Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.- М.- Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1949.

12. Баутин Н.Н. Качественное исследование одного уравнения теории фазовой автоподстройки частоты.- ПММ, т. 34, вып. 5, 1970, 850-860.

13. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.- М.: Наука, 1976.

14. Dulac H., Determination et integration d'une certain classe d'equations differentielles ayant pour singulier un centre, Bull. Sc. Math (2) 32 1968, 230-252.

15. Kapteyn W. Over de middelpunten de integraalkrommer van differentiaal-vergelijkingen van de eerste orde endeneersten graad, Koninkl. Nederland. Akad., 19, 1911, 1446-1457; 20, 1912, 1354-1365; 21, 1912, 27-33.

16. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.- ДАН СССР, т. 243, № 1, 1978, 26-29.

17. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения.- М.- Л., 1935, Собр. соч., 1956.

18. Малкин К.М. Некоторые условия центра. Ученые записки Рязанского ГПИ, т. 35, 1963, 151-161.

19. Минц Р.М. Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в п-мерном пространстве.- ДАН СССР, т. 147, № 1, 1962, 31-33.

20. Неймарк Ю.И. О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров.- ДАН СССР, т. 129, № 4, 1959, 736.

21. Серебрякова Н.Н. О поведении динамических систем с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где безопасная граница переходит в опасную.- Изв. АН СССР, ОТН Механика и машиностроение, № 2, 1959.

22. Сибирский К.С. О числе предельных циклов, рождающихся из особой точки типа фокуса или центра.- ДАН СССР, т. 161, № 2, 1965.

23. Thom P. Structural stability and morphogenesis.- Benjamin, New York, 1975.

24. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре.- Труды VII Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, 1977, Берлин.

25. Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло.- Матем. сб., 77 (119), № 3, 1968, 461-472.

26. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус.- Матем. сб., 81(123), № 1, 1970, 92-102.

27. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы.- ДАН СССР, т. 224 № 5, 1975, 1046-1049.

28. Шноль Э.Э., Хазин Л.Г. Об устойчивости стационарных решений общих систем дифференциальных уравнений вблизи критических случаев.- Препринт ИПМ АН СССР, № 91, 1979.

29. Щуко С.Д. Вычисление ляпуновских величин с помощью ЭВЦМ.- Труды Горьковского инст. инж. водн. трансп., вып. 94, 1968, 97-109.

30. Щуко С.Д. К проблеме различения центра и фокуса.- ДАН СССР, т. 203, № 5, 1972.

31. Щуко С.Д. Реализация на ЭВМ алгоритма различения центра и фокуса.- Труды Горьковского инст. инж. водн. трансп., вып. 111, часть 2, 1973.

32. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодического движения из особых траекторий.- Матем. сб., 61 (104), 1963, 443-466.

Доклады Академии наук СССР
1969, Том 189, № 1, с. 59-62

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. ШИЛЬНИКОВ

ОБ ОДНОМ НОВОМ ТИПЕ БИФУРКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Л.С. Понтрягиным 24 III 1969)

§ 1. Одной из важных задач качественной теории дифференциальных уравнений является изучение характера изменения качественной структуры разбиения фазового пространства на траектории при переходе от одной грубой системы к другой. Для динамических систем второго порядка на плоскости основные типы бифуркации были полностью рассмотрены в работах А.А. Андронова и Е.А. Леонтович. Бифуркации в многомерном пространстве, которые рассматривались до настоящего времени, связаны прежде всего с появлением (исчезновением) только одного предельного элемента типа состояние равновесия, периодическое движение и интегральное многообразие типа тор. Эти бифуркации в определенном смысле роднит следующий факт: переходы через бифуркационные поверхности (с точностью до рождения тора с иррациональным числом вращения Пуанкаре) не выводят из класса систем, удовлетворяющих "пяти" условиям Смейла.

В настоящей работе указан принципиально новый основной тип бифуркации, связанный с появлением счетного множества периодических движений седлового типа и локально несвязного предельного множества.

§ 2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $(m+n+1)$-го порядка

$$\begin{gathered} dx/dt = P(x,y,z,\mu), \qquad dy/dt = Q(x,y,z,\mu), \\ dz/dt = R(x,y,z,\mu), \end{gathered} \tag{1}$$

где $P(P_1,\dots,P_m)$, $Q(Q_1,\dots,Q_n)$ и R – достаточно гладкие функции переменных $x = (x_1,\dots,x_m)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$, z и параметра μ в некоторой области $G \times (-\mu_0,\mu_0)$.

Предположим, что при $\mu = 0$ система (1) имеет состояние равновесия $O(0,...,0) \in G$ типа седло-седло, т.е. m $(m \geq 1)$ корней характеристического уравнения имеют отрицательные реальные части, n $(n \geq 1)$ корней имеют положительные реальные части, один корень равен нулю и первая не равная нулю ляпуновская величина l_k имеет четный номер k. Структура окрестности такого сложного состояния известна ([1]) и характеризуется прежде всего наличием единственной гладкой интегральной полуповерхности π^+ размерности $m+1$, состоящей из O^+-кривых, единственной гладкой интегральной полуповерхности π^- размерности $n+1$, состоящей из O^--кривых, и поверхности π размерности $m+n$, в

которой лежат границы полуповерхностей π^+ и π^-. Все остальные траектории покидают окрестность O при $t \to +\infty$, так и при $t \to -\infty$.

Относительно системы (1) при $\mu = 0$ будем предполагать, что выполнены следующие свойства: 1) существует p траекторий $\Gamma_1, ..., \Gamma_p$, двоякоасимптотических к O; 2) $\Gamma_i \in \pi$, $i = 1, 2, \ldots, p$; 3) π^+ и π^- пересекаются по Γ_i грубо, т.е.

$$\dim(W^+_{M_i} \cap W^-_{M_i}) = 1, \ldots, p \ , \tag{2}$$

где через $W^+_{M_i}$ и $W^-_{M_i}$ обозначены касательные подпространства к π^+ и π^- точке $M_i \in \Gamma_i$.

Пусть $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$ – некоторая достаточно малая ε-окрестность множества $\Gamma_1, ..., \Gamma_p$. Из указанных свойств системы будет следовать, что, кроме траекторий $\Gamma_1, ..., \Gamma_p$ и O, $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$ при любом достаточно малом ε не будет содержать других траекторий, целиком в ней лежащих. Таким образом, при $\mu = 0$ система (1) в силу (2) и $l_2 \neq 0$ является простейшей негрубой (по крайней мере в $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$).

§ 3. Теорема. *Существует такое ε_0, что в любой окрестности $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, при всех достаточно малых μ ($|\mu| < \mu^*(\varepsilon)$), при которых исчезает седло-седло O, множество всех траекторий, целиком лежащих в $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$, находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из p символов.*

Замечание 1. Из этой теоремы следует, что в пространстве гладких динамических систем системы с конечным числом периодических движений (в частности, без периодических движений) могут быть отделены от систем со счетным множеством периодических движений только одной бифуркационной локально связной “пленкой” коразмерности 1.

Замечание 2. При $p = 1$ получаем результат работы ([2]).

С помощью некоторой достаточно гладкой замены переменных в малой окрестности начала координат систему (1) можно привести к виду

$$\begin{aligned} d\xi/dt &= A\xi + P'(\xi, \eta, z)\xi + \mu\alpha(z, \mu)R_0(z, \mu), \\ d\eta/dt &= B\eta + Q'(\xi, \eta, z)\eta + \mu\beta(z, \mu)R_0(z, \mu), \\ dz/dt &= R_0(z, \mu) + R'_1(\xi, \eta, z, \mu)\xi + R'_2(\xi, \eta, z, \mu)\eta, \end{aligned} \tag{3}$$

где A – m-мерная квадратная матрица, характеристические корни которой лежат в левой полуплоскости; B – n-мерная квадратная матрица, характеристические корни которой лежат справа от мнимой оси; P', Q', R'_1 и R'_2 малы при достаточно малых ξ, η, z и μ; $R_0(z, 0) = l_k z^k + ...$, где k четно, $l_k > 0$. Условие исчезновения седла-седла эквивалентно выполнению неравенства $R_0(z, \mu) > 0$. Будем считать, что $(0, \bar{\mu}_0)$ есть тот интервал значений μ, при которых $R_0(z, \mu) > 0$, а сами значения μ из $(0, \bar{\mu}_0)$ – обозначать через $\bar{\mu}$.

Как следует из работы ([2]), между некоторым множеством $\sigma_0(\mu) \subset S_0$, где $S_0 : [z = -d, \|\eta\| < R_0(-d, \bar{\mu}), \|\xi\| < R_0(-d, \bar{\mu})$ и множеством $\sigma_1(\mu) \subset S_1$, где $S_1 : [z = d, \|\eta\| < R_0(d, \bar{\mu}), \|\xi\| < R_0(d, \bar{\mu})$ можно установить взаимно-однозначное соответствие $T_0(\bar{\mu}) : M_0(\xi_0, \eta_0) \in \sigma_0 \to M_1(\xi_1, \eta_1) \in \sigma_1$. При этом связь между координатами точек M_0 и M_1 будет

$$\xi_1 = \xi(\xi_0, \eta_1, \bar{\mu}), \quad \eta_0 = \eta(\xi_0, \eta_1, \bar{\mu}),$$

где ξ и η определены при $\|\xi_0\| \le a < R_0(-d,0)$, $\|\eta_1\| \le b < R_0(d,0)$ и достаточно малых μ и стремятся к нулю при $\bar{\mu} \to 0$ вместе с первыми производными по ξ_0 и η_1.

Заметим, что $\eta_0 = 0$ – есть уравнение пересечения π^+ с S_0, а $\xi_1 = 0$ – π^- с S_1.

Можно показать, что при достаточно малом d траектории $\Gamma_1, ..., \Gamma_p$ системы (1) при $\mu = 0$ будут пересекать поверхности S_0 и S_1. Пусть $M_0^i(\xi_0^i, 0)$ и $M_1^i(0, \eta_1^i)$ – точки пересечения Γ_i с S_0 и S_1, пусть $T_i(\bar{\mu})$ – отображение окрестности U_i^1 точки M_i^1 на окрестность U_i^0 точки M_0^i, индуцированное траекториями, близкими к Γ_i при достаточно малых μ. При этом, так как π^+ с π^- пересекаются по Γ_i грубо, то уравнения $T_i(0)(\pi^- \cap U_i^1)$ можно будет записать в виде

$$\xi_0 = F_0^i(\eta_0), \tag{4}$$

где F_0^i – гладкая функция, определенная при $\|\eta_0\| \le a_i$. Так как отображение $T_0(\bar{\mu})$ растягивает в направлении η_1 и сжимает в направлении ξ_1, то легко показывается, что $T_0(\bar{\mu})(U_i^0 \cap \sigma_0(\bar{\mu})) \cap (U_j^1 \cap \sigma_1(\bar{\mu})) \ne \emptyset$ при достаточно малых $\bar{\mu}$ для всех $1 \le i, j \le p$. Обозначим через $T_{ij}(\bar{\mu})$ соответствующее сужение $T_0(\bar{\mu})$. Теперь легко видеть, для любых $1 \le i, j \le p$ каждое множество $U_i^0 \cap \sigma_0(\bar{\mu})$ при отображении $T_j(\bar{\mu})T_{ij}(\bar{\mu})$ имеет непустое пересечение с $(U_j^0 \cap \sigma_0(\bar{\mu}))$. Указанная ситуация весьма близка к конструкции, описанной Смейлом ([3]), которая приводит к символической динамике с конечным числом символов. Для установления этого мы докажем существование двух семейств трансверсальных слоений. Отметим, что построение таких семейств идейно близко к методу работы ([4]).

Введем в рассмотрение p метрических пространств $H_{1\alpha}^0, ..., H_{p\alpha}^0$, где $H_{i\alpha}^0$ есть пространство n-мерных поверхностей P_i с метрикой C^0, уравнения записываются в виде

$$\xi_0 = \varphi_0(\eta_0), \tag{5}$$

где $\varphi_0(\eta_0)$ определены при $\|\eta_0\| \le a < a_i$, $\|\varphi_0(\eta_0) - \xi_i^0\| < \Delta$, а константы Липшица не превосходят величины K, где

$$K > \{\max_{\|\eta_0\| \le a} \|\partial F_0^i / \partial \eta_0\| + 1,\ 1 \le i \le p\}.$$

Лемма 1. *Существует такое $\bar{a} \le a$, что при всех достаточно малых $\bar{\mu}$ на пространствах $H_{i\bar{a}}^0$ для любых $1 \le i, j \le p$ определены операторы $\mathcal{T}_{ji}$, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $\mathcal{T}_{ji} H_{i\bar{a}}^0 \subset H_{i\bar{a}}^0$;

2) $\rho(\mathcal{T}_{ji} P_i', \mathcal{T}_{ji} P_i'') < q\rho(P_i', P_i'')$, *где* $q < 1$.

Пусть

$$\nu = (..., j_{-i}, ..., j_0, ..., j_k, ...) \tag{6}$$

произвольная бесконечная в обе стороны последовательность, составленная из символов $1, 2, ..., p$. Последовательности ν мы сопоставим последовательность пространств и операторов

$$... \to H_{j_{\rho-1}\bar{a}}^0 \xrightarrow{\mathcal{T}_{j_{\rho-1}j_\rho}} H_{j_\rho \bar{a}}^0 \xrightarrow{\mathcal{T}_{j_\rho j_{\rho+1}}} H_{j_{\rho+1}\bar{a}}^0 \to ... \tag{7}$$

Используя лемму о существовании устойчивой неподвижной точки в прямом произведении пространств (см. ([5]), а также ([4]), где указано ее аналогичное использование) выводим

следующую лемму:

Лемма 2. *Последовательности ν соответствует единственная устойчивая последовательность поверхностей*

$$..., P^{\nu}_{j_{-l}}(\bar{\mu}), ..., P^{\nu}_{j_0}(\bar{\mu}), ..., P^{\nu}_{j_m}(\bar{\mu}), ... \tag{8}$$

такая, что

$$\mathcal{T}^{-1}_{j_{\rho+1}j_\rho}\mathcal{T}^{-1}_{j_{\rho+1}}(\bar{\mu})P_{j_{\rho+1}}(\bar{\mu})^{\nu} \subset P^{\nu}_{j_\rho}(\bar{\mu}) \tag{9}$$

для любых индексов j_ρ, $\rho = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, и где $P^{\nu}_{j_\rho}(\bar{\mu})$ стремится к $T_{j_\rho}(0)\left(U^1_{j_\rho} \cap \pi^-\right)$ при $\bar{\mu} \to 0$.

Подобным образом можно установить, что любой последовательности ν соответствует единственная устойчивая в отрицательном направлении последовательность m-мерных поверхностей $\{Q_{i_\rho}\}$, уравнения которых записываются в виде

$$\eta_0 = \psi^n_{i_\rho} u(\xi_0, \bar{\mu}), \tag{10}$$

где функция $\psi^{\nu}_{i_\rho}$ определена при $\|\xi_0 - \xi_0^{i_\rho}\| \leq \tilde{b}$ ($\tilde{b}$ – некоторая постоянная) и при $\bar{\mu} \to 0$ стремится к нулю вместе с константой Липшица.

Так как поверхности $P^{\nu}_{i_\rho}(\bar{\mu})$ и $Q^{\nu}_{i_\rho}(\bar{\mu})$ будут пересекаться в единственной точке $M^{\nu}_{i_\rho}(\bar{\mu})$, то, следовательно, последовательности $\{M^{\nu}_{i_\rho}(\bar{\mu})\}$ будет соответствовать фазовая траектория, целиком лежащая в $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$. Легко видеть, что таким образом найденными траекториями исчерпывается множество всех траекторий, целиком лежащих в $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$ при достаточно малом ε.

Обозначим через Σ множество точек пересечения траекторий, целиком лежащих в $U(\Gamma_1, ..., \Gamma_p, \varepsilon)$ с S_0 с топологией, естественным образом индуцируемой из эвклидовой. Отображения T_jT_{ji} порождают на Σ отображение, которое обозначим через T. Легко видеть, что дискретная система (T, Σ) топологически эквивалентна системе (Ω_p, ω), где Ω_p – тихоновское произведение счетного множества экземпляров p-точий (топологический аналог схемы Бернулли), а ω – автоморфизм сдвига.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило
19 III 1969

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. М. Минц, ДАН, 147, 31 (1962). [2] Л. П. Шильников, ДАН, 170, 4 (1966). [3] S. Smale, Diffeomorphisms with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Math. Ser., № 27, 1965. [4] Л. П. Шильников, ДАН, 180, 286 (1968). [5] Л. П. Шильников, Матем. сборн., 74 (116), 3,338 (1967).

Глава 2

Гомоклиническая петля седло-фокуса и математическая теория спирального хаоса.

В этой главе представлено шесть работ Л.П. Шильникова [1-6], имеющих отношению к одному из самых главных его научных достижений – открытию сложной структуры поведения траекторий в окрестности гомоклинической петли состояния равновесия типа седло-фокус. Это открытие было сделано в работе [1], опубликованной в 1965 г. В то время и в математике, и в физике практически отсутствовала какая-либо более или менее подходящая концепция для объяснения подобных явлений в моделях, описываемых конечномерными детерминированными системами. Поэтому сложная структура (хаос) в окрестности петли сепаратрисы состояния равновесия была абсолютно неожиданной и полностью противоречила представлениям, основанным на теории двумерных систем. Существенное отличие структуры окрестности петли сепаратрисы седла и седло-фокуса казалось весьма странным, так как с топологической точки зрения седло и седло-фокус устроены одинаков. Тем не менее, говоря современным языком, уже из первых работ Шильникова [7,8] о гомоклинической петле седла можно было извлечь тот факт, что в ее окрестности существует гладкое глобальное двумерное инвариантное центральное многообразие, т.е. задача в некотором смысле эффективно двумерна.[1] В системах же с гомоклинической петлей седло-фокуса двумерного инвариантного многообразия не существует, и поэтому здесь динамика является принципиально многомерной.

[1]Гладкость такого многообразия, вообще говоря, только $C^{1+\epsilon}$. Соответственно, двумерная система, полученная редукцией на инвариантное многообразие, имеет низкую гладкость, что затрудняет ее непосредственное исследование. Шильников редукцию не использовал и не обсуждал, а исследовал полную исходную систему напрямую, используя созданные им методы исследования глобальных бифуркаций гладких многомерных систем. Методы исследования гомоклинических бифуркаций в системах малой гладкости были придуманы позже, см., например, [9].

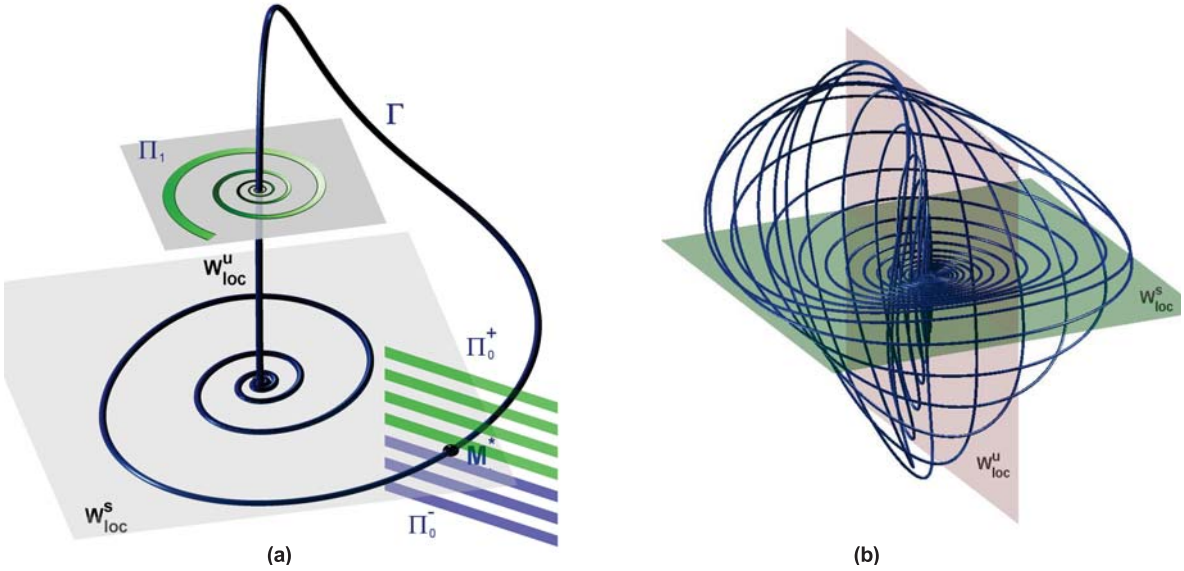


Рис. 2.1. Пример системы с гомоклинической петли состояния равновесия O типа седло-фокус (a) в трехмерном случае; (b) в четырехмерном случае (все собственные значения комплексно сопряженные).

Седло-фокус отличается от седла тем, что он имеет среди своих неведущих собственных значений (ближайших к мнимой оси) комплексно-сопряженные. Например, в случае трехмерных систем такое равновесие имеет собственные значения $\lambda \pm i\omega$ и γ, где $\omega \neq 0$ и либо $\lambda < 0 < \gamma$ – седло-фокус типа (2,1), т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями, либо $\gamma < 0 < \lambda$ – седло-фокус типа (1,2) соответственно с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Еще в работах [7,8] Шильников показал, что бифуркация системы с петлей седло-фокуса типа (2,1), см. рис. 2.1(a), при условии отрицательности седловой величины $\sigma = \lambda + \gamma$ ничем не отличается от случая седла – здесь рождается единственных устойчивый предельный цикл (это связано с тем, что в этом случае отображение первого отображения оказывается сжимающим). Случай седло-фокуса типа (1,2) очевидно сводится к случаю седло-фокуса типа (2,1) заменой t на $-t$. Поэтому здесь из петли седло-фокуса типа (1,2) при $\sigma > 0$ рождается единственный вполне неустойчивый предельный цикл. Однако, если ближайшими к мнимой оси являются комплексно-сопряженные собственные значения, т.е., если $\sigma > 0$ в случае седло-фокуса типа (2,1) или $\sigma < 0$ в случае седло-фокуса типа (2,1), ситуация становится совершенно другой – уже сама система с петлей седло-фокуса имеет сложную структуру, так как в окрестности петли содержится бесконечно много седловых периодических траекторий. В работе [2] Шильни-

ков перенес этот результат на случай четырехмерной системы с петлей седло-фокуса с собственными значениями $\lambda \pm i\omega_1, \gamma \pm i\omega_2$, где $\omega_i \neq 0$ и $\lambda < 0 < \gamma$, см. рис. 2.1(b), а в работе [3] он рассмотрел общий многомерный случай и показал, что в окрестности петли лежит нетривиальное гиперболическое подмножество (содержащее, в частности, счетное число подков Смейла).

Если не вдаваться в технические подробности, то геометрическая идея доказательства существования хаоса в случае петли седло-фокуса типа (2,1) с $\sigma > 0$ достаточно прозрачна, по крайней мере в трехмерном случае. Здесь, также как и в случае седла [7,8], рассматривается отображение T первого возвращения некоторой двумерной площадки Π_0 трансверсальной к петле Γ по траекториям соответствующего потока. Траектории точек верхней половины этой площадки Π_0^+ (часть Π_0 выше W^s_{loc}) достигают (за разное время) площадку Π_1 трансверсальную к W^u_{loc}. Обозначим отображение по траекториям потока, действующее из Π_0^+ в Π_1, как T_0. Это отображение, называемое локальным отображением, сингулярно в точках $\Pi_0 \cap W^u_{loc}$, так как траектории этих точек при $t \to \infty$ стремятся к O. Остальные точки из Π_0^+ достигают Π_1, и образ $T_0(\Pi_0^+)$ на Π_1 представляет собой сужающуюся полоску, закручивающуюся по спирали вокруг точки $M_1^- \in \Gamma$, см. рис. 2.1(a). В свою очередь, траектории точек "спирали" $T_0(\Pi_0^+)$ возвращаются на площадку Π_0, уже за конечное время. Отображение по траекториям потока, действующее из Π_1 в Π_0, регулярно (является диффеоморфизмом), и оно называется обычно глобальным отображением. Обозначим его через T_1. Таким образом, отображение первого возвращения $T : \Pi_0^+ \to \Pi_0$ представляется в виде суперпозиции $T = T_1 T_0$ локального и глобального отображений. Заметим, что образ $T(\Pi_0^+)$ площадки Π_0 относительно T также имеет спиралевидную форму, но уже расположен на Π_0, см. рис. 2.2.

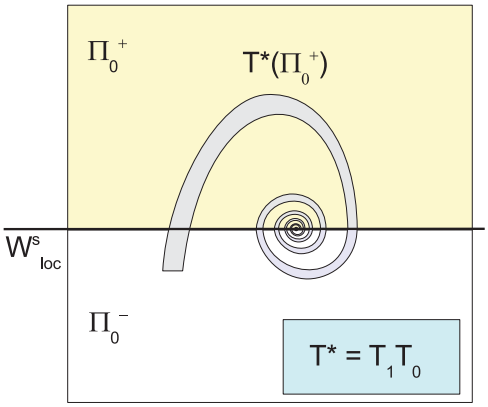


Рис. 2.2

В случае $\sigma < 0$ отображение $T : \Pi_0^+ \to \Pi_0$ будет сильно сжимающим (с коэффициентом сжатия, стремящимся к нулю при приближении к петле). Поэтому, если мы рассмотрим однопараметрическое семейство X_μ трехмерных потоков, где μ – это параметр, измеряющий расстояние в Π^0 от точки пересечения $M^+(\mu)$ сепаратрисы Γ_μ с Π_0^+ до W^s_{loc} с учетом знака ($'+'$, если M^+ лежит выше

W^s_{loc}, и $'-'$, если ниже), то, как показал Шильников еще в работе [8], при $\mu > 0$ отображение $T(\mu)$ будет иметь единственную неподвижную точку $M^*(\mu)$, а следовательно, система X_μ будет иметь единственный устойчивый предельный цикл, который при $\mu \to +0$ влипает в петлю Γ (т.е. $M^*(\mu) \to M^+(0)$ при $\mu \to +0$). При $\mu < 0$ отображение $T(\mu)$ не имеет неподвижных точек (так как на Π^0 в этом случае не существует области, которая переходила бы строго внутрь себя под действием T), и соответственно все траектории покидают некоторую малую фиксированную окрестность петли Γ. Таким образом, мы имеем в этом случае такую же ситуацию, как и в случае петли седла, с той лишь разницей, что геометрия отображений первого возвращения будет разной (ср. рис. 2.2 с рис. 1.2 из главы 1).

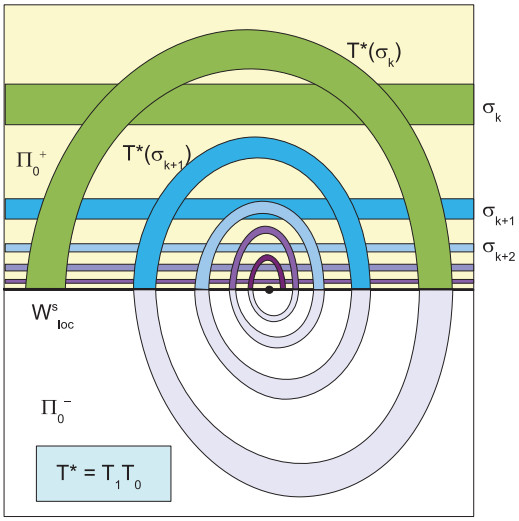
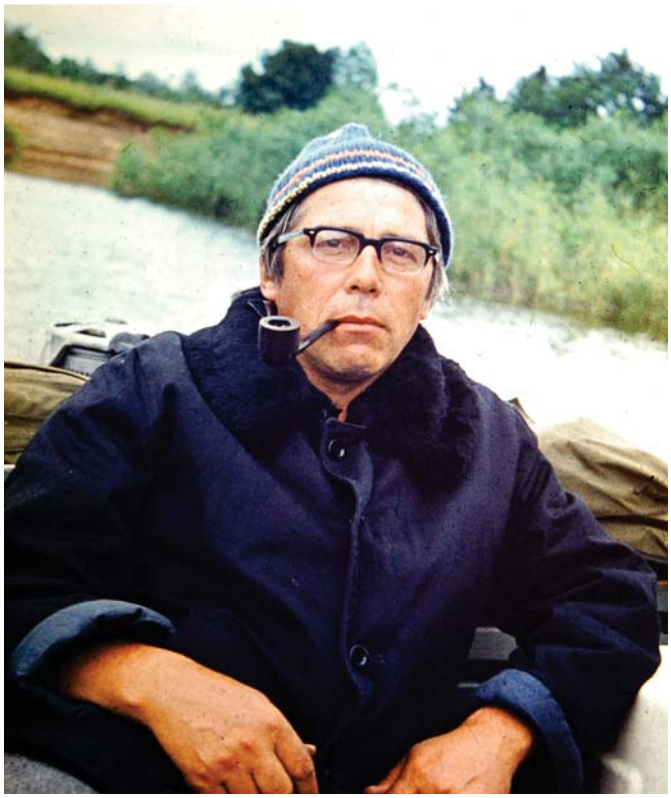


Рис. 2.3. Образы и прообразы отображения T^* первого возвращения полусекущей Π_0^+ на себя в случае $\sigma > 0$.

Совершенно другая ситуация будет в случае $\sigma > 0$, и здесь уже потребуются дополнительные построения. Заметим, что для точек "спирали" $T(\Pi_0^+)$, которые попадают в Π_0^-, их траектории покидают окрестность петли, и мы их не будем рассматривать. Более того, если выкинуть прообразы этих точек из Π_0^+, то получится, что отображение $T^* = T_1T_0 : \Pi_0^+ \to \Pi_0^+$ первого возвращения будет определено на счетном множестве непересекающихся полосок. Эти полоски можно пронумеровать естественным образом (например, по логарифму времени возвращения, [1*]) как σ_k, где $k = k_0, k_0+1, ...$, и тогда $\sigma_k \to \Pi_0 \cap W^u_{loc}$ при $k \to \infty$.

Заметим, что образы полосок σ_k относительно отображения T^* будут иметь

форму подков (половинки завитков спирали). В случае $\sigma < 0$ подковы $T^*(\sigma_k)$ все (вообще говоря, начиная с некоторого номера k_0) лежат ниже своей полоски σ_k, и соответственно динамика тривиальна. В случае же $\sigma > 0$ вершины подков $T^*(\sigma_k)$ будут лежать выше полосок σ_k, см. рис. 2.3. Соответственно здесь уже в момент образования петли существует счетное множество подков Смейла. Мы имеем подкову Смейла для каждого из отображений $T_k^* = T^*|_{\sigma_k}$, $k = k_0, k_0 + 1, ...$, и поэтому его неблуждающее множество является нетривиальным равномерно гиперболическим множеством, сопряженным с топологической схемой Бернулли из двух символов.[1] Конечно, все неблуждающее множество N^* отображения T^* имеет более сложную структуру, и в работе [3] было дано описание[2] его достаточно большого нетривиального неравномерно гиперболического подмножества $\tilde{N}^* \subset N^*$.



Л.П. Шильников на Волге (70-е годы)

Это открытие Шильникова, как показало уже ближайшее десятилетие, явилось одним из тех пока еще немногих научных достижений 60-х годов,[3] которые внесли решающий вклад в становление теории динамического хаоса. Достаточно простой критерий Шильникова существования сложной структуры множества траекторий в окрестности петли седло-фокуса послужил мощным стимулом для поиска "живых систем" с хаотическим поведением. К настоящему времени примеров конкретных систем из самых разных

[1]Полоска σ_k представляет узкий прямоугольник с вершинами в точках a, b, c, d, см. рис. 2.3. Под действием T^* она превращается в подкову (завиток спирали), при этом точки a^*, b^*, c^*, d^* на W^s_{loc} являются образами точек a, b, c, d относительно T^*, т.е. вертикальные стороны $[a, b]$ и $[c, d]$ прямоугольника σ_k сильно растягиваются, а его горизонтальные стороны $[a, d]$ и $[b, c]$ сильно сжимаются под действием T^*. Это свойство гиперболичности отображения T^* вместе с характерной формой образа $T^*[a, b, c, d]$ позволяют говорить о подкове Смейла.

[2]Интересно заметить, что предложенное Шильниковым описание немедленно влечет существование т.н. модулей топологической эквивалентности у систем с гомоклинической петлей седло-фокуса. В частности, таким модулем является величина $\rho = -\lambda/\gamma$, которая называется сейчас индексом Шильникова.

[3]К ним можно отнести работу Э. Лоренца [10], в которой был приведен пример системы с хаотическим аттрактором Лоренца, а также ряд чисто математических работ по гиперболическим аттракторам, см., например, [11].

областей науки, где обнаружен спиральный хаос (странный аттрактор, содержащий (шильниковский) седло-фокус) огромно, см., например, [15-19].

Л.П. Шильников на даче в д. Караси (90-е годы)

Вопросы математического описания спирального хаоса были для Л.П. Шильникова всегда одними из самых приоритетных на протяжении всей его научной жизни. К ним он неоднократно возвращался и сам, и вместе со своими учениками. К сожалению, объем этого издания не позволяет здесь воспроизвести все его работы. Дополнительно к пионерским работам [1-3], в настоящем издании представлены еще только три его работы, [4-6]. В [4], был предложен универсальный сценарий возникновения спирального хаоса у трехмерных потоков, а также были обрисованы основные особенности его реализации в многомерном случае. В работе [5], написанной вместе с Л.А. Беляковым, были построены основы математической теории уединенных волн сложного профиля (волновые фронты, солитоны и т.п.), во главу которой легли конструкции, связанные с гомоклиническими петлями седло-фокусов. В работе [6], написанной вместе с Н.К. Гавриловым, были рассмотрены локальные бифуркации гамильтоновых систем, приводящие, в частности к рождению петли седло-фокуса.

Литература к главе 2.

[1*] Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений.// ДАН СССР, 1965, т.169, 3, 558-561.

[2*] Шильников Л.П. О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса.// ДАН СССР, 1967, т.172, 2, 298-301.

[3*] Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус.// Мат. сб., 1970, т.81(123), 1, 92-103.

[4*] Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность - I.// Межвузовский сб. Методы КТДУ, Горький, 1986, 150-163.

[5*] Беляков Л.А., Шильников Л.П. Гомоклинические кривые и сложные стационарные волны.// "Межвузовский сб., Методы КТДУ Горький, 1985, 22-35.

[6*] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О бифуркациях состояний равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. //"Межвуз. сб. Методы КТДУ Горький, 1984, 60-72

[7*] Шильников Л.П. Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве. // ДАН СССР, 1962, т.143, 2, 289-292.

[8*] Шильников Л.П. О рождении периодических движений в n-мерном пространстве.// Мат. сб., 1963, 4, с.443-466.

[9] Shashkov M.V., Turaev D.V. “A proof of Shilnikov theorem for C^1-smooth dynamical systems”, AMS Transl. Series II, v.200, 149-163 (2000).

[10] Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow, J. Atmospheric Sciences, 1963, v.20, 130-141.

[11] Smale S. Differentiable dynamical systems, Bull. AMS, 1963, v.73, 747-817.

[12] Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence, Comm. Math. Phys., 1971, v.20, 167-192; v.23, 343-344.

[13] Ruelle D. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence.- in “Statistical Models and Turbulence”, ed. by M. Rosenblatt and C. Van Atta, Springer-Verlag, 1972.

[14] Guckenheimer J., A strange, strange attractor.- in book J. Marsden, M. MacCracen, the Hopf bifurcation and its applications, Springer-Verlag, 1976, 368-381.

[15*] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.// "ДАН СССР 1977, т.234, No.2, 336-339.

[16] Arneodo A., Coullet P. H., Tresser C. “Possible new strange attractors with spiral structure,” Communications in Mathematical Physics 79 (1981), 573–579.

[17] Arneodo A., Coullet P.H., Spiegel E.A., Tresser C., Asymptotic chaos, Physica D, 14 (1985), 327-347.

[18] Tresser C. About some theorems by L.P. Shilnikov. Ann. Inst. H. Poincare 40, 441-461, 1984.

[19] Glendenning P., Sparrow C., Local and global behavior near homoclinic orbits, J. Stat. Phys. 35 (1984) 645-696.

Доклады Академии наук СССР
1965, Том 160, № 3, с. 558-561

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. Шильников

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

(Представлено академиком А.Ю. Ишлинским 28 VI 1964)

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = \rho x - \omega y + P(x,y,z), \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x + \rho y + Q(x,y,z),$$
$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + R(x,y,z), \tag{1}$$

где P, Q и R – аналитические функции, обращающиеся в нуль в начале координат вместе с первыми производными.

Предположим, что $\rho < 0,\ \lambda > 0$. В этом случае состояние равновесия $O(0,0,0)$ согласно терминологии Пуанкаре называется седло-фокусом. Поведение интегральных кривых в окрестности седло-фокуса известно ([1,2]) и характеризуется прежде всего существованием двумерной сепаратрисной поверхности π^+

$$z = \varphi_3(x,y),$$

на которой лежат O^+-кривые, а также существованием одномерного интегрального многообразия π^-

$$x = \varphi_1(z), \quad y = \varphi_2(z),$$

на котором лежат две O^--кривые. Функции φ_1, φ_2 и φ_3 аналитические и удовлетворяют условиям

$$\varphi_1(0) = \varphi_1'(0) = \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = \varphi_3(0,0) = \frac{\partial\varphi_3(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_3(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Предположим, что одна из траекторий, выходящих из седло-фокуса, при $t \to +\infty$ возвращается в него. Обозначим эту траекторию через Γ_0.

Теорема *Если $\lambda > -\rho$, то в любой окрестности траектории Γ_0 содержится счетное множество периодических решений.*

Для доказательства теоремы воспользуемся методом точечных отображений. Как и в работе ([3]), мы будем строить точечное отображение T, представимое в виде произведения двух отображений T_0 и T_1, где T_0 – отображение в окрестности седло-фокуса, а T_1 – отображение в окрестности Γ_0.

Сделаем нелинейную замену переменных

$$\xi = x - \varphi_1(z), \ \ \eta = y - \varphi_2(z), \ \ \zeta = z - \varphi_3(x,\, y),$$

а также замену времени, в результате которых система (1) в некоторой ε-окрестности начала координат приводится к виду:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \rho\xi - \omega\eta + P_1(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,\xi + P_2(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,\eta, \\ \frac{d\eta}{dt} &= \omega\xi + \rho\eta + Q_1(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,\xi + Q_2(\xi,\,\eta,\,\zeta)\,\eta, \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \lambda\,\zeta, \end{aligned} \tag{2}$$

где P_1, P_2, Q_1 и Q_2 - некоторые аналитические функции, обращающиеся в нуль в начале координат. В новых переменных уравнение π^+ будет $\zeta = 0$, а уравнения π^- : $\xi = 0,\ \eta = 0$.

Пусть Γ_0 выходит из седло-фокуса O в область $\zeta > 0$. Тогда, очевидно, Γ_0 будет пересекать плоскость S_1 : $\zeta = d^-(0 < d^- < \varepsilon)$ в точке $M_1^-(0,\,0,\,d^-)$. Так как при $t \to +\infty$ Γ_0 стремится к седло-фокусу, то она будет лежать и в плоскости $\zeta = 0$. Легко видеть, что плоскость S_0, уравнение которой $\eta = 0$, является секущей для траекторий системы (2), лежащих в плоскости $\zeta = 0$. Следовательно, траектория Γ_0 при $t \to +\infty$ пересекает плоскость S_0 в счетном множестве точек $\{M_n\}$, имеющих единственную предельную точку $O(0,\,0,\,0)$.

Выберем одну из этих точек и обозначим ее через $M_0^+(d^+,\,0,\,0)$. Очевидно, можно считать, что $d^+ > 0$ и точка M_0^+ лежит в ε-окрестности начала координат вместе с некоторой окрестностью.

Пусть

$$\xi(t) = \xi(t,\,\xi_0,\,\zeta_0),\ \ \eta(t) = \eta(t,\,\xi_0,\,\zeta_0),\ \ \zeta(t) = \zeta_0\,e^{\lambda\,t} \tag{3}$$

есть решение системы (2), проходящее через точку $M_0(\xi_0,\,0,\,\zeta_0) \in S_0$ при $t = 0$.

Используя известное представление решений в окрестности состояний равновесия ([2]), функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \sum_{i+j>0}^{\infty} M_{ij}^1(t)\ \xi_0^i\,\zeta_0^j\ e^{(i\rho+j\lambda)t}, \\ \eta(t) &= \sum_{i+j>0}^{\infty} M_{ij}^2(t)\ \xi_0^i\,\zeta_0^j\ e^{(i\rho+j\lambda)t}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $M_{ij}^{\alpha}(t)$ некоторые тригонометрические многочлены относительно $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, коэффициенты которых в общем случае являются многочленами относительно t.

Рассмотрим точечное отображение T_0 плоскости S_0 в плоскость S_1. Очевидно, оно имеет вид

$$\begin{aligned} \xi^1 &= f_0(\xi_0,\,\zeta_0) = \xi\left(-\frac{1}{\lambda}\,\ln\frac{\zeta_0}{d^-}\,\xi_0,\,\zeta_0\right), \\ \eta^1 &= g_0(\xi_0,\,\zeta_0) = \eta\left(-\frac{1}{\lambda}\,\ln\frac{\zeta_0}{d^-}\,\xi_0,\,\zeta_0\right), \end{aligned} \tag{5}$$

где $t_0 = -\dfrac{1}{\lambda}\,\ln\dfrac{\zeta_0}{d^-}$ – время перехода – находится из условия пересечения траектории с плоскостью S_1, или

$$\xi^1 = \sum M^1_{ij} \left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln \frac{\zeta_0}{d^-}\right)\ (d^-)^j\ (\xi_0)^i\ \left(\frac{\zeta_0}{d^-}\right)^{i\nu},$$
$$\eta^1 = \sum M^2_{ij} \left(-\frac{1}{\lambda}\ \ln \frac{\zeta_0}{d^-}\right)\ (d^-)^j\ (\xi_0)^i\ \left(\frac{\zeta_0}{d^-}\right)^{i\nu}, \tag{6}$$

где $\nu = -\rho\lambda^{-1}$. Заметим, что для f_0 и g_0 справедливы следующие представления:

$$f_0 = \xi_0 \left(\frac{\zeta_0}{d^-}\right)^{\nu} \left[(1+f_{01})\ \cos\left(\omega_1\ \ln\ \frac{d^-}{\zeta_0}\right) + f_{02}\ \sin\left(\omega_1\ \ln\ \frac{d^-}{\zeta_0}\right)\right],$$
$$g_0 = \xi_0 \left(\frac{\zeta_0}{d^-}\right)^{\nu} \left[g_{01}\ \cos\left(\omega_1\ \ln\ \frac{d^-}{\zeta_0}\right) + (1+g_{02})\ \sin\left(\omega_1\ \ln\ \frac{d^-}{\zeta_0}\right)\right], \tag{7}$$

где $\omega_1 = \omega\lambda^{-1}$, а $f_{01}(\xi_0, \zeta_0), ..., g_{02}(\xi_0, \zeta_0)$ – некоторые функции, удовлетворяющие неравенству $|f_{01}| + |f_{02}| + |g_{01}| + |g_{02}| < \frac{1}{8}$ при достаточно малом ε.

Обозначим через σ_{δ_0} область $\{M_0(\xi_0,\, 0,\, \zeta_0),\ |\xi_0 - d^+| \le a,\ 0 < \zeta_0 \le \delta_0\}$, где a – некоторая достаточно малая постоянная. В силу того что $\nu > 0$, легко видеть, что по любому $\delta_1 > 0$ можно указать $\delta_0 > 0$ такое, что множество $T_0\, \sigma_{\delta_0}$ будет лежать в δ_1-окрестности точки M_1^-.

Так как Γ_0 пересекает секущие поверхности S_0 и S_1 без касания, то траектории рассматриваемой системы (1), проходящие через точки S_1, близкие к M_1^-, будут пересекать S_0 в точках, близких к M_0^+. Порожденное таким соответствием отображение S_0 в S_1 обозначим через T_1. Из общих теорем теории точечных отображений следует, что, каково бы ни было достаточно малое $\sigma > 0$, можно указать такое $\delta_1 > 0$, что образы всех точек из δ_1-окрестности M_1^- будут лежать в σ-окрестности M_0^+. При этом, если σ достаточно мало, то отображение T_1 будет взаимно однозначным и в переменных ξ, η, ζ может быть записано в виде

$$\bar{\xi}_0 = f_1(\xi^1,\, \eta^1) = d^+ + A_{11}\, \xi^1 + A_{12}\, \eta^1 + ...,$$
$$\bar{\zeta}_0 = g_1(\xi^1,\, \eta^1) = A_{21}\, \xi^1 + A_{22}\, \eta^1 + ... \tag{8}$$

Заметим, что так как отображение T_1 регулярно, то $A = \sqrt{A_{21}^2 + A_{22}^2} \ne 0$.

Рассмотрим следующее точечное отображение $T = T_1\, T_0$:

$$\bar{\xi}_0 = f(\xi_0,\, \zeta_0) = f_1(f_0, g_0),$$
$$\bar{\zeta}_0 = g(\xi_0,\, \zeta_0) = g_1(f_0, g_0). \tag{9}$$

Очевидно, при достаточно малом δ_0 отображение определено в σ_{δ_0} и σ_{δ_0} отображается в σ-окрестность точки M_0^+.

Будем искать неподвижные точки отображения T. Предварительно сделаем замену

$$\omega_1\ \ln \frac{d^-}{\zeta_0} = 2\,\pi\, n + \varphi,$$

где $n = E\left(\frac{\omega_1}{2\pi}\ \ln \frac{d^-}{\zeta_0}\right)$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Этой заменой область σ_{δ_0} разобьется на счетное множество слоев $K_n : \{|\xi_0 - d^+| \le a,\ \ d^-\, e^{-2\pi(n+1)/\omega_1} \le \zeta_0 < d^- e^{-2\pi n/\omega_1}\}$. Мы докажем, что

в каждом слое K_n, где n больше некоторого достаточно большого N, отображение T имеет две неподвижных точки.

В новых переменных уравнения для нахождения координат неподвижных точек K_n будут записываться в виде

$$\xi_0 = f\left(\xi_0,\, d^- e^{-(2\pi n+\varphi)/\omega_1}\right), \quad d^- e^{-(2\pi n+\varphi)/\omega_1} = g(\xi_0,\, d^- e^{-(2\pi n+\varphi)/\omega_1}). \tag{10}$$

С учетом выражений для f_0 и g_0 уравнения (10) можно также записать в виде

$$\begin{aligned} &\xi_0 = d^+ + e^{-2\pi n\nu/\omega_1}\; p\left(\xi_0, \varphi, n\right), \\ &d^- e^{-(2\pi n+\varphi)(1-\nu)/\omega_1} = \xi_0\left[\bar{A}_{21}\left(1 + q_1(\xi_0, \varphi, n)\right)\cos\varphi + \right. \\ &\left. + \bar{A}_{22}\left(1 + q_2(\xi_0, \varphi, n)\right)\sin\varphi\right], \end{aligned} \tag{11}$$

где функции p, q_1 и q_2 аналитические в K_n; q_1 и q_2 стремятся к нулю при $n \to +\infty$ вместе с производными; $\bar{A} = \sqrt{\bar{A}_{21}^2 + \bar{A}_{22}^2} \neq 0$. Нетрудно видеть, что первое уравнение системы (11) разрешимо относительно ξ_0

$$\xi_0 = d^+ + e^{-2\pi n\nu/\omega_1}\; \psi_n\left(\varphi\right), \tag{12}$$

где $\psi_n(\varphi)$ – аналитическая функция в рассматриваемом интервале изменения φ и имеет в нем ограниченные производные. Подставляя выражение для ξ_0 во второе уравнение, получим уравнение для отыскания второй координаты неподвижной точки. Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^-}{d^+}\; e^{-(2\pi n+\varphi)(1-\nu)/\omega_1} = \bar{A}\left(1 + \alpha_1(n, \varphi)\right)\, \sin(\varphi + \theta_0 + \alpha_2(n, \varphi)), \tag{13}$$

где α_1 и $\alpha_2 \to 0$ при $n \to \infty$ вместе с производными, а $\theta_0 = \operatorname{arctg} \bar{A}_{21}/\bar{A}_{22}$.

Так как, в силу условия теоремы, $\nu < 1$, то легко видеть, что при любом достаточно большом n уравнение (13) будет иметь два положительных решения φ_n^1 и φ_n^2, удовлетворяющих условиям

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \varphi_n^1 = -\,\theta_0 \;\; (\text{или } 2\pi - \theta_0), \\ &\lim_{n\to\infty} \varphi_n^2 = \pi -\, \theta_0 \;\; (\text{или } \pm 3\pi - \theta_0). \end{aligned} \tag{14}$$

Используя известную связь между периодическими движениями и неподвижными точками соответствующего преобразования, получаем, что в любой окрестности Γ_0 содержится счетное множество периодических решений.

Докажем, что каждая неподвижная точка $M_{ni}^*\left(\xi_n^i, 0, \varphi_n^i\right)$ отображения T (i либо 1, либо 2), достаточно близкая к M_0^+, является неподвижной точкой типа седло.

Как нетрудно видеть, линеаризованное точечное отображение T в окрестности неподвижной точки M_{ni}^* в переменных ξ_0 и φ будет записываться в виде

$$\begin{aligned} &d\bar{\xi} = C_{11}\left(n, i\right) d\xi + C_{12}\left(n, i\right) d\varphi, \\ &d^-\, e^{-(2\pi n+\varphi_n^i)(1-\nu)/\omega_1}\, d\bar{\varphi} = C_{21}\left(n, i\right) d\xi + C_{22}\left(n, i\right) d\varphi, \end{aligned} \tag{15}$$

где $|C_{11}(n,i)| + |C_{12}(n,i)| \to 0$ при $n \to \infty$, C_{21} ограничено при всех $n > N$, а для C_{22} справедливо представление

$$C_{22}\,(n,i) = (-1)^{i+1}\,A\,d^{+}\nu + \beta(n), \tag{16}$$

где $\beta(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Из представления характеристического уравнения в виде

$$d^{-}\,e^{-(2\pi n+\varphi_n^i)(1-\nu)/\omega_1}\,z^2 + [(-1)^i\;A\,d^{+}\nu + \beta_1(n)]\,z + \beta_2(n) = 0, \tag{17}$$

где $\beta_1(n)$ и $\beta_2(n) \to 0$ при $n \to \infty$, следует, что при достаточно большом n уравнение (17) будет иметь два действительных корня, один из которых по абсолютной величине больше единицы, а другой меньше единицы.

Таким образом доказано, что найденные периодические движения, достаточно близкие к Γ_0, будут неустойчивыми решениями седлового типа.

Исследовательский физико-технический институт
Горьковского государственного университета
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
18 VIII 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

([1]) А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, 1947.
([2]) А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950.
([3]) Л. П. Шильников, Матем. сборн., 61 (103), 4, 443 (1963).

Доклады Академии наук СССР
1967, Том 172, № 1, с. 54-57

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. Шильников

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ В РАСШИРЕННОЙ ОКРЕСТНОСТИ СЕДЛО-ФОКУСА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 11/III 1966)

Рассмотрим систему 4 дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \tag{1}$$

где $Z(z)$ – аналитическая вектор-функция. Предположим, что система (1) имеет состояние равновесия O, в котором характеристическое уравнение

$$|\partial Z/\partial z - \lambda E| = 0$$

имеет две пары комплексно сопряженных корней $\lambda \pm i\omega$, $\gamma \pm i\Omega$, где $\lambda < 0$, $\gamma > 0$. Такое состояние равновесия O будем называть с е д л о - ф о к у с о м. Как известно, в этом случае у системы (1) существуют два двумерных интегральных многообразия $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, на которых лежат соответственно O^+-кривые и O^--кривые.

Предположим, что существует траектория Γ_0, выходящая из O и вновь в него возвращающаяся при $t \to +\infty$, т. е. $\Gamma_0 \subset (\mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-)$. Мы будем предполагать, что указанное пересечение является негрубым первой степени. Это означает, что справедливо соотношение:

$$dim\ (\mathfrak{L}\mathfrak{M}_{M^+} \cap \mathfrak{L}\mathfrak{M}_{M^-}) = 1 \tag{2}$$

где через $\mathfrak{L}\mathfrak{M}_{M^+}$ и $\mathfrak{L}\mathfrak{M}_{M^-}$ обозначены касательные пространства к $\mathfrak{M}_{M^+}$ и $\mathfrak{M}_{M^-}$ в точке $M \in \Gamma_0$.

Пусть $U(\Gamma_0)$ - некоторая окрестность Γ_0. Очевидно, $O \in U(\Gamma_0)$. Область $U(\Gamma_0)$ мы будем называть р а с ш и р е н н о й о к р е с т н о с т ь ю с е д л о - ф о к у с а.

Т е о р е м а *Если $-\lambda \neq \gamma$ и выполнено условие* (2)*, то в любой расширенной окрестности седло-фокуса содержится счетное множество периодических движений седлового типа* [1].

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda + \gamma < 0$.

Систему (1) с помощью линейного преобразования можно привести к виду:

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= \lambda x_1 - \omega x_2 + P_1, \quad dx_2/dt = \omega x_1 + \lambda x_2 + P_2, \\ dy_1/dt &= \gamma y_1 - \Omega y_2 + Q_1, \quad dy_2/dt = \Omega y_1 + \gamma y_2 + Q_2, \end{aligned} \tag{3}$$

[1] Существование счетного множества периодических движений в окрестности Γ_0 , выходящей из седла и возвращающейся в него при $t \to +\infty$, было обнаружено в работах ([3,4]) в предположении, что Γ_0 при $t \to -\infty$ входит в седло, касаясь некоторой одномерной оси.

где $O(0,0,0,0)$ – седло-фокус; функции $P_1(x_1,x_2,y_1,y_2),...,Q_2(x_1,x_2,y_1,y_2)$ обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными.

В достаточно малой окрестности O уравнения $\mathfrak{M}_{M^+}$ будут записываться в виде

$$y_1=\varphi_1(x_1,x_2),\quad y_2=\varphi_2(x_1,x_2),$$

а уравнения $\mathfrak{M}_{M^-}$ – в виде

$$x_1=\psi_1(y_1,y_2),\quad x_2=\psi_2(y_1,y_2).$$

Заметим, что $\varphi_1,..,\psi_2$ – аналитические функции, обращающиеся в нуль в начале координат вместе с первыми производными. После замены

$$\xi_1=x_1-\psi_1(y_1,y_2),\quad \xi_2=x_2-\psi_2(y_1,y_2),$$

$$\eta_1=y_1-\varphi_1(x_1,x_2),\quad \eta_2=y_2-\varphi_2(x_1,x_2)$$

в некоторой окрестности O система примет вид

$$\begin{aligned}
&d\xi_1/dt=\lambda\xi_1-\omega\xi_2+P_{11}\xi_1+P_{12}\xi_2,\\
&d\xi_2/dt=\omega\xi_1+\lambda\xi_2+P_{21}\xi_1+P_{22}\xi_2,\\
&d\eta_1/dt=\gamma\eta_1-\Omega\eta_2+Q_{11}\eta_1+Q_{12}\eta_2,\\
&d\eta_2/dt=\Omega\eta_1+\gamma\eta_2+Q_{21}\eta_1+Q_{22}\eta_2,
\end{aligned}\tag{4}$$

где $P_{ij}(0,...,0)=Q_{ij}(0,...,0)=0$. В новых переменных уравнения $\mathfrak{M}_{M^+}$ будут $\eta_1=0,\ \ \eta_2=0$, а $\mathfrak{M}_{M^-}$ – $\xi_1=0,\ \ \xi_2=0$.

Обозначим через S_0 поверхность ${\xi_1}^2+{\xi_2}^2=r^2,\ \ {\eta_1}^2+{\eta_2}^2\le r^2$, а через S_1 - поверхность ${\eta_1}^2+{\eta_2}^2=r^2\quad {\xi_1}^2+{\xi_2}^2\le r^2$. Из вида уравнений (4) легко следует

Л е м м а 1. *Поверхности S_0 и S_1 при всех достаточно малых $r>0$ являются поверхностями без контакта для траектории системы* (4).

Пусть

$$\xi_i(t)=\xi_i(t,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^0,\eta_2^0),\quad \eta_i(t)=\eta_i(t,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^0,\eta_2^0)$$

есть уравнение траектории l системы (4), проходящей через точку $M_0(\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^0,\eta_2^0)\in S_0$ при $t=0$, где ${\eta_1^0}^2+{\eta_2^0}^2\ne 0$. Из леммы 1 получаем, что l при некотором t_0 пересечет S_1 в точке $M_1(\xi_1^1,\,\xi_2^1,\,\eta_1^1,\,\eta_2^1)$, где ${\xi_1^1}^2+{\xi_2^1}^2<r^2$. Это отображение S_0 в S_1 по траекториям обозначим через T_0. Очевидно, оно будет записываться в виде:

$$\xi_i^1=\xi_i(t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^0,\eta_2^0),\quad \eta_i^1=\eta_i(t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^0,\,\eta_2^0),\tag{5}$$

где время перехода t_0 фазовой точки с S_0 на S_1 находится из уравнения

$${\eta_1}^2(t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^0,\,\eta_2^0)+{\eta_2}^2(t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^0,\,\eta_2^0)=r^2$$

Наряду с этой формой записи отображения T_0, которая строилась аналогичным способом в работах ([1–4]), мы здесь построим другое представление отображения T_0, которое назовем параметрическим.

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\xi_1(t) = e^{\lambda t}\,[\xi_1^0\,\cos\omega t - \xi_2^0\,\sin\omega t] + \\
&+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\,[\bar P_1\cos\omega(t-\tau) - \bar P_2\sin\omega(t-\tau)]\,d\tau, \\
&\xi_2(t) = e^{\lambda t}\,[\xi_1^0\,\sin\omega t + \xi_2^0\,\cos\omega t] + \\
&+\int\limits_0^t e^{\lambda(t-\tau)}\,[\bar P_1\sin\omega(t-\tau) + \bar P_2\cos\omega(t-\tau)]\,d\tau, \\
&\eta_1(t) = e^{\gamma(t-t_0)}\,[\eta_1^1\,\cos\Omega(t-t_0) - \eta_2^1\,\sin\Omega(t-t_0)] + \\
&+\int\limits_{t_0}^t e^{\gamma(t-\tau)}\,[\bar Q_1\cos\Omega(t-\tau) - \bar Q_2\sin\Omega(t-\tau)]\,d\tau, \\
&\eta_2(t) = e^{\gamma(t-t_0)}\,[\eta_1^1\,\sin\Omega(t-\tau) + \eta_2^1\,\cos\Omega(t-\tau] + \\
&+\int\limits_{t_0}^t e^{\gamma(t-\tau)}\,[\bar Q_1\sin\Omega(t-\tau) + \bar Q_2\cos\Omega(t-\tau)]\,d\tau,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где через $\bar P_1$ обозначены нелинейные члены первого уравнения системы (4), $\bar P_2$ – второго и т.д.

Из метода последовательных приближений легко следует

Лемма 2. *Существует такая достаточно малая окрестность Σ начала координат, что при условии $M_0(\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,0,\,0)\in\Sigma$, $M_1(0,\,0,\,\eta_1^1,\,\eta_2^1)\in\Sigma$ решение системы (6) при всех $0\le t\le t_0$ существует и единственно.*

Проверкой убеждаемся, что найденное решение

$$
\begin{aligned}
&\xi_i(t) = \xi_i^{\Pi}(t,\,t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^0,\,\eta_2^0), \\
&\eta_i(t) = \eta_i^{\Pi}(t,\,t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^0,\,\eta_2^0), \quad i=1,2,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

есть решение системы (4), удовлетворяющее условиям

$$
\xi_i(0) = \xi_i^0, \quad \eta_i(t_0) = \eta_i^1, \quad i=1,2.
$$

Лемма 3. *Решение (7) представимо в виде:*

$$
\begin{aligned}
&\xi_1(t) = e^{\lambda t}[\xi_1^0\,(1+\alpha_{11}^0+\beta_{11}^0)\cos\omega t - \xi_2^0\,(1+\alpha_{12}^0+\beta_{12}^0)\sin\omega t] \\
&\xi_2(t) = e^{\lambda t}[\xi_1^0\,(1+\alpha_{21}^0+\beta_{21}^0)\sin\omega t + \xi_2^0\,(1+\alpha_{22}^0+\beta_{22}^0)\cos\omega t]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta_1(t) = e^{\gamma(t-t_0)}[\eta_1^1\,(1+\alpha_{11}^1+\beta_{11}^1)\cos\Omega(t-t_0) - \\
&\qquad\qquad -\eta_2^1\,(1+\alpha_{12}^1+\beta_{12}^1)\sin\Omega(t-t_0)] \\
&\eta_2(t) = e^{\gamma(t-t_0)}[\eta_1^1\,(1+\alpha_{21}^1+\beta_{21}^1)\sin\Omega(t-t_0) + \\
&\qquad\qquad +\eta_2^1\,(1+\alpha_{22}^1+\beta_{22}^1)\cos\Omega(t-t_0)]
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\alpha_{ij}^0(t-t_0,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^1,\eta_2^1)$, $\alpha_{ij}^1(t,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^1,\eta_2^1)$, $\beta_{ij}^k(t,t_0,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^1,\,\eta_2^1)$ – аналитические функции, удовлетворяющие условиям $\alpha_{ij}^k(0,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^1,\eta_2^1)$ обращаются в нуль при $\xi_1^0=\xi_2^0=\eta_1^1=\eta_2^1=0$, а $\beta_{ij}^0(t_0,t_0,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^1,\eta_2^1)$, $\beta_{ij}^1(0,t_0,\xi_1^0,\xi_2^0,\eta_1^1,\eta_2^1)$ стремятся к нулю при $t\to+\infty$ вместе с первыми производными.

Введем функции

$$
\xi_i^1 = \xi_i^{\Pi}(t_0,\,t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^1,\,\eta_2^1), \quad \eta_i^0 = \eta_i^{\Pi}(0,\,t_0,\,\xi_1^0,\,\xi_2^0,\,\eta_1^1,\,\eta_2^1),
\tag{9}
$$

Из леммы 3 будут вытекать оценки

$$|\xi_1^1| + |\xi_2^1| \; < \; K\, e^{\lambda t_0}, \quad |\eta_1^0| + |\eta_2^0| \; < \; K\, e^{-\gamma t_0}, \tag{10}$$

$$D\,\xi_1^1 + D\,\xi_2^1 \; < \; K\, e^{\lambda\, 2\pi t_0}, \quad D\,\eta_1^0 + D\,\eta_1^1 \; < \; K\, e^{-\gamma\, 2\pi t_0}, \tag{11}$$

где $D = |\partial/\partial t_0| + \Sigma|\partial/\partial \xi_i^0| + \Sigma|\partial/\partial \eta_i^1|$, K – некоторая константа. Очевидно, когда ${\xi_1^0}^2 + {\xi_2^0}^2 = r^2$, ${\eta_1^1}^2 + {\eta_2^1}^2 = r^2$, где r достаточно мало, формулы (9) дают новую форму записи отображения T_0.

Без ограничения общности можно считать r таким, что Γ_0 пересекает S_0 и S_1 в точках $M_0^+(r,\, 0,\, 0,\, 0)$ и $M_1^-(0,\, 0,\, r,\, 0)$. Из теорем о непрерывной зависимости от начальных условий следует, что траектория системы (4), пересекающая S_1 в точках, близких к точке M_1^-, будет также пересекать и S_0 в точках, близких к точке M_1^-. В рассматриваемых переменных это соответствие, которое обозначим через T_1, в достаточно малой окрестности M_1^- можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\bar\xi_2^0 = f(\xi_1^1,\, \xi_2^1,\, \eta_2^1) = A_1\xi_1^1 + A_2\xi_2^1 + B\eta_2^1 + ... \\ &\bar\eta_i^0 = g_i(\xi_1^1,\, \xi_2^1,\, \eta_2^1) = A_{i1}\xi_1^1 + A_{i2}\xi_2^1 + B_i\eta_2^1 + ..., \quad i = 1,\, 2. \end{aligned} \tag{12}$$

В линейном приближении след пересечения $\mathfrak{M}_{M^-}$ с S_0 имеет уравнения

$$\xi_2^0 = B\eta_2^1, \quad \eta_1^0 = B_1\eta_2^1, \quad \eta_2^0 = B_2\eta_2^1. \tag{13}$$

Из условия (2) следует, что B_1 и B_2 не равны нулю одновременно.

Так как при достаточно малых $\bar\eta_1^0$ и $\bar\eta_2^0$ траектория, проходящая через точку $\bar M_0(\bar\xi_1^0\, \bar\xi_2^0,\, \bar\eta_1^0,\, \bar\eta_2^0)$, пересечет S_1 через время $\bar t_0$ в точке $\bar M_1(\bar\xi_1^1,\, \bar\xi_2^1,\, \bar\eta_1^1,\, \bar\eta_2^1)$, то, в силу указанного выше, связь между двумя последними координатами точек $\bar M_0$ и $\bar M_1 = T\bar M_0$ можно также записать в виде:

$$\bar\eta_i^0 = \eta_i^\Pi(0,\, \bar t_0,\, \bar\xi_1^0,\, \bar\xi_2^0,\, \bar\eta_1^1,\, \eta_2^1),$$

где $\bar\xi_1^0 = \sqrt{r^2 - (\bar\xi_2^0)^2}$, $\bar\eta_1^1 = \sqrt{r^2 - (\bar\eta_2^0)^2}$. Рассмотрим отображение $T = T_1T_0$

$$\begin{aligned} &\bar\xi_2^0 = f\left(\xi_1^\Pi(t_0,\, t_0,\, \xi_1^0, ...,\, \eta_2^1),\; \xi_2^\Pi(t_0,\, t_0,\, \xi_1^0, ...,\, \eta_2^1),\, \eta_2^1\right), \\ &\eta_i^\Pi(0,\, \bar t_0,\, \bar\xi_1^0, ..., \bar\eta_2^1) = g_i\left(\xi_1^\Pi(t_0,\, t_0,\, \xi_1^0, ...,\, \eta_2^1),\, \xi_2^\Pi(t_0,\, t_0,\, \xi_1^0, ...,\, \eta_2^1),\, \eta_2^1\right), \end{aligned} \tag{14}$$

где $\xi_1^0 = \sqrt{r^2 - (\xi_2^0)^2}$, $\eta_1^1 = \sqrt{r^2 - (\eta_2^1)^2}$. Очевидно, T определено при достаточно малых ξ_2^0, η_2^0 и достаточно больших t_0 и "точку" $(\xi_2^0,\, \eta_2^1,\, t_0)$ отображает в точку $(\bar\xi_2^0,\, \bar\eta_2^1,\, \bar t_0)$. Будем искать неподвижные точки T. Координаты неподвижных точек $(\xi_2^*,\, \eta_2^*,\, t^*)$ удовлетворяют уравнениям

$$\xi_2^* - f(\xi_1^\Pi,\; \xi_2^\Pi,\, \eta_2^*) = 0, \quad \eta_i^\Pi - g_i(\xi_1^\Pi,\, \xi_2^\Pi,\, \eta_2^*) = 0, \;\; i = 1, 2. \tag{15}$$

Пусть для определенности $B_1 \neq 0$. Легко доказывается, что первые два уравнения системы (15) разрешимы относительно ξ_2^* и η_2^* при всех $t^* > \bar t^*$. Подставив их выражения в последнее уравнение, получим уравнение относительно t^*

$$\begin{aligned} &B_1\,(1 - \varphi_{21}^1(0,\, r,\, 0,\, r,\, 0) + ...)\sin\Omega t^* + \\ &+B_2\,(1 + \varphi_{11}^1(0,\, r,\, 0,\, r,\, 0) + ...)\cos\Omega t^* - \\ &-e^{(\lambda+\gamma)t^*}[\Delta_1(1 + \varphi_{11}^1(0,\, r,\, 0,\, r,\, 0) + ...)\cos\omega t^* + \\ &\quad +[\Delta_2(1 + \varphi_{21}^1(0,\, r,\, 0,\, r,\, 0) + ...)\sin\omega t^*] = 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где $\Delta_1 = A_{11}B_2 - A_{21}B_1,\ \Delta_2 = A_{12}B_2 - A_{22}B_1$. Так как $\lambda + \gamma < 0$ и $1 + \varphi_{11}^1 > 0$, $1 + \varphi_{21}^1 > 0$ при достаточно малом r, то получаем, что уравнение (16) имеет счетное число корней t_n^*, асимптотика которых при $n \to \infty$ определяется корнями уравнения

$$B_1\,(1 - \varphi_{21}^1)\sin\Omega t^* + B_2\,(1 + \varphi_{11}^1)\cos\Omega t^* = \bar{B}\sin(\Omega t^* + \theta) = 0.$$

Характеристическое уравнение линеаризованного точечного отображения (14) в неподвижной точке легко найти и можно записать в виде

$$\alpha_1(n)\,z^3 + [\bar{B}\Omega\delta + \alpha_2(n)]\,z^2 + \alpha_3(n)\,z + \alpha_4(n) = 0,$$

где $\alpha_i(n) \to 0$ при $n \to +\infty$, а δ равно либо $+1$, либо -1. Это уравнение при $n \to +\infty$ имеет один корень, стремящийся к бесконечности, и два, стремящихся к нулю.

Таким образом, мы доказали, что отображение T имеет счетное число неподвижных точек. Следовательно, система (3) имеет счетное множество периодических решений седлового типа, которые проходят через точки

$$M_n^*(\xi_{1n}^*\,\xi_{2n}^*, \eta_1^{\Pi}(0,\, t^*,\, \xi_{1n}^*\,\xi_{2n}^*,\, \eta_{1n}^*,\, \eta_{2n}^*,\, \eta_2^{\Pi}) \in S_0.$$

Из построения отображений T_0 и T_1 следует, что любая расширенная окрестность седлофокуса содержит счетное множество периодических решений указанного типа.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
10 III 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

([1]) Л. П. Шильников, ДАН, 143, № 2, 289 (1962) .
([2]) Л. П. Шильников, Матем. сборн.. 61 (104), № 4, 443 (1963).
([3]) Л . П. Шильников, ДАН, 160, № 3, 558 (1965).
([4]) Ю. И. Неймарк, Л. П. Шильников, ДАН, 160, № 6, 1261 (1965).

1970 Математический Сборник т.81(123),№ 1, с. 92-103

К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус

Л.П.Шильников (Горький)

§ 1. **Введение.**

Возможность существования транзитивных инвариантных компактных множеств, содержащих счетное множество грубых периодических движений, является одной из основных особенностей многомерных динамических систем. Хотя примеры таких систем указывались еще А. Пуанкаре, Д. Биркгофом, М. Морзом и другими, идейные основы систем со счетным множеством грубых периодических движений были заложены в работах и высказываниях С. Смейла на основе понятия грубости А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина. Так С. Смейлом [1] в 1961 г. был впервые приведен пример грубого диффеоморфизма на двумерной сфере, имеющего инвариантное подмножество, гомеоморфное топологической схеме Бернулли с двумя символами [1]. В основе построения такого диффеоморфизма лежала конструкция, известная теперь под названием "подковы Смейла".

Автором [2] при рассмотрении структуры окрестности двоякоасимптотической траектории к грубому состоянию равновесия типа седло-фокус трехмерной системы было найдено счетное множество периодических движений седлового типа. При этом было обнаружено, что отображение T, к которому свелась задача, имеет счетное множество "подков Смейла". Счетное множество трехмерных "подков Смейла" было установлено и в следующей работе автора [3].

Настоящая работа является развитием работ [2,3] на случай произвольной размерности. Отметим, что, как нам удалось установить, для описания структуры окрестности двоякоасимптотической траектории Γ_0 к седло-фокусу требуется счетное множество символов. В отличие от работы [4], где для описания окрестности гомоклинической кривой также требуется счетное множество символов, здесь траекториям, целиком лежащим в окрестности Γ_0, может быть поставлено в соответствие лишь некоторое подмножество множества всех бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из счетного множества символов.[2]

Пусть дана система $m+n$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x,\, y), \quad \frac{dy}{dt} = By + g(x,\, y), \tag{1.1}$$

[1]Правда, доказательство грубости этого диффеоморфизма до сих пор нигде не приведено. У-системы, введенные Д. В. Аносовым и охватывающие геодезические потоки на многообразиях отрицательной кривизны, эргодические диффеоморфизмы тора, составляют пока единственный класс, для которого установлена грубость.

[2]Отметим, что С. Смейлом [5] в предположении, что в окрестности седла диффеоморфизм приводим к линейному виду, было установлено наличие бернуллиевской подсистемы с конечным числом символов в окрестности гомоклинической траектории.

Однако и в случае диффеоморфизма, как следует из работы автора [6], посвященной изучению дискретных систем, имеющих гомоклинические торы, окрестность гомоклинической траектории содержит систему Биркгофа-Морза – топологический аналог схемы Бернулли со счетным множеством символов.

где A – m-мерная матрица, характеристические корни $\lambda_1, ..., \lambda_m$ которой лежат слева от мнимой оси, а B – n-мерная матрица, характеристические корни которой $\gamma_1, ..., \gamma_n$ лежат справа от мнимой оси, а f и g – аналитические функции в некоторой области R^{m+n}, обращающиеся в нуль вместе с первыми производными при $x = y = 0$. Без ограничения общности можно считать, что выполнены следующие условия:

$$\operatorname{Re}\gamma_1 \leq \operatorname{Re}\gamma_j, \;\; j = 2, ..., n, \quad \operatorname{Re}\gamma_1 \leq -\operatorname{Re}\lambda_i, \;\; i = 1, ..., m. \tag{1.2}$$

Пусть $\mathfrak{M}^+$ – устойчивое m-мерное интегральное многообразие седла O, а $\mathfrak{M}^-$ – неустойчивое, n-мерное.

Мы будем предполагать, что у системы (1.1) существует траектория, двоякоасимптотическая к O, и что пересечение $\mathfrak{M}^+$ с $\mathfrak{M}^-$ по Γ_0 является простейшим негрубым, т. е.

$$dim(W_M^+ \cap W_M^-) = 1, \tag{1.3}$$

где W_M^+ и W_M^- – касательные пространства к $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в точке $M \in \Gamma_0$.

Все дальнейшее рассмотрение будет проводиться при следующих дополнительных ограничениях:

А) Корни γ_1 и γ_2 – комплексно-сопряженные, и $Re\,\gamma_1 < -Re\,\lambda_i$.

Б) $\operatorname{Re}\gamma_1 < \operatorname{Re}\gamma_j, \;\; j = 3, \ldots, m$. При этом предположении почти все траектории, лежащие в $\mathfrak{M}^-$, будут неправильными O^--траекториями и при $t \to -\infty$ будут касаться двумерной ведущей плоскости.

В) Γ_0 стремится к седлу O при $t \to -\infty$, касаясь ведущей плоскости.

Г) Некоторая величина $\delta \neq 0$ (лемма 3.2). Смысл этого требования состоит в том, что замыкание связного куска $\mathfrak{M}^-$ в достаточно малой окрестности Γ_0 является локально несвязным. Отметим, что в классе систем, удовлетворяющих условиям А, Б, В, системы с таким поведением $\mathfrak{M}^-$ образуют открытое множество второй категории.

З а м е ч а н и е 1. Условие того, что характеристические корни с наименьшими по абсолютной величине действительными корнями являются комплексными, при прочих общих предположениях является необходимым для существования периодических движений. Как было установлено в работе [7] при условии, что γ_1 – действительный корень, в предположениях общего типа любая окрестность Γ_0 не содержит периодических движений, а при малых добавках из Γ_0 может родиться только одно периодическое движение.

Поэтому, чтобы различать эти случаи, введем следующее

О п р е д е л е н и е. Седло O при выполнении условия А будем называть седло-фокусом, а окрестность Γ_0 – р а с ш и р е н н о й о к р е с т н о с т ь ю седло-фокуса.

З а м е ч а н и е 2. При $n = 2$ условия В, Г выполняются автоматически.

Рассмотрим множество бесконечных в обе стороны последовательностей

$$(\ldots j_i, \, j_{i+1}, \, \ldots), \tag{1.4}$$

составленных из символов 0, 1, 2, ... и удовлетворяющих следующему условию: для любых соседних индексов в последовательности (1.4) выполняется неравенство $j_{i+1} < \rho\, j_i$, где $\rho > 1$. Обозначим это множество через $\Omega(\rho)$.

В работе доказана следующая

Т е о р е м а *В любой расширенной окрестности седло-фокуса системы* (1.1), *удовлетворяющей условиям А, Б, В и Г, существует подсистема, траектории которой*

находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством $\Omega(\rho)$, *где* ρ *не превышает* $(-Re\,\lambda_1)\,Re\,\gamma_1^{-1}$.

Как следствие получаем, что в любой расширенной окрестности седло-фокуса содержится счетное множество периодических движений[3].

З а м е ч а н и е 3. Условие существования двоякоасимптотической траектории к седло-фокусу является негрубым. Поэтому системы, удовлетворяющие этому условию вместе с условиями (1.3) и А,Б, В, Г, образуют "пленку" H_1 коразмерности 1 в пространстве H $(m+n)$-мерных динамических систем с метрикой C^1. Можно показать, что любая достаточно близкая система к рассматриваемой нами системе и не принадлежащая H_1, будет иметь подсистему схемы Бернулли с конечным множеством символов. При этом число символов будет возрастать до бесконечности при стремлении добавок к нулю. Следовательно, бифуркационные поверхности пространства (т. е. такие поверхности, при переходе через которые меняется топологический тип) H в окрестности H_1 образуют локально несвязное множество. Кроме того, H_1 является недостижимой границей, т. е. любой непрерывный подход к H_1 (без пересечений с H_1) сопровождается бесчисленным множеством бифуркаций. Пример существования локально связной бифуркационной "пленки" коразмерности 1, отделяющей системы Морса-Смейла от систем со счетным множеством грубых периодических движений, указан в работе [10].

Схема доказательства теоремы аналогична схеме доказательства задачи Пуанкаре-Биркгофа [4] и состоит в построении отображения T, область определения которого представима в виде счетного объединения непересекающихся областей, на которых T имеет седловой тип, и использовании леммы о существовании неподвижной точки седлового типа в прямом произведении пространств (лемма 4.1).

§ 2. **Построение отображения** T

Отображение T мы будем строить в виде произведения двух отображений T_0 и T_1, где T_0 строится в окрестности седло-фокуса, а T_1 – в окрестности глобального куска Γ_0.

Отметим, что такая конструкция T использовалась автором и раньше.

а) П о с т р о е н и е о т о б р а ж е н и я T_0.

Систему (1.1) в окрестности O с помощью невырожденной аналитической нелинейной замены переменных можно записать в следующем виде:

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi + f(\xi,\,\eta), \quad \frac{d\eta}{dt} = B\eta + g(\xi,\,\eta), \tag{2.1}$$

где f и g представимы в виде $f = f_1(\xi,\,\eta)\xi$, $g = g_1(\xi,\,\eta)\eta$, причем $f_1(0,\,0) = g_1(0,\,0) = 0$, а n-мерная матрица B при условии А представима в виде

$$B = \begin{pmatrix} \gamma & -\omega & 0 \\ \omega & \gamma & \\ & 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

где $\gamma_1 = \gamma + i\omega$, а $\tilde{B}$ – $(n-2)$-мерная матрица, характеристические корни которой $\gamma_3, ..., \gamma_n$. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $\omega = 1$.

[3]Отметим работы [8,9], где для случая релейных систем было найдено счетное множество периодических движений.

В многообразии $\mathfrak{M}^+$, уравнение которого в новых переменных будет $\eta = 0$, O будет грубым состоянием равновесия системы

$$\frac{d\xi}{dt} = A\xi + f_1(\xi,\, 0)\, \xi, \tag{2.3}$$

а в $\mathfrak{M}^-$ – грубым неустойчивым состоянием равновесия системы

$$\frac{d\eta}{dt} = B\eta + g_1(0,\, \eta)\, \eta. \tag{2.4}$$

Следовательно, для систем (2.3) и (2.4) можно построить функции Ляпунова $S_0(\xi)$ и $S_1(\eta)$ такие, что и поверхности $S_0 = r_0^2$ и $S_1 = r_0^2$ при всех $0 < r_0 \le r_1$ будут поверхностями без контакта для траекторий систем (2.3) и (2.4).

Из вида правых частей системы (2.1) следует, что можно указать такое r_0, $0 < r_0 \le r_1$, что поверхности

$$\begin{aligned} &S^+ : S_0(\xi_0) = r_0^2, \quad S_1(\eta_0) \le r_0^2, \\ &S^- : S_1(\eta) = r_0^2, \quad S_0(\xi) \le r_0^2, \end{aligned} \tag{2.5}$$

будут поверхностями без контакта для траекторий системы (2.1).

Пусть

$$\xi(t) = \xi(t,\, \xi_0,\, \eta_0), \qquad \eta(t) = \eta(t,\, \xi_0,\, \eta_0) \tag{2.6}$$

есть уравнение траектории L, проходящей при $t = 0$ через точку $M_0(\xi_0,\, \eta_0) \in S^+$, где $\eta_0 \ne 0$. Траектория L при некотором t_0 пересечет S^- в точке $M_1(\xi_1,\, \eta_1)$. Это соответствие между S^+ и S^- по траектории системы (2.1) обозначим через T_0^*. Оно будет записываться в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\xi(t) = \xi(t_0,\, \xi_0,\, \eta_0), \qquad \eta(t) = \eta(t_0,\, \xi_0,\, \eta_0), \\ &S_0(\xi_0) = r_0^2, \qquad\qquad S_1(\eta_0) = r_0^2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где время перехода t_0 фазовой точки с S^+ на S^- находится из уравнения

$$S_1(\eta\,(t_0,\, \xi_0,\, \eta_0)) = r_0^2 \tag{2.8}$$

Наряду с формой представления T_0^* в виде (2.7) найдем для T_0^* и параметрическую форму записи. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:

$$\xi(t) = e^{At}\xi_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\, f\, d\tau,\ \eta(t) = e^{B(t-t_0)}\eta_1 + \int\limits_{t_0}^t e^{B(t-\tau)}\, g\, d\tau. \tag{2.9}$$

где $t_0 > 0$. Можно доказать [4], что эта система при всех достаточно малых ξ_0 и η_1 имеет единственное решение при $0 \le t \le t_0$

$$\xi(t) = \tilde{\xi}(t, t_0, \xi_0, \eta_1), \quad \eta(t) = \tilde{\eta}(t, t_0, \xi_0, \eta_1) \tag{2.10}$$

которое одновременно есть и решение системы (2.1), проходящее при $t = 0$ через точку $M_0(\xi_0, \eta_0)$, где $\eta_0 = \tilde{\eta}(0, t_0, \xi_0, \eta_1)$, а при $t = t_0$ – через точку $M_1(\xi_1, \eta_1)$, где $\xi_1 = \tilde{\xi}(t_0, t_0, \xi_0, \eta_1$. Решение (2.10) может быть легко найдено либо методом последовательных приближений,

либо в виде рядов по степеням ξ_0 и η_1. Когда ξ_0 и η_1 удовлетворяют условиям $S_0(\xi_0) = r_0^2,\ S_1(\eta_1) = r_0^2$ формулы

$$\xi_1 = \tilde{\xi}(t_0, t_0, \xi_0, \eta_1) = \xi_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1),\ \eta_0 = \tilde{\eta}(0, t_0, \xi_0, \eta_1) = \eta_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1) \tag{2.11}$$

дают нам новое представление отображения T_0^*. При выполнении условий А, Б вид функции η_Π можно уточнить,

$$\eta_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1) = e^{-\gamma t_0}\{[\varphi_1 \cos t_0 + \varphi_2 \sin t_0] + ...], \tag{2.12}$$

где многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $t_0 \to +\infty$ вместе с первыми производными по ξ_0, η_1 и t_0, а

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \eta_{11}(1+\varphi_{11}(\xi_0)) - \eta_{12}\varphi_{12}(\xi_0) + \psi_1(\eta_1) \\ \eta_{11}\varphi_{12}(\xi_0) + \eta_{12}(1+\varphi_{11}(\xi_0)) + \psi_2(\eta_1) \\ \eta_{11}\varphi_{31}(\xi_0) - \eta_{12}\varphi_{32}(\xi_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{11}\varphi_{n1}(\xi_0) - \eta_{12}\varphi_{n2}(\xi_0) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} -\eta_{11}\varphi_{12}(\xi_0) - \eta_{12}(1+\varphi_{11}(\xi_0)) - \psi_2(\eta_1) \\ \eta_{11}(1+\varphi_{11}(\xi_0)) - \eta_{12}\varphi_{12}(\xi_0) + \psi_1(\eta_1) \\ \eta_{11}\varphi_{32}(\xi_0) - \eta_{12}\varphi_{31}(\xi_0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\eta_{11}\varphi_{n2}(\xi_0) - \eta_{12}\varphi_{n1}(\xi_0) \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

$\varphi_{ij}(\xi_0)$ аналитические и обращаются в нуль при $\xi_0 = 0,\ \psi_1(\eta_1)$ и $\psi_2(\eta_1)$ – аналитические и обращаются в нуль при $\eta_1 = 0$ вместе с первыми производными.

Для ξ_Π в случае выполнения условий А, Б будет иметь место оценка

$$\|\xi_\Pi\| + \left\|\frac{\partial \xi_\Pi}{\partial \xi_0}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_\Pi}{\partial \eta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial \xi_\Pi}{\partial t_0}\right\| < K\, e^{-\alpha t_0} \tag{2.14}$$

где $\alpha > \gamma$.

Пусть $M_0^+(\xi_0^+, 0)$ – точка пересечения Γ_0 с S^+, а $M_1^-(0, \eta_1^-)$ – точка пересечения Γ_0 с S^-. Обозначим через U_0 и U_1 следующие окрестности соответственно точек M_0^+ на S^+ и M_1^- на S^- :

$$U_0 = [(U_{\xi_0}^{m-1} = (\|\xi_0 - \xi_0^+\| \le \varepsilon_0,\ S(\xi_0) = r_0^2)) \times (U_{\eta_1}^n = (\|\eta_1\| \le \varepsilon_0))],$$

$$U_1 = [(U_{\xi_1}^m = (\|\xi_1\| \le \varepsilon_1)) \times (U_{\eta_1}^{n-1} = (\|\eta_1 - \eta_1^-\| \le \varepsilon_1,\ S(\eta_1) = r_0^2))].$$

Лемма 2.1 $\quad T_0^* U_0 \bigcap U_1 \ne \oslash$.

Пусть $\xi_0 \in U_{\xi_0}^{m-1},\ \eta_1 \in U_{\eta_1}^{n-1}$. Очевидно, чтобы показать, что пересечение в лемме не пусто, нужно доказать, что $\mid \xi_\Pi \mid < \varepsilon_1$,
$\mid \eta_\Pi \mid < \varepsilon_0$ при некотором t_0. В силу вида функции η_Π и оценки (2.14) для ξ_Π имеем, что существует такое $\bar{t}_0 > 0$, зависящее от ξ_0 и η_1 и стремящееся к бесконечности при $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \to 0$, что эти два неравенства будут выполняться при всех $t_0 \ge \bar{t}_0$.

Обозначим через $\sigma_0,\ \sigma_1$ соответственно область определения и область значений T_0^* : $U_0 \to U_1$, а через T_0 – сужение T_0^* на σ_0.

Формально σ_0, и σ_1 являются образами множества $U_{\xi_0}^{m-1} \times U_{\eta_1}^{n-1} \times [\bar{t}_0, \infty)$ при действии соответственно отображения $\mathcal{T}_0 : \xi_0 = \xi_0,\ \eta_0 = \eta_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1)$ и $\mathcal{T}_1 : \xi_1 = \xi_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1),\ \eta_1 = \eta_1$.

б) Построение отображения T_1.

Как отмечалось выше, точки M_0^+ и M_1^- – точки пересечения Γ_0 с S^+ и S^-. Из общих теорем следует, что траектории, пересекающие S^- в точках, близких к M_1^-, будут пересекать и S^+ в точках, близких к M_0^+. Обозначим это соответствие через T_1. Очевидно, T_1 можно записать в виде:

$$\bar{\xi}_0 = P(\xi_1, \eta_1), \quad \bar{\eta}_0 = Q(\xi_1, \eta_1), \quad S_0(\bar{\xi}_0) = r_0^2, \quad S_1(\eta_1) = r_0^2, \tag{2.15}$$

где P и Q можно считать определенными в U_1 (что достигается выбором подходяще малого ε_1).

Пусть

$$\left(\frac{\partial S_0}{\partial \xi_1}\right)_{M_0^+} \neq 0, \qquad \left(\frac{\partial S_1}{\partial \eta_1}\right)_{M_1^-} \neq 0, \tag{2.16}$$

Тогда, введя переменные $\xi_0 - \xi_0^+ = \Delta\xi,\ \eta_0 = \eta_0$ на U_0 и $\Delta\eta = \eta_1 - \eta_1^-,\ \xi_1 = \xi_1$ на U_1 и обозначения

$$\Delta\xi' = (\Delta\xi_2, ..., \Delta\xi_m), \quad \Delta\eta' = (\Delta\eta_2, ..., \Delta\eta_n),$$

получим, что $\Delta\xi_1$ и $\Delta\eta_1$ можно представить в виде $\Delta\xi_1 = \xi'(\Delta\xi'),\ \Delta\eta_1 = \eta'(\Delta\eta')$, где $\xi'(0) = \eta'(0) = 0$. В локальных переменных отображение T_1 будет записываться в виде:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta\xi'} &= P'(\xi_1, \Delta\eta') = (B_1 + ...)\xi_1 + (B_2 + ...)\Delta\eta', \\ \overline{\eta_0} &= Q'(\xi_1, \Delta\eta') = (B_3 + ...)\xi_1 + (B_4 + ...)\Delta\eta', \end{aligned} \tag{2.17}$$

где $B_1,\ ..., B_4$ – постоянные матрицы, а многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $\xi_1 \to 0,\ \Delta\eta' \to 0$.

Заметим, что в силу условия (1.2)

$$\text{rang}\ B_4 = n - 1. \tag{2.18}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_\alpha^-$ кусок многообразия $\mathfrak{M}^-$, имеющего уравнения $\xi = 0,\ S_1(\eta) \leq r_0^2$. Уравнения $D^+ = T_1(\mathfrak{M}_\alpha^- \bigcap U_1)$ будут

$$\Delta\xi' = P'(0, \Delta\eta'), \quad \eta_0 = Q'(0, \Delta\eta') \tag{2.19}.$$

При достаточно малых η_0 уравнения D^+ в непараметрической форме можно также записать и в следующем виде:

$$\Delta\xi' = \psi_1(\eta_0), \quad \psi_2(\eta_0) \equiv |\ \tilde{B}_4(\eta_0), \eta_0\ | = 0 \tag{2.20}$$

где $\tilde{B}_4 \to B_4$ при $\eta_0 \to 0$.

в) Построение $T = T_1 T_0$.

Как уже отмечалось выше, областью определения отображения T_1 можно считать U_1. Так как $\sigma_1 \in U_1$, то получаем, что $T = T_1 T_0$ определено на σ_0 и отображает σ_0 на S_0.

§ 3. Свойства отображения T

Область определения σ_0 отображения T_0 допускает расслоение

$$\sigma_0 = \bigcup_{\xi_0^* \in U_{\xi_0}^{m-1}} \sigma_{\xi_0^*}^0, \tag{3.1}$$

где $\sigma_{\xi_0}^0$ – образ плоскости $\xi_0 = \xi_0$ при отображении $\mathcal{T}_0$. Легко видеть, что замыкание $\sigma_{\xi_0}^0$ гомеоморфно n-мерному шару. Из представления $\eta_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1)$ в виде (2.12) следует, что при $\xi_0^* \in U_{\xi_0}^{m-1}$ и $\eta_1 \in U_{\eta_1}^{n-1}$ кривая $\xi = \xi_0,\ \eta_0 = \eta_\Pi(t_0, \xi_0, \eta_1)$, лежащая в $\sigma_{\xi_0}^0$, при $t_0 \to +\infty$ стремится к точке $M_0(\xi_0, 0)$, касаясь двумерной плоскости $\Pi_\xi : \eta_0 = \varphi_1 l_1 + \varphi_2 l_2$, где $(l_1, l_2) \in R^2$.

Будем считать, что $\bar{t}_0 = N\pi + s^*$, где s^* – некоторая величина из $[0, \pi)$, выбор которой будет сделан ниже. Представив $[\bar{t}_0, \infty)$ в виде $\bigcup\limits_n^\infty I_k$, где $I_k = [\pi k + s^*, \pi(k+1) + s^*)$, получим, что $\sigma_0 = \bigcup\limits_n^\infty \sigma_k^0$, а $\sigma_1 = \bigcup\limits_n^\infty \sigma_k^1$, где σ_k^0 и σ_k^1 – образы $U_{\xi_0}^{m-1} \times U_{\eta_1}^{n-1} \times I_k$ при действии $\mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}_1$.

Множество σ_k^0 естественным образом расслаивается на $(m-1)$-мерное семейство n-мерных поверхностей

$$\eta_0 = \eta_\Pi(\pi k + S_1 + s^*, \xi_0, \eta_1) = \eta_{\eta_1}^k(S_1, \xi_0), \tag{3.2}$$

которые будем обозначать через $P_{\eta_1}^k$, где $\eta_1 \in \bigcup_{\eta_1}^{n-1}$. Множество σ_k^1 будем расслаивать на n-мерное семейство $(m-1)$-мерных поверхностей

$$\xi_1 = \xi_\Pi(\pi k + S_1 + s^*, \xi_0, \eta_1) = \xi_{S_1\,\xi_0}^k(\eta_1), \tag{3.3}$$

которые будем обозначать через $Q_{S_1\,\xi_0}^k$; здесь $(S_1\,\xi_0) \in I_k \times \bigcup_{\xi_0}^{m-1}$. Из неравенства (2.14) следует, что функции $\xi_{S_1\,\xi_0}^k(\eta_1)$ гладко стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Лемма 3.1 *Пусть*

$$|\, B_4,\, \varphi_1(\xi_0^+, \eta_1^-)\,|^2 + |\, B_4,\, \varphi_2(\xi_0^+, \eta_1^-)\,|^2 \neq 0. \tag{3.4}$$

Тогда существует такое $N_1 \geq N$, что при всех $k > N_1$ и произвольном $\eta_1 \in \bigcup_{\eta_1}^{n-1}$ поверхность $P_{\eta_1}^k$ пересекается с D^+ только в одной точке.

Координаты точек пересечения D^+ с $P_{\eta_1}^k$ есть решение системы

$$\Delta\xi' = \psi_1(\eta_0),\ \ \psi_2(\eta_0) = 0,\ \ \eta_0 = \eta_{\eta_1}^k(S_0, \xi_0).$$

Эта система сводится к одному уравнению

$$|\, B_4,\, \varphi_1(\xi_0^+, \eta_1^-)\,|\cos\theta + (-1)^k\,|\, B_4,\, \varphi_2(\xi_0^+, \eta_1^-)\,|\sin\theta + \ \ldots = 0, \tag{3.5}$$

где $\theta = S_0 + s^*$, а многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $k \to +\infty$ вместе с первой производной по S_0 и с первой производной по параметру η_1.

Так как уравнение

$$|\, B_4,\, \varphi_1\,|\cos\theta + |\, B_4,\, \varphi_2\,|\sin\theta = 0 \tag{3.6}$$

в силу (3.4) имеет на промежутке $[0,\, 2\pi)$ два решения θ_1 и $\theta_1+\pi$, то, следовательно, уравнение (3.5) при всех $k > N_1 \geq N$ будет иметь единственное решение S_0. Выбрав $s^* = \theta_1 - \frac{\pi}{2}$, получим, что решение $S_0 = S_0(\eta_1,\, k)$ будет стремиться к $\frac{\pi}{2}$ при $k \to +\infty$.

С л е д с в и е . $\overline{T_0\,(D_0^+ \bigcap \sigma_0}$ *локально несвязно* .

Рассмотрим выражение

$$|\, B_4,\, \varphi_1(\xi_0,\, \eta)\,|^2 + |\, B_4,\, \varphi_2(\xi_0,\, \eta)\,|^2\ . \tag{3.7}$$

Нетрудно видеть, что его можно представить в следующем виде:

$$\eta_1^2\,\Delta_1^2 + \eta_2^2\,\Delta_2^2 + \ \dots,$$

где многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $\|\eta\| \to 0$, а

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} & 1+\varphi_{11}(\xi_0) \\ & \varphi_{12}(\xi_0) \\ B_4 & \varphi_{31}(\xi_0) \\ & . \\ & . \\ & . \\ & \varphi_{n1}(\xi_0) \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} & \varphi_{12}(\xi_0) \\ & -1-\varphi_{11}(\xi_0) \\ B_4 & \varphi_{32}(\xi_0) \\ & . \\ & . \\ & . \\ & \varphi_{n2}(\xi_0) \end{vmatrix}.$$

Поэтому, если Δ_1 и Δ_2 одновременно не обращаются в нуль, то вдоль любой траектории Γ, стремящейся к 0 при $t \to -\infty$ и касающейся ведущей плоскости, выражение (3.7) будет отличным от нуля при достаточно малом η. Применяя рассуждения леммы 3.1, приходим к следующей лемме (см. условие Γ, § 1).

Л е м м а 3.2 *При выполнении условия*

$$\delta = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 \neq 0 \tag{3.8}$$

замыкание $\mathfrak{M}^-$ *в расширенной окрестности седло-фокуса будет локально несвязным.*

Заметим, что при выполнении условия (3.8) будет выполняться и (3.4).

Обозначим через T_k сужение T_0 на σ_k^0.

Л е м м а 3.3 *Для любых* m *и* k, *удовлетворяющих условию*

$$\gamma m - \alpha k < -N_2, \tag{3.9}$$

где N_2 *– некоторое число, не меньшее* N_1,

$$\sigma_{km} = T_1\, T_k\, \sigma_k^0 \bigcap \sigma_m^0 \neq \oslash. \tag{3.10}$$

Образы поверхностей $\xi_1 = \xi^k_{S_1\,\xi_0^*}(\eta_1)$, на которые расслаиваются σ_k^1 при отображении T_1 и достаточно больших k, можно записать в следующем виде:

$$\Delta\xi_0' = \tilde{\psi}_1(\eta_0,\, S_1,\, \xi_0^*,\, k), \quad \tilde{\psi}_2(\eta_0,\, S_1,\, \xi_0^*,\, k) = 0, \tag{3.11}$$

где $\tilde{\psi}_1 \to \psi_1(\eta_0)$ в метрике C^1 при $k \to \infty$, а $\tilde{\psi}_2$ представимо в виде

$$\psi_2(\eta_0) + \psi_2'(\eta_0,\, S_1,\, \xi_0^*,\, k) = 0,$$

где для ψ_2' справедлива оценка

$$\|\psi_2'\|_{C^1} < A\, e^{-\alpha k}. \tag{3.12}$$

Точка пересечения $(n-1)$-мерной поверхности $T_1\, Q^k_{S_1\xi_0^*}$ с m-мерной поверхностью $P^m_{\eta_1^*}$ определяется из следующей системы:

$$\begin{aligned} &\Delta\xi_0' = \tilde{\psi}_1(\eta_0,\, S_1,\, \xi_0^*,\, k), \quad \tilde{\psi}_2(\eta_0,\, S_1,\, \xi_0^*,\, k) = 0, \\ &\eta_0 = \eta^k_{\Pi}(S_0,\, \xi_0^+ + \Delta\,\xi,\, \eta_1^*), \end{aligned} \tag{3.13}$$

которая может быть сведена к уравнению

$$\begin{aligned} &\mid B_4,\, \varphi_1(\xi_0^+,\, \eta_1^-) \mid \cos\,(S_0 + s^*) + (-1)^k \mid B_4,\, \varphi_2(\xi_0^+,\, \eta_1^-) \mid \sin\,(S_0 + s^*) + \\ &+ \Phi\,(S_0,\, S_1,\, \xi_0^*,\, \eta_1^*,\, k,\, m) = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где для Φ справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{C^1} < L\, e^{\gamma m - \alpha k}. \tag{3.15}$$

Легко видеть, что при всех m и k, удовлетворяющих условию (3.9), где N_2 – некоторое достаточно большое число, не меньшее N_1, уравнение (3.13) имеет единственное решение

$$\tilde{S}_0 = \frac{\pi}{2} + \nu(S_1,\, \xi_0^*,\, \eta_1^*,\, m,\, k), \tag{3.16}$$

где ν определена при всех $0 \le S_1 < \pi,\ \xi_0^* \in U^{m-1}_{\xi_0},\ \eta_1^* \in U^{n-1}_{\eta_1}$ и стремится к нулю в метрике C_1 при $\gamma m - \alpha k \to -\infty$. Следовательно, поверхности $T_1\, Q^k_{S_1\xi_0^*}$ находятся в общем положении с поверхностями $P^m_{\eta_1^*}$.

Из (3.16) следует, что при достаточно большом N_2

$$\bar{\sigma}_{mk} \subset \sigma^0_m \tag{3.17}$$

и $\bar{\sigma}_{mk}$ гомеоморфно $(m+n-1)$-мерному шару, а $\operatorname{Int}\sigma_{mk}$ – внутренности $(m+n-1)$-мерного шара.

Пусть m и k удовлетворяют условию (3.9). Тогда в силу доказанной леммы отображение $T_1\, T_k : \sigma^k_0 \to \sigma^m_0$, которое обозначим через T_{mk}, будет определено и в переменных $\Delta\xi_0,\ \Delta\eta_1,\ S$ будет записываться в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\overline{\Delta\xi}\,' = P'(\xi_{\Pi}(k\pi + S + s^*,\, \xi_0^+ + \Delta\xi,\, \eta_1^- + \Delta\eta),\, \Delta\eta'), \\ &\eta_{\Pi}\,(m\pi + \bar{S} + s^*,\, \xi_0^+ + \overline{\Delta\xi},\, \eta_1^- + \overline{\Delta\eta}) = \\ &Q'(\xi\,(k\pi + S + s^*,\, \xi_0^+ + \Delta\xi,\, \eta_1^- + \Delta\eta),\, \Delta\eta'). \end{aligned} \tag{3.18}$$

Используя условие, что производная от функции в левой части уравнения (3.6) в нуле θ_1 отлична от нуля, отображение T_{mk} при всех m и k, удовлетворяющих условию $\gamma m - \alpha k < -\bar{N}$, где $\bar{N} \ge N_2$, можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\overline{\Delta\xi}\,' = \tilde{F}(\Delta\xi',\, \overline{\Delta\eta}\,',\, S,\, k,\, m), \\ &\Delta\eta' = \tilde{G}\,(\Delta\xi',\, \overline{\Delta\eta}\,',\, S,\, k,\, m), \\ &\bar{S} = \tilde{\theta}\,(\Delta\xi',\, \overline{\Delta\eta}\,',\, S,\, k,\, m), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где $\tilde{F},\, \tilde{G},\, \tilde{\theta}$ удовлетворяют условию Липшица с константой $q(k,\, m) < \frac{1}{8}$, стремящейся к нулю при $\gamma m - \alpha k \to -\infty$.

Рассмотрим связанное с T_{mk} отображение $\tilde{T}_{mk} : (\Delta\xi', \overline{\Delta\eta}, S) \to (\overline{\Delta\xi}, \Delta\eta', \bar{S})$, аналитически задаваемое формулами (3.19). В силу свойств пересечения $T\,\sigma_k^0$ с σ_m^0 отображение $\tilde{T}_{mk}$ будет определено на множестве $\|\Delta\xi'\| \le \varepsilon_0,\ \|\Delta\eta'\| \le \varepsilon_1,\ 0 \le S \le \pi$, которое мы обозначим через U_{mk}, и $\tilde{T}_{mk}$ отображает U_{mk} в множество $\|\Delta\xi'\| \le \varepsilon_0$, $\|\Delta\eta'\| \le \varepsilon_1$, $0 \le S < \pi$, которое мы обозначим через U_{km}.

При совпадении индексов k и m получаем, что $\tilde{T}_{kk} : U_{kk} \to U_{kk}$ – сжимающее отображение, и его неподвижная точка есть неподвижная точка $\tilde{T}_{kk}$. Из этого следует, что в любой окрестности Γ_0 содержится счетное множество периодических движений.

З а м е ч а н и е . Из (3.16) будет следовать, что $\overline{(\tilde{T}_{mk}\,U_{mk})} \subset U_{km}$ при достаточно большом $\bar{N}$.

§ 4. **Окончание доказательства теоремы**

Пусть Γ – траектория, целиком лежащая в достаточно малой расширенной окрестности седло-фокуса и отличная от Γ_0. Из построения отображений T_0 и T_1 следует, что Γ будет пересекать S_0 в точках σ^0. Пусть $(..., M_0^{-i}, ..., M_0^0, ..., M_0^i, ...)$ – последовательные точки пересечения Γ с σ_0.

Так как $\sigma_0 = \bigcup\limits_N^{\infty} \sigma_k^0$ и $\sigma_0^i \bigcap \sigma_0^l = \oslash$ для $i \ne l$, то получаем, что Γ будет соответствовать бесконечная последовательность

$$(..., j_{-i}, ..., j_0, ... j_i, ...), \tag{4.1}$$

составленная из символов $j_i \ge N$. Пусть $(\Delta\xi_i, \eta_i)$ – координаты точки $M_0^i \in \sigma_{j_i}^0$, $(\xi_i, \Delta\eta_i)$ - координаты точки $M_1^i = T_{j_i} M_0^i$, а $t_0^i = j_i\,\pi + S_{j_i} + s^*$ – время перехода фазовой точки из M_0^i в точку M_1^i.

Записав связь между координатами точек M_0^i и M_0^{i+1}, получим счетное множество соотношений для траектории Γ:

$$\begin{aligned}
&\Delta\xi_{i+1} = P'(\xi(j_i\pi + S_{j_i} + s^*, \xi_0^+ + \Delta\xi_i, \eta_{0i}),\\
&\eta(j_i\pi + S_{j_i} + s^*, \xi_0^+ + \Delta\xi_i, \eta_{i0})),\\
&\eta_{i+1} = Q'(\xi(j_i\pi + S_{j_i} + s^*, \xi_0^+ + \Delta\xi_i, \eta_{0i}),\\
&\eta(j_i\pi + S_{j_i} + s^*, \xi_0^+ + \Delta\xi_i, \eta_{i0})).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Если j_i и j_{i+1} удовлетворяют условию $\gamma\,j_{i+1} - \alpha\,j_i < -\bar{N}$, то, в силу разрешимости системы (3.18) и представления ее в виде (3.19), соотношения (4.2) можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
&\Delta\xi'_{j_{i+1}} = \tilde{F}\,(\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_{i+1}},\, S_{j_i},\, j_i,\, j_{i+1}),\\
&\Delta\eta'_{j_i} = \tilde{G}\,(\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_{i+1}},\, S_{j_i},\, j_i,\, j_{i+1})\\
&S_{j_{i+1}} = \tilde{\theta}\,(\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_i},\, S_{j_i},\, j_i,\, j_{i+1}).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Для дальнейшего нам потребуется следующая лемма, доказанная в [4].

Л е м м а 4.1 *Пусть полные метрические пространства X_i и Y_i и операторы A_i и B_i, $i + 0, \pm 1 ...$, удовлетворяют следующим условиям:*

1) $\sup\limits_{x'_i, x''_i \in X_i} \rho_{X_i}(x'_i, x''_i) < d, \quad \sup\limits_{y'_i, y''_i \in Y_i} \rho_{Y_i}(y'_i, y''_i) < d;$

2) $A_i(X_i \times Y_{i+1}) \subset X_{i+1},\ \ B_{i+1}(X_i \times Y_{i+1}) \subset Y_i;$

3) $\rho_{X_{i+1}}(\bar{x}'_{i+1},\, \bar{x}''_{i+1}) < \frac{q}{2}(\rho_{X_i}(x'_i, x''_i) + \rho_{Y_{i+1}}(y'_{i+1}, y''_{i+1}))$,

$\rho_{Y_i}(\bar{y}'_i, \bar{y}''_i) < \frac{q}{2}(\rho_{X_i}(x'_i, x''_i) + \rho_{Y_{i+1}}(y'_{i+1}, y''_{i+1}))$, *где* $q < 1$ *и* $\bar{x}_{i+1} = A_i(x_i,\, y_{i+1})$, $\bar{y}_i = B_{i+1}(x_i,\, y_{i+1})$.

Тогда существует единственная последовательность

$$(\,\dots,\, (x^*_{i-1},\, y^*_{i-1}),\ (x^*_i,\, y^*_i),\ (x^*_{i+1},\, y^*_{i+1}),\, \dots\,),$$

удовлетворяющая условиям

$$x^*_{i+1} = A_i(x^*_i,\, y^*_{i+1}), \qquad y^*_i = B_i(x^*_i,\, y^*_{i+1}).$$

Лемма 4.2 *Любой последовательности*

$$\pi = (\,\dots, j_{i-1},\ j_i,\ j_{i+1},\ \dots\,), \tag{4.4}$$

удовлетворяющей условию (3.9), соответствует единственная траектория Γ^π*, целиком лежащая в расширенной окрестности седла-фокуса.*

Возьмем в качестве X_i множество $U^{m-1}_{\xi_0} \times \bar{I}$, где $\bar{I} = [\,0,\, \pi\,]$, в качестве Y_i возьмем $U^{n-1}_{\eta_1}$.

Тогда

$$A_{j_i}: \quad \begin{aligned} \overline{\Delta\xi}_{j_{i+1}} &= \tilde{F}\,(\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_{i+1}},\, S_{j_i},\, j_i,\, j_{i+1}), \\ \bar{S}_{j_{i+1}} &= \tilde{\theta}\,(\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_i},\, S_{j_i},\, j_i,\, j_{i+1}), \end{aligned} \tag{4.5}$$

$$B_{j_{i+1}}: \ \ \Delta\eta'_{j_i} = \tilde{G}\,(\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_{i+1}},\, S_{j_i},\, j_i,\, j_{i+1}).$$

В силу свойств отображения $\tilde{T}_{mk}$ эта последовательность пространств и операторов будет удовлетворять условиям леммы. Поэтому будет существовать единственная последовательность

$$(\,\dots,\, (\Delta\xi'_{j_i},\, \Delta\eta'_{j_i},\, S_{j_i}),\ (\Delta\xi'_{j_{i+1}},\, \Delta\eta'_{j_{i+1}},\, S_{j_{i+1}}),\, \dots\,), \tag{4.6}$$

удовлетворяющая условиям (4.3). В силу замечания в конце § 3, для всех j_i будут выполняться условия $S_{j_i} \in [0,\, \pi)$. Поэтому последовательности π будет отвечать единственная траектория Γ^π.

Таким образом, множество всех траекторий, каждая из которых пересекает последовательно множества $\{\sigma^0_{j_i}\}$, где $\gamma\, j_{i+1} - \alpha\, j_i < -\bar{N}$, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством $\Omega(\alpha)$.

Теорема доказана.

(Поступила в редакцию 28/III 1969 г.)

Литература

1. С. Смейл, Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1963, т. 2, 365-366.

2. Л. П. Шильников, Об одном случае существования счетного множества периодических движений, ДАН СССР, 160, № 3 (1965), 558-561.

3. Л. П. Ш и л ь н и к о в , О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса, ДАН СССР, 172, № 1 (1967), 54-57.
4. Л. П. Ш и л ь н и к о в , Об одной задаче Пуанкаре - Биркгофа, Матем. сб., 74 (116) (1967), 378-397.
5. S. S m a 1 e, Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and combinatorial topology, Princeton, 1965.
6. Л. П. Ш и л ь н и к о в , К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора, ДАН СССР, 180, № 2 (1968), 286-289.
7. Л. П. Ш и л ь н и к о в , О рождении периодического движения из траектории, двояко-асимпготической к состоянию равновесия типа седло, Матем. сб., 77 (119) (1968), 461-472.
8. Ю. И. Н е й м а р к и Л. П. Ш и л ь н и к о в , Об одном случае рождения периодических движений, ДАН СССР, 160, № 6 (1965), 1261-1264.
9. В. П. Г р и г о р е н к о , Об одном случае счетного числа периодических движений у релейной системы, изв. ВУЗ'ов, Радиофизика, 10, № 3 (1967), 340-344.
10. Л. П. Ш и л ь н и к о в , Об одном новом типе бифуркации многомерных динамических систем, ДАН СССР (в печати).[опубл. в ДАН СССР, 1969, т.189, №1, 59-62. – прим. ред.]

ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. I. [1]

Л.П.Шильников

★Статья из сб."Методы качественной теории дифференциальных уравнений", Изд-во ГГУ, Горький, 1986, с. 150-165. [Engl. transl.: L.P. Shilnikov "The theory of bifurcations and turbulence. I".- Selecta Mathematica Sovietica, 1991, v.10, No.1, 43-53.]

Экспериментальные исследования последних лет (см. обзор [2]), посвященные изучению течения Куэтта и тепловой конвекции, показали, что возможные типы перестроек гидродинамических режимов вполне допускают описание средствами теории бифуркаций и что типичны следующие цепочки: а) состояние равновесия – периодическое движение (п.д.) – каскад бифуркаций удвоения – стохастичность; б) состояние равновесия – п.д. – квазипериодическое движение с двумя частотами – резонансное п.д. – стохастичность. Переход от резонансного п.д. может возникать либо через каскад бифуркаций удвоения, утроения, учетверения периода, либо сразу; в) состояние равновесия – п.д. – квазипериодическое движение с двумя частотами – квазипериодическое движение с тремя частотами – стохастичность. Получение подобных результатов в рамках математической гидродинамики в настоящее время не представляется возможным из-за огромных аналитических трудностей. Все, что в основном установлено к настоящему времени, касается бифуркации, описывающей возникновение вторичного течения (течение Куэтта, конвекция) и бифуркации Андронова-Хопфа для течения Пуазейля. Поэтому основное внимание многих исследователей сосредоточено на изучении конечномерных моделей (обычно находящихся с помощью галеркинской процедуры) с привлечением численных расчетов на ЭВМ. Причем, чтобы получить качественное совпадение с экспериментальными фактами, приходится брать десятки мод. Наибольшие затруднения возникают в вопросах, связанных с объяснением перехода к хаосу. Дело в том, что, за исключением модели Лоренца, где вполне понятен механизм возникновения странного аттрактора – притягивающего транзитивного предельного множества, состоящего из неустойчивых траекторий, перечисленные выше цепочки бифуркации приводят, как правило, к более сложным математическим объектам – притягивающим предельным множествам, содержащим как гиперболические нетривиальные множества, так и устойчивые периодические движения [3, 4]. Если аттракторы Лоренца допускают изучение как топологическими средствами [5], так и методами эргодической теории [6] и естественно могут быть названы стохастическими аттракторами [7], то вторые более удобно называть квазистохастическими аттракторами или сокращенно – квазиаттракторами [3, 4]. С математической точки зрения здесь казалось бы все ясно: несмотря на наличие метастабильного хаоса, описываемого неустойчивым нетривиальным предельным множеством, основная масса траекторий притягивается к устойчивым периодическим движениям. Однако практически дело может обстоять по-другому. Это связано с тем, что если устойчивые периодические движения имеют большие периоды и узкие области притяжения, то, в силу неизбежного шума в физическом эксперименте или ошибок счета на ЭВМ, в некотором интервале изменения параметра квазиаттрактор вполне может восприниматься как математический образ стохастических колебаний. Квазиаттрактор может быть как грубым и, следовательно, содержащим конечное число устойчивых периодических движений и гиперболических множеств,

[1] Данная работа является изложением доклада [1] и лекции, прочитанной на школе Института атомных исследований им. И.В. Курчатова в 1984 г.

описываемых топологическими марковскими цепями с конечным числом состояний, так и негрубым. Основной причиной негрубости квазиаттракторов является наличие негрубых гомоклинических кривых Пуанкаре, а следовательно, и существование устойчивых периодических движений у близких систем при условии, что седловая величина больше единицы [8, 9]. При этом условии, как показано в [10], для трехмерных систем в любой окрестности системы с негрубой гомоклинической кривой есть области, в которых плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений. В многомерном случае при предположении аналогичного типа справедливо следующее [11] : на бифуркационной поверхности, заполненной системами с негрубыми гомоклиническими кривыми и имеющими сложную структуру, всюду плотны системы со счетным множеством устойчивых периодических движений. Кроме того, в любой окрестности системы с негрубой гомоклинической кривой имеются системы со счетным множеством периодических движений. Аналогичная картина может иметь место и в случае гомоклинической кривой седло-фокуса [12]. Отметим также, что на таких бифуркационных поверхностях всюду плотны системы, имеющие негрубые периодические движения типа седло-узел. Поэтому, когда в квазиаттракторе материализуется устойчивое периодическое движение, а затем исчезает, слившись с седловым циклом, имеющим гомоклиническую кривую, и возникает известное явление перемежаемости типа хаос – периодическое движение – хаос. Заметим, что математические вопросы этого явления, сводящиеся к изучению бифуркации негрубой гомоклинической структуры, были рассмотрены в [13].

В настоящей работе попытаемся на основе современных методов теории динамических систем и теории бифуркаций дать качественное описание перехода к турбулентности в указанных выше гидродинамических течениях. Рассмотрение начнем с описания двух квазиаттракторов: спирального аттрактора и аттрактора Пуанкаре. На наш взгляд, они играют важную роль в вопросах хаотизации движений различных задач современного естествознания.

1. Пусть n-мерная гладкая система

$$\dot{x} = X(x, R), \quad n \geq 3, \tag{1}$$

где R – параметр, имеет состояние равновесия O, устойчивое при $R < R_1$ и неустойчивое (типа седло-фокус) при $R > R_1$ (т.е. пара характеристических корней с наименьшими действительными частями является комплексно-сопряженной). Предположим, что в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается единственное и устойчивое периодическое движение L. Ясно, что при небольших $R - R_1$ неустойчивое двумерное многообразие W_O^u седло-фокуса является диском с границей L. Следующее, что мы будем предполагать – это наличие дифференцируемой "бифуркации": два наименьших по модулю мультипликатора при $R > R^*$ становятся комплексно-сопряженными. Теперь W_O^u будет наматываться на L, образуя конфигурацию, напоминающую воронку (рис.1). В эту воронку будут втягиваться все траектории из некоторой области D. При дальнейшем увеличении R возможно следующее поведение W_O^u и W_O^s : они сближаются вплоть до появления при $R = R^{**}$ гомоклинической кривой седло-фокуса. В этом случае при выполнении условий работы [14] будет иметь место сложная структура поведения траекторий. При наличии воронки это будет означать существование квазиаттрактора. Так как поведение траекторий в квазиаттракторе вблизи O будет "раскручивающимся", то такой странный аттрактор будем называть "спиральным аттрактором" [15]. Здесь в принципе при $R < R^{**}$ в некоторой области $D^* \in D$ возможно сведение (1) к системе с выделенной циклической переменной

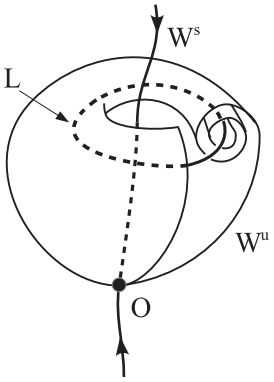


Рис. 1

$$\frac{dy}{dt} = Y(y,R) + p(y,\theta,R), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(y,\theta,R), \tag{2}$$

где ω – положительная функция, а среднее p по θ равно нулю. ω в ряде конкретных случаев может не зависеть от θ. Поэтому в подобных ситуациях (1) будет записываться в виде

$$\frac{dy}{dt} = Y(y,R) + p(y,\theta,R), \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega(y,R), \tag{3}$$

или

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{Y(y,R) + p(y,\theta,R)}{\omega(y,R)}, \tag{3'}$$

Отметим, что описание динамики системы в воронке при R, близких к R^{**}, с помощью (2) или (3), может, будет уже неправомочным. Так, в частности, при $R \to R^{**}$ амплитуда p внешней силы системы (3) может неограниченно возрастать.

Заметим также, что исследование подобных систем можно сводить к изучению отображения T_R, определенного на некоторой секущей S с краем W^s_O. Точка O для этого отображения будет неподвижной точкой типа седло.

2. Пусть система (1) имеет устойчивое периодическое движение L , которое при $R = R_1$ претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа, связанную с рождением двумерного инвариантного тора π^2. Пусть L при $R > R_1$ остается седловым. Следующее изменение не является топологическим, а связано с тем, что W^u_L начинает обвивать π^2, образуя воронку, которую в этом случае будем называть периодической. В терминах отображения картина будет иметь аналогичный вид, что и для потока, с той лишь естественной разницей, что O – неподвижная точка типа седло-фокус, а замкнутая кривая L – инвариантная кривая отображения – след пересечения тора с секущей. При дальнейшем изменении R W^u_L и W^s_L могут сблизиться и пересечься по грубой гомоклинической кривой. При наличии воронки возникнет квазиаттрактор, который будем называть аттрактором Пуанкаре [1].

Нетрудно заметить, что описание переходов в обоих указанных случаях весьма похожи. Эта близость в определенном смысле проявляется при рассмотрении автономной системы и близкой к ней системы с периодическим возмущением, если в первой есть переход к спиральному аттрактору, то во второй – к аттрактору Пуанкаре.

Ниже обсуждение возникновения хаоса будем вести по трем сценариям в соответствии с типами цепочек гидродинамических перестроек, указанных в начале работы.

а) Этот случай перехода к хаосу характерен тем, что в результате бифуркации Андронова-Хопфа образуется воронка, в которой и происходит каскад бифуркаций удвоения. Такая картина типична для сильно нелинейных систем, у которых имеет место сжатие объема трехмерных элементов фазового пространства. Поэтому указанное явление вполне может быть смоделировано триплетом с отрицательной дивергенцией. Оно же является типичным при возникновении подковы Смейла, о чем говорит и начальная стадия : инвариантная неустойчивая кривая неподвижной точки O отображения T_R (о возможности построения которого говорилось выше) наматывается на устойчивую неподвижную точку (соответствующую родившемуся периодическому движению из O), которая с ростом R претерпевает бифуркацию, связанную с рождением устойчивого цикла периода два и т.д. После этого каскада возникает квазиаттрактор, который будем называть аттрактором Смейла [1]. С ростом R аттрактор Смейла может мягко перерасти в спиральный аттрактор, что гарантируется появлением гомоклинической кривой седло-фокуса. Однако, в принципе, может быть и жесткое возникновение спирального хаоса,когда неустойчивое предельное множество, существующее в некоторой окрестности гомоклинической кривой седло-фокуса, с ростом R объединится с аттрактором Смейла.

З а м е ч а н и е. Указанный механизм перехода к хаосу в воронке является в некотором смысле простейшим для систем, претерпевающих прямую бифуркацию Андронова-Хопфа. Такой сценарий весьма типичен для трехмерных систем с отрицательной дивергенцией и имеющих только одно состояние равновесия. При наличии симметрии ситуация может быть несколько сложнее. Дело в том, что в этом случае для родившегося устойчивого периодического движения L и являющегося симметричным, более типична бифуркация вилки. L разваливается па три : два устойчивых несимметричных L_1 и L_2, и одно симметричное седловое $\tilde{L}$. С ростом R L_2 и L_2 могут претерпевать бифуркации удвоения и т.д. с последующим возникновением двух несимметричных аттракторов Смейла. Когда отображение выглядит так, как на рис.2, с каждым L_i можно связать свою воронку. Однако здесь удобнее говорить о двойной воронке, поскольку в общей случае $W^u_{\tilde{L}}$ и $W^s_{\tilde{L}}$ пересекаются по конечному числу гетероклинических кривых. Поэтому с ростом R несимметричные аттракторы могут эволюционировать в один симметричный. В частности, достаточный условием такого объединения может служить появление гомоклинических кривых седло-фокуса.

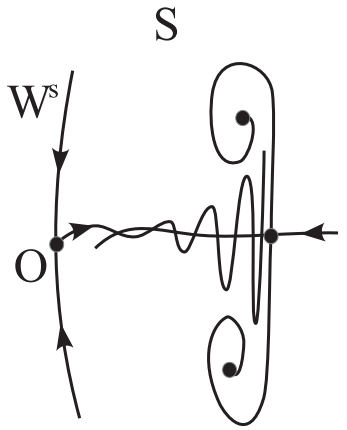


Рис.2

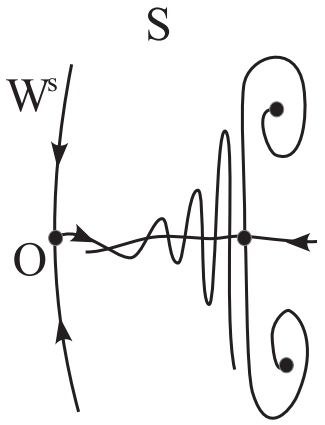


Рис.3

Альтернативой к рассмотренному может служить случай, изображенный на рис.3. Здесь

также могут возникать два несимметричных аттрактора Смейла с последующей эволюцией в один симметричный аттрактор. Условием возникновения симметричного аттрактора является появление негрубых гомоклинических кривых периодического решения $\tilde{L}$. [2]

б) Этот случай связан со следующей цепочкой бифуркации $O \to L \to \pi^2$ и переходом к хаосу в результате разрушения тора. Последняя задача рассматривалась в [4] при предположении, что на торе имеет место грубая структура с двумя периодическими движениями: устойчивым L^+ и седловым L^-. В этом случае тор есть замыкание $W^u_{L^-}$. Здесь, прежде всего, было установлено, что разрушению тора предшествует потеря им гладкости. Это может происходить после двух основных "дифференциальных бифуркаций", в результате которых тор становится либо "гофрированным" из-за того, что $W^u_{L^-}$ будет негладко примыкать к L^+, либо из-за того, что $W^u_{L^-}$ будет навиваться на L^+ в результате перехода пары наименьших (по абсолютной величине) действительных мультипликаторов L^+ в комплексные.

Основных случаев разрушения тора три. Они характеризуются следующими бифуркациями:

1) Потерей устойчивости L^+ с последующим рождением, либо периодического движения, либо двумерного устойчивого тора.

2) Появлением у L^- с седловой величиной, большей единицы, негрубой гомоклинической кривой. Последнее условие гарантирует, что соответствующая бифуркация является достижимой со стороны меньших значений параметра. В бифуркационный момент тор отсутствует.

3) Слиянием на негладком торе L^+ с L^- с образованием сложного периодического движения L^* типа седло-узел. В критический момент тор есть замыкание неустойчивого многообразия $W^u_{L^*}$. Заметим, что если $W^u_{L^*}$ есть гладкий тор, то при исчезновении L^* тор, как инвариантное многообразие, сохраняется.

Обсудим теперь вопросы, связанные с переходом к хаосу. Как уже отмечалось выше, с появлением тора материализуется двухчастотный режим, который затем сменяет устойчивое резонансное периодическое движение L^+. В первом случае один из возможных переходов к хаосу связан с каскадом бифуркаций удвоения и переходом к аттрактору Смейла. После того, как у L^- возникнет грубая гомоклиническая траектория, аттрактор Смейла перейдет в новый аттрактор, который будем называть тор-хаос. Другой путь перехода к хаосу связан с потерей устойчивости L^+ в результате прохождения пары комплексно-сопряженных мультипликаторов через единичную окружность. Такое явление отмечалось в экспериментальных исследованиях и указывалось на цепочку бифуркаций, связанных с утроением, учетверением периода. В принципе, здесь может быть и цепочка бифуркаций двумерных торов, оканчивающаяся разрушением последнего тора. Во втором случае в результате появления грубой гомоклинической кривой у L^- возникает нетривиальное гиперболическое множество. Тем не менее рабочим режимом будет L^+. Хаос возникает, если при увеличении R L^+ и L^- сливаются в одно негрубое периодическое движение L^*. При исчезновении L^*, имеющем гомоклиническую траекторию, и возникает тор-хаос. Подробно указанная бифуркация была рассмотрена в [13]. Здесь, в частности, было установлено, что в рассматриваемом случае будет возникать квазиаттрактор. Наиболее интересен третий случай, поскольку здесь, как было установлено в [16] в случае большой петли, при исчезновении седло-узлового периодического движения при $R = \bar{R}$ сразу возникает тор-хаос. В случае

[2]Заметим, что подобные случаи возникновения несимметричных аттракторов в результате бифуркации "вилки" симметричного периодического движения с последующим их объединением в симметричный весьма типичны для систем с симметрией.

малой петли ситуация сложнее. Ниже приводятся новые результаты исследования этой бифуркации, полученные Тураевым и автором данной работы, в предположении, что правые части системы C^k-гладкие, где $k \geq 2$.

Можно показать, что изучение рассматриваемой задачи сводится в исследованию C^k-гладкого отображения T_μ

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\mu^2} + f(\varphi) + g(\varphi, z, \mu) \pmod 1, \quad z = h(\varphi, z, \mu),$$

где μ – монотонная функция $R - \bar{R}$ ($\mu \sim \sqrt[4]{R - \overline{R}}$), правые части класса C^k, g и h стремятся к нулю вместе со своими производными по φ, z и μ , а $f(\varphi) = \varphi + f_0(\varphi)$, где $f_0(\varphi)$ – периодическая функция φ. В случае, если $\overline{W}^u_{L^*}$ – гладкий тор, то $f'(\varphi) \neq 0$ ни при каком φ, а если $\overline{W}^u_{L^*}$ негладкий, то найдется φ , при котором $f'(\varphi) = 0$. В негладком случае введем величину $\delta = \max\limits_{\varphi} \max\limits_{\psi \leq \varphi} (f(\psi) - f(\varphi))$.

В случае $\delta > 1$ (случай большой петли) существует такое $\bar{\mu} > 0$, что при любом $\mu \in (0, \bar{\mu}]$ существует сложная структура, отрезок $(0, \bar{\mu}]$ покрывается последовательностью интервалов (μ_n^1, μ_n^2), где $\mu_n^i \to 0$ при $n \to \infty$, так что при $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$ существует грубая гомоклиническая траектория неподвижной точки, причем левому концу $\mu = \mu_n^1$ соответствует появление негрубой неподвижной точки с гомоклинической траекторией (эта бифуркация рассмотрена в [13]), а правому концу $\mu_n = \mu_n^2$ – негрубая гомоклиническая структура, связанная либо с негрубостью неподвижной точки, либо с негрубостью гомоклинической кривой. В случае $\delta > \frac{1}{2}$ найдется счетная последовательность интервалов (μ_n^1, μ_n^2) , где $\mu_n^i \to 0$ при $n \to \infty$, и таких, что при $\mu \in (\mu_n^1, \mu_n^2)$ будет иметь место сложная структура, обусловленная наличием грубой гомоклинической траектории либо неподвижной точки, либо периодической периода 2. Вообще, при любом $\delta > 0$ найдется такая последовательность интервалов (μ_n^1, μ_n^2), при значении μ из которых T_μ будет иметь периодическую точку с грубой гомоклинической траекторией [3]. Однако в отличие от случая большой петли, когда всегда существует сложная структура, при достаточно малом δ найдется последовательность интервалов (μ_n^3, μ_n^4) , где $\mu_n^i \to 0$ при $n \to \infty$, при значениях μ из которых будет существовать устойчивая инвариантная замкнутая кривая, на которой число вращения Пуанкаре рационально и структура грубая.

Из этого следует практически важный вывод, что при разрушении негладкого инвариантного тора в результате исчезновения негрубого периодического движения в случае достаточно малого δ при малых надкритичностях может быть как квазиаттрактор, так и простая структура.

Для больших δ существование сложной структуры предельного множества можно установить также с помощью принципа кольца. Этот критерий был введен и использован в задаче о воздействии внешней периодической силы на автоколебательную систему [18] (см. также [19]). В [18] в явном виде было установлено, что инвариантный тор разрушается и на его месте, в частности, возникают гиперболические множества, описываемые с помощью топологических марковских цепей.[4]

[3] В связи с этим см. также [17]

[4] Принцип кольца оказался удобным средством исследования релаксационного хаоса в уравнениях типа Ван-дер-Поля с внешней периодической силой (см. [20, 21], в которых указаны и соответствующие матрицы переходов принципа кольца).

Как отмечалось выше, изучение системы (1) эквивалентно рассмотрению неавтономной системы (2). А как известно, если система

$$\frac{dy}{dt} = Y(y, R) \tag{4}$$

имеет грубое состояние равновесия (периодическое движение), то исходная система при предположении, что $p\,(y, \theta, R)$ достаточно мала, будет иметь периодическое движение (двумерный тор). Поэтому о цепочкой $O \to O_1 \to L_1$ системы (4), где O_1 – состояние равновесия, отщепившееся от O, а L_1 – периодическое движение, родившееся из O_1 , вполне можно связать цепочку бифуркации $O \to L \to \pi^2$ исходной системы. Такое соответствие, естественно, будет точным, если система (1) имеет вращательную симметрию, а (4) обладает соответствующими бифуркациями.

Ниже строится модельное отображение T трехмерной системы с симметрией и инвариантным тором. Предполагается, что в окрестности O система имеет вид

$$\dot{x} = \gamma x - \omega y, \quad \dot{y} = \omega x + \gamma y, \quad \dot{z} = -\nu z,$$

где $\gamma < \nu$. Для простоты положим $\gamma = 1,\ \omega = 1$. Отображение T_1 поверхности S $(z = d)$ в S_1 $(x^2 + y^2 = d^2)$, как легко видеть, в полярных координатах записывается в виде

$$z_1' = r^\nu, \quad \theta_1 = \theta - \ln r, \tag{5}$$

где $z_1' = z_1 d^{-1},\ T_2 :\ S_1 \to S$ в наиболее простой форме имеет вид

$$\bar{r} = z_1' + b, \quad \bar{\theta} = \theta_1 + \varphi \ \ (b > 0).$$

Из симметрии системы следует, что первый след пересечения W_o^u с S есть окружность $x^2 + y^2 = b^2$. Отображение $T = T_2\, T_1$ имеет вид

$$\bar{r} = r^\nu + b, \quad \bar{\theta} = \theta + \varphi - \ln r.$$

При достаточно малом b оно имеет инвариантную кривую $x^2 + y^2 = r^{*2}$, где r^{*2} – корень уравнения $r^* = r^{*\nu} + b$.

Одна из форм учета несимметрии состоит в следующей записи T_1

$$\bar{r} = z_1' + b\,(1 + a\,\sin\theta), \quad \bar{\theta} = \theta_1 + \varphi, \tag{6}$$

где $0 < a < 1$. Такой же вид, что (5) и (6), имеют модельные отображения, построенные в [4] при изучении задачи о воздействии внешней периодической силы на автоколебательную систему в предположении, что предельный цикл проходит вблизи седла. Поэтому бифуркационная диаграмма для рассматриваемого случая будет иметь такой же вид, как и в [4], а с ростом a тор будет разрушаться.

Когда T_1 имеет вид

$$\bar{x} = (z' + b)\,\cos\theta_1 + c, \quad \bar{y} = (z' + b)\,\sin\theta_1,$$

образ $W^u_{O\,loc} \cap S_1$ будет окружностью (в общем случае гладкий овал). Очевидно, что при $c = \pm b$ будет существовать гомоклиническая кривая седло-фокуса. Согласно [12] , при $\nu > 1$ и наличии гомоклинической кривой будет иметь место сложная структура, что при

$2\gamma < \nu$ будет означать наличие квазиаттрактора спирального типа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и турбулентность// Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике. Тр.П Междунар.рабочей группы/ Отв. ред. А.С.Давыдов, В.М.Черноусенко; Киев: АнУкр.ССР. Киев: Наук.думка, 1985. Ч.2.,С. 118-123. (Англ. пер. Nonlinear and turbulent processes. New York, 1984. v.2. p. 1627-1635

2. Gollub J., Benson S. Many routes to turbulent convection// J. Fluid Mech. 1980. №100. Part 3. P.449-470.

3. Afraimovich W.S., Shil'nikov L.P. On strange attractors and quasiattractors// Nonlinear Dynamics and Turbulence. Boston-London-Melbourn, Pitman. 1983. P. 1-34.

4. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность// Методы качественной теории дифференциальных уравнений; Межвуз.тематич.сб.науч.тр./ Под ред.Е.А.Леонтович-Андроновой; Горьк.гос.ун-т. Горький, 1983. С.3-26.

5. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца// Тр.Моск. мат.общества. 1983.№ 44. С. 150-212.

6. Бунимович Л.А., Синай Я.Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца// Нелинейные волны: Сб.науч.тр./ Под ред.А.В.Гапонова-Грехова; Горьк.ИПФ АН СССР, М.: Наука, 1979. С. 212–226.

7. Синай Я.Г. Стохастичность динамических систем// Нелинейные волны: Сб.науч. тр./ Под ред. А.В.Гапонова-Грехова.Горьк.ИПФ АН СССР. М.: Наука. 1979. С.192-211.

8. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к негрубой гомоклинической кривой. I // Матем.сб. 1972. Т.88 (130). № 8. С.475-492. Там же. 1973. Ч.2. Т.90 (132). № 1. С.139-156.

9. Гонченко С.В. Об устойчивых периодических движениях в системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой// Матем.заметки. 1983. Т.ЗЗ, № 5, С.745-755.

1О. Newhouse S. On the abundance of wild hyperbolic sets// Publ.Math. IHES. 1979. V.50. P.101-151.

11. Гонченко С.В., Шильников Л.П. О динамических системах с негрубыми гомоклиническими кривыми// ДАН СССР. 1986. Т.286, № 5. С.1049-1053

12. Овсянников И.М., Шильников Л.П, О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса// УМН. Т.39. В.4. С.132-133.

13. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами// ДАН СССР. 1978. Т.243. № 1. С.26-29.

14. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус// Матем.сб. 1970. т.81 (123). №1. с.92-103.

15. Arneodo A., Coullet P., Tresser C. Oscillators with Chaotic Behavior. An illustration of a theorem by Shil'nikov// J. of Statistical Physics. 1982, V.27. N1. P.171-182.

16. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных.бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел// ДАН СССР. 1974. Т.219. С.1281 - 1285.

17. Newhouse S., Palis J. .Takens F. Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms// Publications Math.IHES. 1983. N57. P.5-72.

18. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О малых периодических возмущениях автономных систем// ДАН СССР. 1974. Т.24. № 4. С.739-742.

19. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Принцип кольца и задача О взаимодействии двух автоколебательных систем// ПММ. 1974. Т.42. Л 4. С.618-627.

20. Levi M. Qualitative analysis of the periodically forced relaxation oscillators// Memoires of the Amer. Math. Soc. 1981. V.32. N 244. p. 1-145.

21. Guckenheimer J. Symbolic dynamics and relaxation oscillations// Physica. 1980. v. 1D. P.227.

ГОМОКЛИНИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ И СЛОЖНЫЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ

Л.А.Беляков, Л.П.Шильников

★Статья из сб.“Методы качественной теории дифференциальных уравнений”, Изд-во ГГУ, Горький, 1985, с. 22-35.

При изучении математических моделей различных сильно нелинейных физических, химических и других процессов особый интерес представляют решения типа бегущих волн. Их отыскание примечательно тем, что оно сводится к исследованию специальных особых траекторий: гетероклинических и гомоклинических движений уже конечномерных автомодельных систем [1] , к которым применимы все методы и приемы качественной теории динамических систем. При этом гетероклиническим траекториям, идущим из одного состояния равновесия в другое, соответствуют бегущие волны типа перепада (рис.1,а) или wave fronts, что типично для уравнений Колмогорова - Петровского - Пискунова (КПП), уравнений горения, газовой динамики и т.п., а гомоклиническим, идущим из состояния равновесия в него же, – бегущие волны, носящие название “импульс” (impulses) (рис.1,б) или “солитон” (уравнение Кортевега-де Вриза, Фитц-Хью-Нагумо и т.д.).

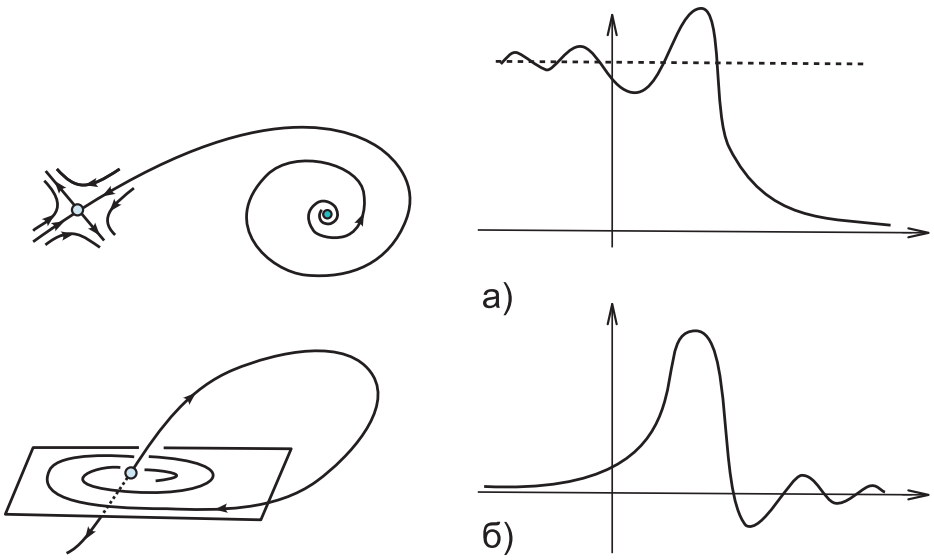


Рис. 1

Изложенные ниже результаты касаются вопросов существования уединенных стационарных волн сложного профиля.

I. С л о ж н ы е с о л и т о н ы. Предположим, что распределенная система имеет стационарную бегущую волну, соответствующую петле сепаратрисы Γ_0 седло-фокуса O n-мерной

[1]Всюду далее под автомодельной системой для системы уравнений в частных производных мы понимаем конечномерную систему, описывающую решения в виде бегущих волн.

автомодельной системы. Под седло-фокусом мы понимаем такое состояние равновесия, в котором только один корень характеристического уравнения λ_n лежит в правой полуплоскости [2] , а остальные λ_1, λ_2, ..., λ_{n-1} имеют отрицательные реальные части, причем λ_1 и λ_2 комплексно-сопряжены и $Re\,\lambda_i < Re\,\lambda_1$, где $i = \overline{3, n-1}$.

Из работ [2-5] (см.также [6]) вытекают следующие утверждения.

1) Если седловая величина $\sigma = Re\,\lambda_1 + \lambda_n < 0$,то при разрушении петли Γ_0 в ее окрестности других петель нет.

Это утверждение справедливо и в случае, когда наименьший по модулю отрицательный корень действителен.

Предположим теперь, что а) $\sigma > 0$, б) Γ_0 входит в O , касаясь ведущего многообразия, и в) сепаратрисная величина A [1] отлична от нуля. Этими условиями в пространстве динамических систем выделяется бифуркационная поверхность коразмерности один.

2) При выполнении условий а)–в) в окрестности указанной поверхности существует счетное множество бифуркационных поверхностей той же коразмерности, соответствующих гомоклиническим кривым возрастающей обходности [3], т.е. сложным многогорбым солитонам исходной системы уравнений в частных производных.

В последнее время это направление исследований развивается в работах [7-10] в связи с отысканием многоимпульсных волн уравнения Фитц-Хью-Нагумо. Отметим, что многогорбые солитоны имеются и в уравнении

$$u_t + 4\,u\,u_x + (1-n)\,u_{xx} + u_{xxxx} = 0,$$

возникающем при рассмотрении задачи о течения тонкого слоя жидкости по наклонной стенке (здесь n – параметр, характеризующий наклон стенки [11-14].

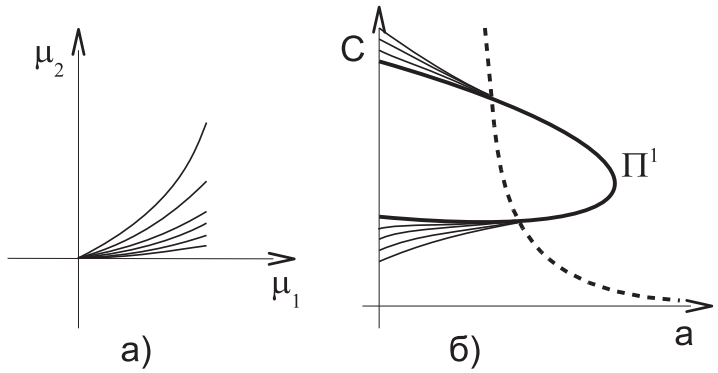


Рис. 2

Возникает вопрос о том, где начинаются и кончаются бифуркационные поверхности, соответствующие сложным солитонам. Для выяснения этого нужно нарушить условия а)–в). Так как ниже рассматриваются только трехмерные системы, то таких основных случаев

[2]В плане устойчивости этот случай, согласно [1], представляет особый интерес.

[3]Этот результат был использован для установления бифуркационных поверхностей подобного типа в системе Лоренца [6]

нарушения будет всего три [15]. При этом в каждом случае рассматривается двухпараметрическое семейство систем. Параметры μ_1, μ_2 вводятся следующим образом: μ_1 управляет локальными свойствами системы в окрестности состояния равновесия O , а μ_2 – расщеплением сепаратрисы $\Gamma(\mu_1, \mu_2)$ так, что $\Gamma(\mu_1, 0)$ – гомоклиническая кривая при всех $|\mu_1| < \bar{\mu}_1$. Сформулируем утверждения о структуре бифуркационных подмножеств Π^2 и Π^3, соответствующих двух- и трехобходным петлям сепаратрис.

А) Пусть при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \gamma < 0$ и $\sigma > 0$. Здесь параметр μ_1 введем так, что $\lambda_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{-\mu_1}$ (случай жордановой клетки). Тогда в плоскости параметров μ_1, μ_2 бифуркационное подмножество Π^2 представляет собой "метелку" – пучок кривых $\{\Pi^2_n\}_{n=1}^{\infty}$, склеенных в точке $\mu_1 = \mu_2 = 0$, главная асимптотика которых имеет вид [16] (см.рис.2,а)

$$\mu_2 = \text{const}\ \exp\Big(-\frac{\lambda_3}{\sqrt{\mu}_1}\pi\, n\Big).$$

Отметим, что такая ситуация обнаружена Кузнецовым и Панфиловым [17,18] в автомодельной системе для уравнений Фитц-Хью-Нагумо $u_t = u_{xx} - f_a(u) - v,\ \ v_t = bu$. Автомодельные уравнения имеют вид

$$u_\xi = w, \quad w_\xi = cw + f_a(u) + v, \quad v_\xi = \frac{b}{c}u,$$

где $\xi = x + ct$, c – скорость движения волны, $f_a(u)$ – N-образная характеристика, a, b – параметры системы. В случае $f_a(u) = u\,(u-a)\,(u-1)$ бифуркационная диаграмма на плоскости (a, c) представлена на рис.2,б (см. [17]). Здесь пунктирная кривая соответствует смене типа состояния равновесия седло-седло-фокус ($\mu_1 = 0$), сплошная кривая Π^1 соответствует однообходной петле сепаратрисы ($\mu_2 = 0$), а счетное множество тонких кривых $\{\Pi^2_n\}_{n=1}^{\infty}$ – двухобходной петле ("метелке"). Отметим, что в [7] установлено, что в случае кусочно-линейной характеристики $f_a(u)$ часть решений полной системы, соответствующих двухобходным петлям сепаратрис, устойчива.

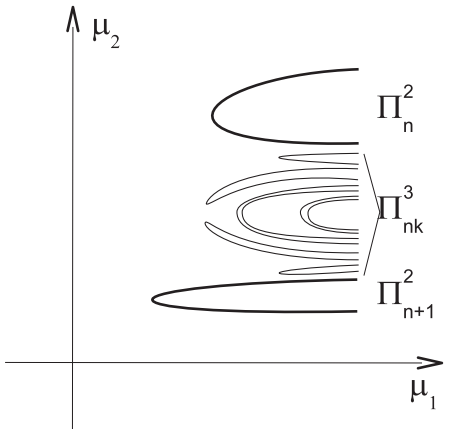


Рис. 3

Б) Пусть при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ $\sigma = 0,\ Im\,\lambda_i(0) \neq 0,\ i = 1, 2$. Здесь положим $\mu_1 = \sigma$. Тогда на плоскости параметров μ_1, μ_2 имеется счетное множество кривых Π^2_n типа парабол, вершины которых при $n \to \infty$ накапливаются к началу координат. Между каждой парой кривых Π^2_n, Π^2_{n+1} имеется "рой" кривых Π_{nk}, где k зависит от n, состоящих каждая из двух ветвей, причем число кривых в "рое" увеличивается с ростом n и ветви могут быть различного типа: встречные и вложенные. На рис.3 изображена лишь пара кривых Π^2_n, Π^2_{n+1} и один "рой" между ними.

В) Пусть при $\mu_1 = \mu_2 = 0$ $Re\,\lambda_i = 0,\ Im\,\lambda_i \neq 0,\ i = 1, 2$ и первая ляпуновская величина отрицательна, т.е. O – сложный седло-фокус. В этом случае положим $\mu_1 = Re\,\lambda_i$. Тогда на плоскости μ_1, μ_2 имеется счетное множество кривых Π^2_n и Π^3_n, определенных в области $-\bar{\mu}_1 \leq \mu_1 \leq 0$ и сходящихся при $n \to \infty$ к $\mu_2 = 0,\ -\bar{\mu}_1 \leq \mu_1 \leq 0$ (рис.4).

Пунктирная кривая соответствует наличию в автомодельной системе негрубой траектории, гомоклинической к родившемуся при $\mu_1 > 0$ из сложного седло-фокуса периодическому движению. В заштрихованной области – две грубых однообходных гомоклинических к этому периодическому движению кривых (рис.5,а). В исходной системе это соответствует одногорбому солитону с периодически осциллирующими хвостами (рис.5,б), причем амплитуда периодических колебаний порядка $\sqrt{\mu}_1$. Для многих уравнений в частных производных соответствующие автомодельные системы, описывающие стационарные волны, оказываются гамильтоновыми. Здесь, в отличие от диссипативного случая, наличие гомоклинической кривой является общим случаем, поскольку многообразия W^s и W^u седловой точки лежат в одном уровне энергии H_0, что позволяет им пересекаться трансверсально.

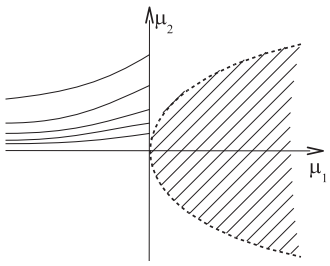


Рис. 4

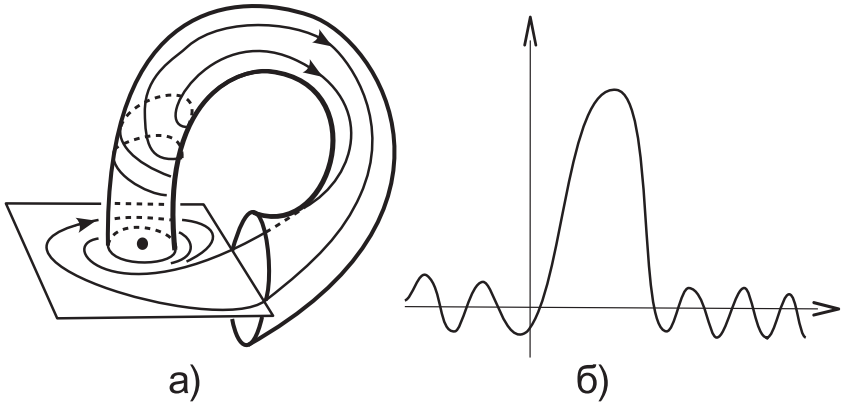


Рис. 5

Напомним, что состояние равновесия гамильтоновой системы с n степенями свободы называется седловым, если среди корней $\lambda_1, ..., \lambda_n, \lambda_{n+1}, ..., \lambda_{2n}$ нет корней с нулевой реальной частью, при этом O назовем седлом, если λ_1 и λ_2 действительны, $\lambda_1 = -\lambda_2$ и $|\lambda_1| \leq Re\,\lambda_i,\ i \geq 3$, и седло-фокусом, если $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\rho \pm i\omega\ \ (\omega \neq 0)$ и $|\rho| \leq |Re\,\lambda_i|\,,\ i \geq 5$.

Пусть гамильтонова система с двумя степенями свободы имеет негрубую гомоклиническую кривую Γ_0 седло-фокуса. Тогда множество всех гомоклинических кривых седло-фокуса, целиком лежащих в малой окрестности Γ_0, счетно и находится во взаимно однозначном соответствии (исключая Γ_0) со множеством отрезков $[j_1, j_2, ..., j_k]\ \ (k \geq 1)$, составленных из символов $1, 2, 3, ..., n, ...$

Доказательство этого утверждения основывается на следующем. Как известно [4], исследование поведения траекторий в расширенной окрестности седло-фокуса сводится к изучению отображения T, область определения Σ которого на трехмерной секущей S имеет вид рулета (рис.6,а), где $\mathfrak{M}^s = W^s_{loc} \cap S,\ \mathfrak{M}^u = W^u_{loc} \cap S,\ M^+ = \Gamma_0 \cap S$, а W^u_{loc} – локальный кусок W^u, содержащий Γ_0. Так как W^u и W^s содержатся в H_0, то $H_0 \cap S$ будет двумерной поверхностью, содержащей $\mathfrak{M}^s$ и W^u, и $\sigma_0 = H_0 \cap \Sigma$ представимо в виде $\sigma^0 = \bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty} \sigma^0_k$, где

$\sigma_m^0 \cap \sigma_n^0 = \emptyset$ при $m \neq n$. Из трансверсальности $\mathfrak{M}^s$ и W^u следует, что T действует на σ^0 так, как изображено на рис.6,б.

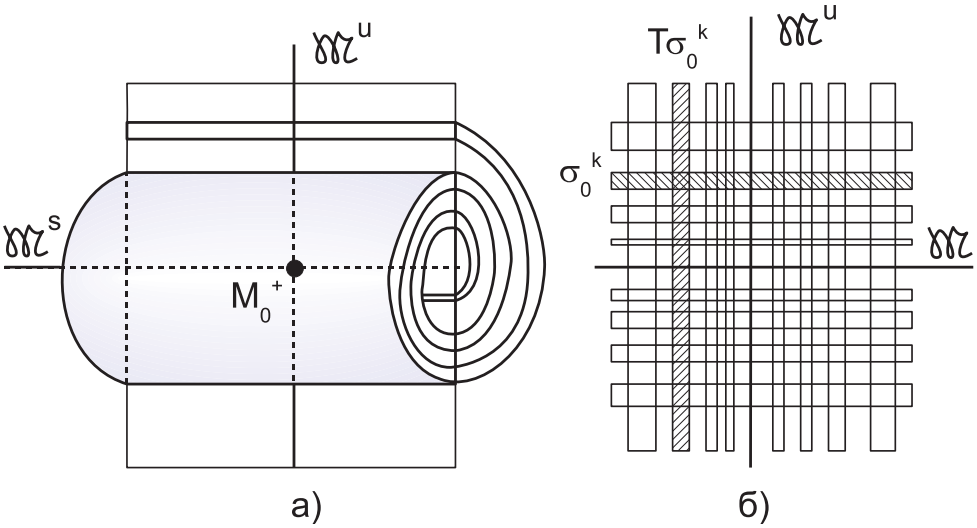


Рис. 6

Эта ситуация полностью аналогична (с точностью до некоторых технических деталей) задаче Пуанкаре - Биркгофа о структуре окрестности гомоклинической кривой [20] и, следовательно, имеет такое же описание траекторий, целиком лежащих в окрестности гомоклинической кривой, на языке символической динамики со счетным множеством символов. Поэтому здесь, кроме счетного множества гомоклинических кривых, имеются континуум траекторий, асимптотических к седло-фокусу либо при $t \to \infty$, либо при $t \to -\infty$, а также нетривиальное гиперболическое множество. Последний результат был установлен ранее в [19].

Именно такой случай может иметь место для автомодельной системы обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза [21,22]

$$u_t + uu_x + \beta_1 u_{xxx} + \beta_2 u_{xxxxx} = 0$$

Заметим, что в случае большего числа степеней свободы аналогичное утверждение справедливо при некоторых дополнительных условиях, типа указанных в [4,19].

2. С л о ж н ы в ф р о н т ы. Как известно, для скалярного уравнения

$$u_t = Du_{xx} + f(u)$$

вопрос о структуре фронта достаточно тривиален, поскольку в автомодельной системе отсутствуют предельные циклы. Однако в многомерном случае наличие периодических движений типично и поэтому в R^n $(n \geq 3)$ ситуация значительно многообразнее и сложнее. Здесь мы ограничимся только двумя утверждениями, не выходя из класса автомодельных систем с конечным числом периодических движений.

I) Пусть $O_1,\ O_2$ – седло типа $(n-1,\ 1)$, т.е. $W^u_{O_1}$ одномерно, а $W^s_{O_2}$ $(n-1)$-мерно, L – периодическое движение типа седло-узел, т.е. все мультипликаторы, кроме одного, равного

единице, лежат внутри единичной окружности, а первая ляпуновская величина отлична от нуля. Предположим, что одна из траекторий Γ_1, выходящая из O_1, при $t \to \infty$ стремится к L, а W^u_L пересекается трансверсально с $W^s_{O_2}$. Тогда при исчезновении периодического движения происходит счетное множество бифуркаций, соответствующих выполнению условия $\Gamma_1 \subset W^s_{O_2}$. Таким образом, гетероклиническим кривым соответствуют фронты с произвольно большим числом осцилляций.

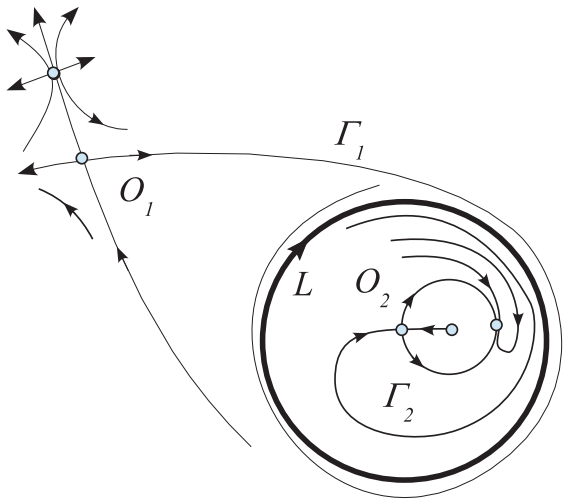


Рис. 7

Такой случай реализуется уже для двумерных систем [23], когда, наряду с Γ_1, на полуустойчивый цикл L наматывается (при $t \to -\infty$) устойчивая сепаратриса Γ_2 седла O_2 (рис.7). Бифуркационная поверхность H^*_0 коразмерности один, соответствующая негрубому циклу L, в этом случае будет недостижима с одной стороны, поскольку к ней накапливается счетное множество бифуркационных поверхностей H_i, соответствующих слиянию Γ_1 и Γ_2, т.е. наличию в системе гетероклинических кривых.

2) Предположим, что $W^u_{O_1}$ седла O_1, имеющего тип $(p-1,\, q)$, трансверсально пересекается с $W^s_{O_2}$ седла O_2, имеющего тип $(p,\, q-1)$. Их пересечение может содержать как конечное, так и счетное множество гетероклинических траекторий (рис.8). В последнем случае в замыкании $W^u_{O_1}$ обязательно содержится по крайней мере одно (но не более конечного числа) седловое периодическое движение L типа (p, q) [4]. В зависимости от числа и расположения этих циклов в замыкании $W^u_{O_1}$ траектории, "соединяющие" O_1 и O_2, могут иметь различную структуру, а соответствующие профили волн – сколь угодно большое число осцилляций.

В заключение статьи отметим, что, как правило, сложные солитоны и фронты являются неустойчивыми движениями исходной распределенной системы и притом седлового типа. Их устойчивые и неустойчивые многообразия, а также многообразия периодических волн и волн, отвечающих устойчивым по Пуассону траекториям автомодельной системы, сами, в свою очередь, могут пересекаться, образуя гомоклинические структуры распределенной системы. А это приводит к определенной хаотизации волн и, если не к странному аттрактору,

[4]Точное описание особого множества требует применения топологических марковских цепей со счетным множеством траекторий (см. [24])

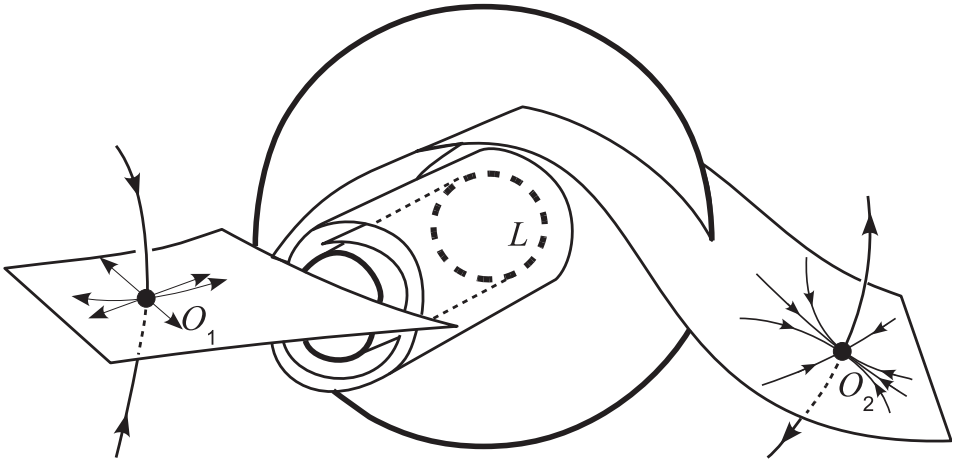


Рис. 8

то, по крайней мере, к “метастабильному хаосу“.

Настоящая статья является расширенным изложением сообщения [25].

Литература

1. Evans J.W. Nerve axon equations : III Stability of the nerve impulse.- Indiane Univ.Math.J ,1972, 22, № 6, 577-593.

2. Шильников Л.П. Некоторые случаи рождения периодических движений из особых траекторий.- Матем. сб., 1963, т.61 (104), № 4, с. 433-466.

3. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений.- ДАН СССР, 1965, т.160, № 3, 0.558-561.

4. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус.- Матем. сб., 1970, т.81 (123), № I, с.92-103.

5. Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло.- Матем. сб., 1968, т.77 (119), № 3, с.461-472.

6. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и модель Лоренца. Доп. II.- В кн.: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения/ М.: Мир, 1980 .

7. Feroe J.A. Existence and stability of multiple impulse solutions of a nerve solutions.- Siam. J. Appl. Math., 1982, v.42, № 2, pp.235-246.

8. Feroe J.A. Traveling waves of infinitely many pules in nerve equations.- J. Math. Biosc. , I98I,v. 55, № 3/4, pp. 189-204.

9. Evans J.W., Fenichel. N. and Feroe J.A. Double impulse solutions in nerve axon equations .- Siam. J. Appl. Math., 1982, v.2, № 2, 219-234.

10. Hastings S.P. Single and multiple pulse waves for the Fitz-Hugh-Nagumo equations.- Siam. J. Appl. Math., J982 , v.42, № 2, 247-260.

II. Lin P. Finite amplitude side - band stability of viscous film.- J. Fluid. Mech., J974, 63, 3.

12. Непомнящий А.А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости. - Изв.АН СССР, МЖГ, 1974, № 3, с.28-34.

13. Шкадов В.Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, № I, с.63-66.

14. Цвелодуб О.Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости. - Изв. АН СССР, МЖГ, 1980, № 4, с 142-146.

15. Беляков Л.А. 0 структуре бифуркационных множеств в системах с петлей сепаратрисы седло-фокуса. - Тр.IX Междунар.коиф. по нелинейным колебаниям / Киев, 1981.

16. Беляков Л.А. 0 бифуркационном множестве в системах с гомоклинической кривой седла. - Матем. заметки, 1980, т.28, вып.6, с.911-922.

17. Кузнецов Ю.А., Панфилов А.В. Стохастические волны в системе Фитц-Хью-Нагумо. - Препринт, Пущино, ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1982.

18. Кузнецов Ю.А. Существование и устойчивость бегущих волн в системах "реакция-диффузия" с одной пространственной переменной. - Препринт, Пущино, ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1982.

19. Devaney R. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems. - J.Diff. Equations, 1976, v. 21, 431-438.

20. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре - Биркгофа. - Матем. сб., 1967, т.74, с.378.

21. Kavahara T. Oscillatory solitary wave in dispersive media. - J. Tbus. Soo. Jap., 1972 , 33, № I, 260-268.

22. Gorskov K.A., Ostrovsky L.A., Papko V.V., Pikovsky A.S, On the existence of stationary multisolitons. - Phys. Lett. A , 1979, 74, № 3/4, 177-179.

23. Андронов А.А., Леонтович Е.А. К теории изменения качественной структуры разбиения плоскости на траектории. - ДАН СССР, 1938, т.21, № 9, с.427-430.

24. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Об особых множествах систем Морса-Смейла. - Труды ММ0, 1973, т.28, с.181-214.

25. Beljakov L.A., Shilnikov L.P. On the Complex Stationary Nearly Solitary waves. - Self-Organisation. Autowaves and Structures Far from Equilibrium. Springer-Verlag, 1984, pp. 106-110.

Горький, НИИ прикладной математики и кибернетики

О БИФУРКАЦИЯХ СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Н.К.Гаврилов, Л.П.Шильников

★Статья из сб."Методы качественной теории дифференциальных уравнений", Изд-во ГГУ, Горький, 1984, с. 60-72.

Рассматривается однопараметрическое семейство гамильтоновых систем, задаваемых с помощью достаточно гладкого гамильтониана H_μ, определенного в некоторой области из R^n и гладко зависящего от параметра μ. Предполагается, что при $\mu = 0$ каноническая система имеет изолированное состояние равновесия (с.р.) O. Для подобных систем весьма естественна следующая классификация с.р.

O называется: I) центром-центром, если все корни характеристического уравнения чисто мнимые; 2) седло-фокусом, если все комплексные с неравной нулю действительной частью; 3) седло-центром, если среди корней имеются как действительные, так и чисто мнимые; 4) седло-седлом, если все корни действительные. Хорошо известно [1], что при выполнении некоторых условий типа неравенств с.р. типа центр-центр устойчиво. Смена типа такого с.р. может происходить двумя путями:

I.) через появление равных чисто мнимых корней, т.е. через резонанс 1:1 ; этот путь описывает переход от центра-центра к седло-фокусу;

II.) через появление пары нулевых корней. В общем случае это приводит к исчезновению с.р. Если же с.р. сохраняется, это будет переход от центра-центра к седло-центру.

Целью настоящей работы является описание бифуркаций в перечисленных переходах в общих однопараметрических семействах гамильтоновых систем. Отметим, что мы в значительной степени опираемся на результаты А.Г.Сокольского [2,3], который рассмотрел вопросы устойчивости с.р. гамильтоновых систем в необходимых нам критических случаях, а также на результаты Л.М.Лермана и Я.Л.Уманского [4] по интегрируемым гамильтоновым системам.

Исследование указанных выше бифуркационных переходов представляет интерес не только в чисто математическом плане. Вопросы потери устойчивости с.р. являются традиционными проблемами классической механики и физики. Так, в результате резонанса 1:1 происходит потеря устойчивости лагранжевых точек либрации плоской ограниченной задачи трех тел [5]. Потеря устойчивости эллипсоидов Маклорена в задаче о фигурах равновесия вращающейся жидкости также связана с переходом от центра-центра к седло-фокусу [6]. Второй тип бифуркации, связанный с появлением пары нулевых корней, является типичным для тех консервативных задач, потенциальная энергия которых при изменении параметра претерпевает катастрофы, связанные либо с появлением, либо исчезновением потенциальных ям.

Другой сферой приложения теории бифуркации с.р. гамильтоновых систем является "солитонная" тематика [7]. Дело в том, что нахождение стационарных уединенных волн сводится к отысканию гомоклинических кривых с.р. конечномерных дифференциальных уравнений - автомодельных систем. В случае, когда автомодельная система является гамильтоновой с числом степеней большей единицы, нахождение гомоклинических кривых является нетривиальной задачей. Однако их можно находить при рассмотрении локальных бифуркаций с.р. В свою очередь, это позволяет обнаруживать момент появления "маленьких" солитонов. Примером может служить уравнение $u_t + u\,u_x + \beta_1\,u_{xxx} + \beta_2\,u_{xxxxx} = 0$,

в автомодельной системе которого потеря устойчивости с.р. приводит к появлении седло-фокуса. Гамильтоновы же системы с грубой гомоклинической кривой седло-фокуса имеют сложную структуру поведения траекторий, в частности, счетное множество гомоклинических кривых различной обходности (см. [8]). Бифуркационные явления возникают и при изучении самолокализованных решений уравнения синус-гордон (как гиперболического, так и эллиптического), а также решений типа "шеренга" и "колонна" в случае уравнения Кадомцева-Петвиашвили; правда, здесь приходится иметь дело с интегрируемыми гамильтоновыми системами, имеющими счетное множество степеней свободы [9].

I. Рассмотрим переход от центра-центра к седло-фокусу. Предположим, что при $\mu = 0$ имеет место резонанс 1:1 и в линейном приближении с.р. неустойчиво, т.е. имеет место жорданов случай. Аналогично [2] можно показать, что H_μ окрестности O можно привести к виду

$$H_\mu = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{\alpha(\mu)}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \omega(\mu)(p_2 q_1 - p_1 q_2) +$$
$$+(p_1^2 + p_2^2)\left[A(\mu)(p_1^2 + p_2^2) + B(\mu)(p_2 q_1 - p_1 q_2) + C(\mu)(q_1^2 + q_2^2)\right] + ...,$$

где многоточие означает члены пятой степени и выше, а $\alpha(0) = 0$. При $\mu = 0$ O будет устойчиво, если $A(0) > 0$, и неустойчиво при $A(0) < 0$.

Будем предполагать, что $A(0) > 0$ и равно $\frac{1}{4}$, что не ограничивает общности. Предположим также, что $\alpha'(0) \neq 0$, поэтому удобно считать, что $\alpha(\mu) \equiv \mu$. Характеристическое уравнение в O будет $\lambda^4 + 2\lambda^2(\omega^2 + \mu) + (\omega^2 - \mu)^2 = 0$. Видно, что O при $\mu < 0$ будет центром-центром, а при $\mu > 0$ – седло-фокусом. Сделаем при $\mu \neq 0$ в системе замену $q_i \to |\mu|\, q_i$, $p_i \to \sqrt{|\mu|}\, p_i$. Тогда система примет вид

$$\begin{aligned}
&\dot{p_1} = -\omega\, p_2 - \sqrt{|\mu|}\, q_1 + O(|\mu|), \quad \dot{p_2} = -\omega\, p_1 - \sqrt{|\mu|}\, q_2 + O(|\mu|),\\
&\dot{q_1} = -\omega\, q_2 + \sqrt{|\mu|}\, p_1 + (-sign\,\mu + p_1^2 + p_2^2) + O(|\mu|),\\
&\dot{q_2} = -\omega\, q_1 + \sqrt{|\mu|}\, p_2 + (-sign\,\mu + p_1^2 + p_2^2) + O(|\mu|).
\end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим укороченную систему, получающуюся из (1) отбрасыванием членов $O(|\mu|)$. Она замечательна тем, что является вполне интегрируемой и имеет два независимых интеграла

$$H_1 = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{sign\,(\mu)}{2}\,(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2)^2,$$
$$K_1 = p_2\, q_1 - p_1\, q_2.$$

При $\mu < 0$ поверхности уровня H_1 гомеоморфны сфере. Поэтому невырожденные совместные уровни H_1 и K_1 будут двумерными торами. Как при $\mu < 0$), так и при $\mu > 0$ имеется семейство вырожденных совместных уровней H_1 и K_1, которым отвечают периодические движения эллиптического типа. Особенно наглядно укороченная система описывается на уровне $K_1 = 0$. Если положить $p_1 = x\,\cos\varphi$, $p_2 = x\,\sin\varphi$, $q_1 = y\,\cos\varphi$, $q_2 = y\,\sin\varphi$, , то получим

$$\dot{x} = -\sqrt{|\mu|}\, y, \quad \dot{y} = -\sqrt{|\mu|}\, x\,(-sign\,\mu + x^2), \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Система из первых двух уравнений хорошо известна и интегрируется в эллиптических функциях. Ее фазовые портреты приведены на рис. 1. При $\mu > 0$ сепаратрисной восьмерке будет соответствовать уровень $H_1 = K_1 = 0$ укороченной системы, состоящей из

седло-фокуса и его устойчивого н неустойчивого многообразия, которые совпадают. Центрам $(\pm 1, 0)$ соответствует одно периодическое движение, на нем интеграл H_1 принимает минимум.

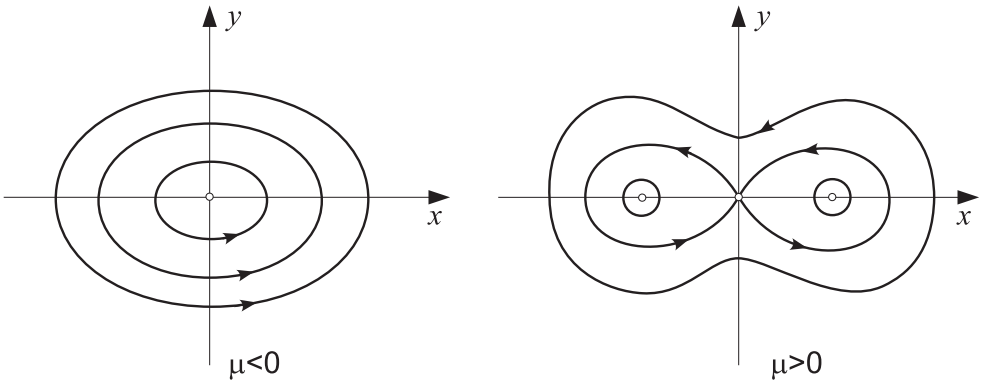


Рис. 1

Предположим, что исходная система вполне интегрируема при всех малых μ. Нетрудно видеть, что ее интегралы представимы в виде

$$\tilde{H}_\mu = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - \frac{\mu}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2)^2 + ...,$$

$$K_\mu = p_2\, q_1 - p_1\, q_2 + \tilde{A}(\mu)\,(p_1^2 + p_2^2) + ...$$

Преобразование перенормировки координат переводит эти интегралы в

$$\tilde{H}_\mu = \mu^2\{H_1 + O(\sqrt{|\mu|})\}, \quad K_\mu = |\mu|^{3/2}\{K_1 + O(\sqrt{|\mu|})\}.$$

Видно, что интегралы $\tilde{H}_\mu \,/\, \mu^2$, $K_\mu \,/\, |\mu|^{3/2}$ полной системы отличаются от интегралов H_1 и K_1 укороченной системы на величины порядка $O(\sqrt{|\mu|})\}$. Из этого, в частности, следует, что при малых $\mu > 0$ уровни $\tilde{H}_\mu = 0$, $K_\mu = 0$ определяют седло-фокус с гомоклиническим многообразием. Привлекая результаты работы [4], можно установить, что поведение решений исходной системы в малой (зависящей от μ) окрестности O аналогично поведению решений укороченной системы.

Если исходная система не является интегрируемой, то на трехмерном уровне $\tilde{H}_\mu$ устойчивое и неустойчивое многообразия седло-фокуса, вообще говоря, не совпадают, а пересекаются по отдельным кривым [1].

2. а) Рассмотрим теперь случай, когда при нулевом значении параметра с.р. гамильтоновой системы имеет пару чисто мнимых корней и два нулевых, причем нулевым соответствует недиагональная жорданова клетка. В этом случае невозмущенный гамильтониан может быть представлен в виде

$$H_0 = \frac{1}{2}\, q_1^2 + \omega(q_2^2 + p_2^2) + A\, p_1^3 + B\, p_1\,(q_2^2 + p_2^2) + ...,$$

[1]Однако этот эффект распадения является экспоненциально малым.

где многоточия - члены четвертой степени и выше. В общем случае A и B не равны нулю, что и будем предполагать, причем без ограничения общности можно считать, что $A = -\frac{1}{3}$. Как установлено в [3], с.р. в этом случае будет неустойчивым.

При $\mu \neq 0$ гамильтониан можно привести к следующему виду:

$$H_\mu = H_0 + \alpha(\mu)\, p_1 + ...,$$

где $\alpha(0) = 0$, а многоточием обозначено выражение, не содержащее линейных членов и обращающееся в нуль при $\mu = 0$. Предположим, что $\alpha(\mu) \equiv \mu$. Нетрудно видеть, что при $\mu > 0$ система в окрестности $O(0,0)$ имеет два состояния равновесия: центр-центр и седло-центр, которые сливаются при $\mu = 0$, а затем исчезают. Аналогично предыдущему сделаем при $\mu \neq 0$ перенормировку координат $p_1 \to |\mu|^{1/2}\, p_1;\ q_1 \to |\mu|^{3/4}\, q_1;\ p_2,\, q_2 \to |\mu|^{1/2}\, p_2, |\mu|^{3/4}\, q_2$. Тогда каноническая система запишется в виде

$$\dot{p}_1 = |\mu|^{1/4}\, q_1 + O(\sqrt{|\mu|})\},\quad \dot{q}_1 = |\mu|^{1/4}\left(sign\,\mu - p_1^2 + B(p_2^2 + q_2^2)\right) + O(\sqrt{|\mu|}),$$

$$\dot{p}_2 = -\omega\, q_2 + O(\sqrt{|\mu|}),\qquad \dot{q}_2 = \omega\, p_2 + O(\sqrt{|\mu|}).$$

Если отбросить члены с $O(\sqrt{|\mu|})$, то получим укороченную систему, которая вполне интегрируема и, наряду с гамильтонианом

$$H_1 = \frac{1}{2}\, q_1^2 + p_1\, sign\,\mu - \frac{1}{3}\, p_1^3 + B\, p_1(p_2^2 + q_2^2)$$

имеет второй интеграл $K_1 = p_2^2 + q_2^2$. На каждом уровне $K_1 = const$ первые два уравнения укороченной системы имеют вид

$$\dot{q}_1 = |\mu|^{1/4}\left(sign\,\mu - p_1^2 + BK_1\right),\quad \dot{p}_1 = -|\mu|^{3/4}\, q_1. \tag{2}$$

Фазовый портрет этой системы приведен на рис.2. Если $K_1 = 0$, то с.р. системы (2) со-

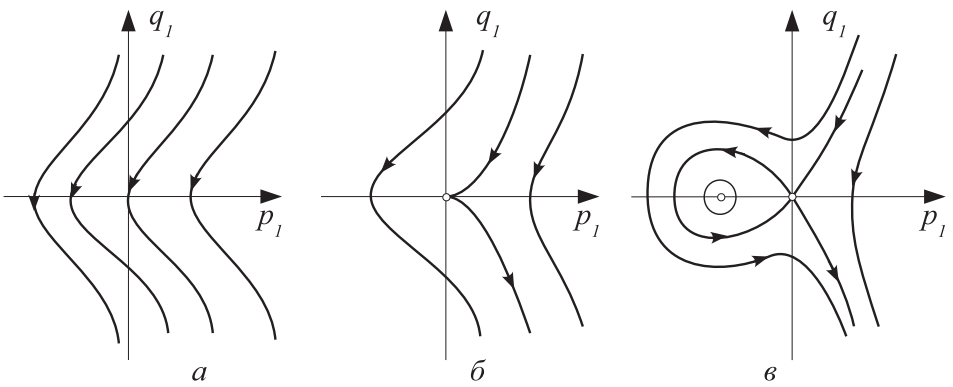


Рис.2. *а*) $\operatorname{sign}\mu + B\,K_1 < 0$; б) $\operatorname{sign}\mu + B\,K_1 = 0$; в) $\operatorname{sign}\mu + B\,K_1 > 0$;

ответствуют с.р. укороченной системы, если же $K_1 > 0$, то с.р. системы (2) соответствуют периодические решения укороченной системы. Таким образом, имеем, что при $\mu > 0$ укороченная система имеет с.р. типа седло-центр с одномерной петлей сепаратрисы, а также

при $K_1 > B^{-1}$ – два семейства периодических решений: одно эллиптического типа, другое – гиперболического, причем у периодических движений гиперболического типа устойчивое и неустойчивое многообразия совпадают. Семейства периодических движений есть и при $\mu < 0$, если B положительно.

Аналогичное поведение траекторий исходной системы в малой (зависящей от μ) окрестности O будет иметь место, если она является вполне интегрируемой. Это устанавливается с помощью методов работы [4].

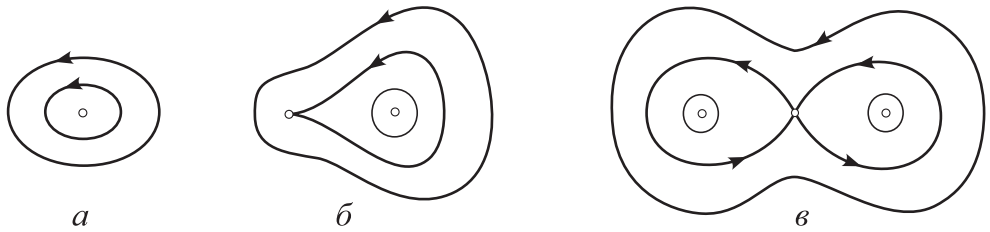


Рис.3. *а)* $\mu < 0$ или $\mu > 0$, $|B_{12}\,K_1| > \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$;
б) $\mu = 0$, $|B_{12}\,K_1| = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$; в) $\mu > 0$, $|B_{12}\,K_1| < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$

Если же исходная система неинтегрируема при малых $\mu \neq 0$, то петли седло-центра в общем случае не существует, а периодические движения гиперболического типа будут иметь изолированные гомоклинические кривые Пуанкаре.

б) В ряде задач возникает такая ситуация, когда при изменении параметра с.р. не исчезает, а происходит смена его устойчивости через появление пары нулевых корней, причем при $\mu = 0$ с.р. устойчиво. В этом случае типичный вид гамильтониана H_μ следующий :

$$H_\mu = \frac{1}{2}\,q_1^2 + \omega\,(q_2^2 + p_2^2) + B_{12}\,p_1\,(q_2^2 + p_2^2) + A_{40}\,p_1^4 +$$

$$+A_{22}\,p_1^2\,(q_2^2 + p_2^2) + A_{04}\,(q_2^2 + p_2^2)^2 + \frac{\mu}{2}\,p_1^2 + ...,$$

где многоточия означают, что не выписаны члены выше четвертой степени. При $\mu = 0$ устойчивость O определяется знаком A_{40} [3], если $A_{40} > 0$, то с.р. устойчиво, если $A_{40} < 0$, то неустойчиво. Без ограничения общности можно считать, что $A_{40} = 1/4$. В общем случае $B_{12} \neq 0$. Каноническая система запишется в следующем виде :

$$\dot{p}_1 = -q_1 + ..., \quad \dot{q}_1 = p_1\,(-\mu + p_1^2) + B_{12}\,(q_2^2 + p_2^2) + ..., \quad \dot{p}_2 = -\omega\,q_2 + ..., \quad \dot{q}_2 = \omega\,p_2 + ...$$

При $\mu < 0$ O является центром-центром, при $\mu > 0$ – седло-центром. Сделаем при $\mu \neq 0$ следующую замену $p_1 \to \sqrt{|\mu|}\,p_1$; $q_1 \to |\mu|\,q_1$; $p_2, q_2 \to |\mu|^{3/4}\,p_2$, $|\mu|^{3/4}\,q_2$. В результате придем к системе

$$\dot{p}_1 = -\sqrt{|\mu|}\,q_1 + O(\sqrt{|\mu|}),$$

$$\dot{q}_1 = \sqrt{|\mu|}\;[p_1\,(-sign\,\mu + p_1^2) + B_{12}\,(q_2^2 + p_2^2)] + O(\sqrt{|\mu|}), \tag{3}$$

$$\dot{p}_2 = -\omega\,q_2 + O(\sqrt{|\mu|}), \quad \dot{q}_2 = \omega\,p_2 + O(\sqrt{|\mu|}),$$

Укороченная система, которая получится из (3) отбрасыванием членов порядка $O(\sqrt{|\mu|})$, является вполне интегрируемой. Ее интегралами будут

$$H_1 = \frac{1}{2}\, q_1^2 - \frac{sign\,\mu}{2}\, p_1^2 + \frac{1}{4}\, p_1^4 + B_{12}\; p_1\,(q_2^2 + p_2^2),$$

$$K_1 = q_2^2 + p_2^2.$$

На каждом фиксированном уровне $K_1 = const$ первые два уравнения укороченной системы будут иметь вид

$$\dot{p_1} = -\sqrt{|\mu|}\, q_1, \quad \dot{q}_1 = \left[p_1\,(-sign\,\mu + p_1^2) + B_{12}\, K_1)\right]. \tag{4}$$

В зависимости от величины $B_{12}\, K_1$ фазовый портрет системы изображен на рис.3. Состояниям равновесия системы (4) при $K_1 = 0$ будут отвечать состояния равновесия укороченной системы, так что при $\mu > 0$ "сепаратрисной восьмерке" системы (4) будет соответствовать "сепаратрисная восьмерка" седло-центра. При $K_1 > 0$ состояниям равновесия системы (3) будут соответствовать периодические движения, поэтому при $\mu > 0$ и $|B_{12}\, K_1| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ будет три семейства периодических движений, при $|B_{12}\, K_1| > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ – одно, причем эллиптического типа.

Используя результаты [4], можно показать, что если исходная система вполне интегрируема, то в достаточно малой (зависящей от μ) окрестности O будет иметь место такая же структура, в частности, седло-центр будет иметь "сепаратрисную восьмерку".

Если же исходная система неинтегрируема, то, вообще говоря, одномерные сепаратрисы, выходящие из седло-центра, обратно в него не возвращаются, а устойчивое и неустойчивое многообразия гиперболических периодических движений не совпадут, а будут пересекаться по отдельным гомоклиническим кривым.

В заключение сделаем замечание общего характера. Со времен Пуанкаре хорошо известно, что наличие грубой гомоклинической кривой периодического движения означает неинтегрируемость гамильтоновой системы. Этот критерий явился основой для многочисленной серии работ, посвященных установлению неинтегрируемости различных конкретных систем. Существование грубой гомоклинической кривой седло-фокуса дает новый критерий неинтегрируемости. При этом, как и в предыдущем случае, иногда возможно эффективно вычислить расщепление сепаратрисных поверхностей с помощью аналога функции Мельникова.

Авторы выражают благодарность В.М. Елеонскому и Л.М.Лерману за плодотворные обсуждения.

Литература

I. Арнольд В.И. Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнении в общем эллиптическом случае.- ДАН СССР, 1961, I.I37, №2, С. 255-257.

2. Сокольский А.Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот.- ПММ, 1974, т.38, №3, с.791-799.

3. Сокольский А.Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка.- ПММ, 1977, т.41, №I, с.24-33.

4. Лерман Л.М. ,Уманский Я.Л. Структура пуассоновского действия на четырехмерном симплектическом
многообразии. II.- Методы качественной теории дифференциальных уравнений/Горьк.ун-т, 1982, с.3-18.

5. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.- М. :Наука, 1978.

6. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия.- М. :Мир, 1973.

7. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. Теория солитонов.- М.: Наука, 1980.

8. Елеонский В.М., Кулагив Н.Е., Новожилова Н.С., Силин В.П. Замечания о качественной теории вполне интегрируемых уравнений поля и сплошной среды.- Настоят.сб. с.111-115.

9. Лерман Л.М., Уманский Я.Л. О существовании петель сепаратрис в четырехмерных системах, близких к интегрируемым гамильтоновым.- ПММ, 1983, т.48, №3, с.395-401.

НИИ прикладной математики и кибернетики при ГГУ

Глава 3

Гомоклинический хаос

В этой главе представлено семь работ Л.П. Шильникова [1-7] по теории гомоклинического хаоса, т.е. сложного поведения траекторий многомерных динамических систем, вызванного существованием у них гомоклинических траекторий Пуанкаре.

В работах [1,2] рассматривается задача о структуре множества траекторий, целиком лежащих в малой окрестности грубой гомоклинической траектории Пуанкаре. Обобщение этой задачи было рассмотрено Шильниковым в работе [3], где дано описание структуры окрестности гомоклинической трубы седлового инвариантного тора. Отметим, что работа [3] намного опередила свое время: она долго оставалась незамеченной, но при этом продолжает быть весьма актуальной, в частности, в связи с исследованием задачи о диффузии Арнольда.[1] Еще в двух представленных в этой главе работах [5,6], написанных Л.П. Шильниковым вместе с его первым учеником Н.К. Гавриловым, изучаются динамические свойства и бифуркации трехмерных потоков с негрубыми гомоклиническими траекториями Пуанкаре. В этой главе также представлен обзор [7] Л.П. Шильникова, в котором, помимо описания структуры бифуркаций гомоклинических касаний, обсуждаются многие (актуальные и на сегодня) вопросы теории бифуркаций, связанные с переходом от систем Морса-Смейла к системам с хаотическим поведением траекторий.

Напомним, что *гомоклинической траекторией Пуанкаре* называется траектория, двоякоасимптотическая к седловой периодической. В случае потоков используется также термин *гомоклиническая кривая Пуанкаре* или просто гомоклиническая кривая. На рис. 3.1(а) показан пример потока в R^3, кото-

[1] Учитывая важность этой работы, мы поместили рукопись [4], которая содержит доказательство и обобщение результатов из [3]. Рукопись, по-видимому, относится к концу 60-х годов. Она не закончена и представляет собой только лишь черновой вариант предполагавшейся статьи, но приведенные там доказательства достаточно полны. Мы практически не редактировали текст (только исправили опечатки), но снабдили его подробными примечаниями.

рый имеет седловое периодическое движение L и гомоклиническую кривую Γ_0. Здесь также на рис. 3.1(b) показана окрестность U контура $L \cup \Gamma_0$, представляющая собой полноторий U_0 с приклеенной ручкой U_1: внутри полнотория лежит седловое периодическое движение L, а внутри ручки – глобальный кусок гомоклинической траектории Γ_0.

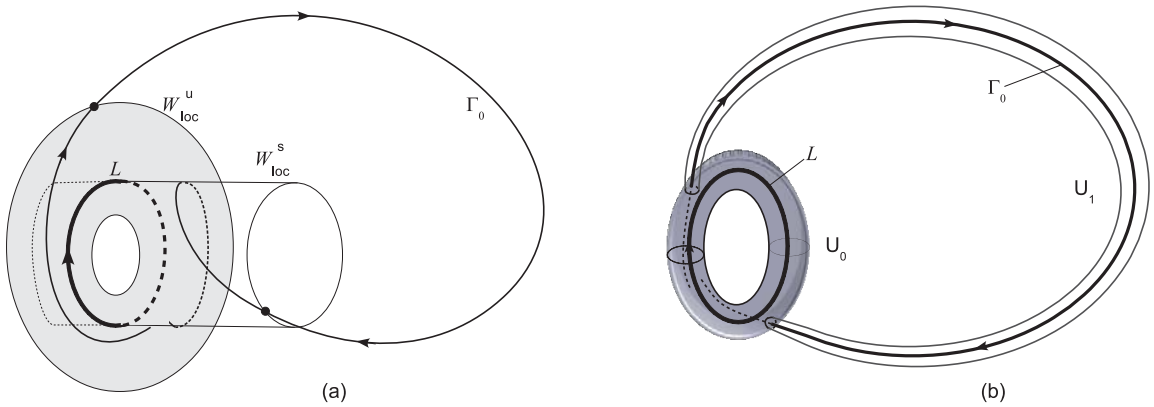


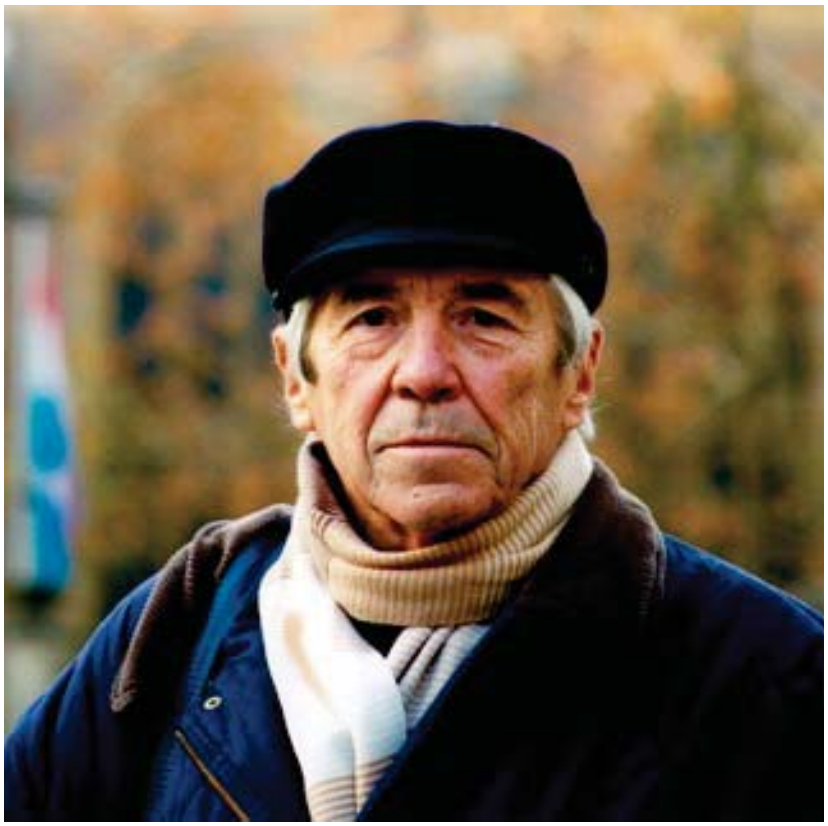
Рис. 3.1. Гомоклиническая кривая Γ_0 (a) и ее окрестность $U = U_0 \cup U_1$ (b) в случае трехмерного потока.

Пусть $(n+1)$-мерная C^1-гладкая система имеет седловое периодическое движение L, мультипликаторы которого ρ_i, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $|\rho_i| < 1, i = 1, \ldots, k$, $|\rho_i| > 1, i = k+1, \ldots, n$. Тогда хорошо известно, что у L существуют $(k+1)$-мерное устойчивое и $(n-k+1)$-мерное неустойчивое инвариантные многообразия $W^s(L)$ и $W^u(L)$, которые пересекаются трансверсально вдоль L. По определению, $W^s(L)$ и $W^u(L)$ состоят из всех траекторий, которые стремятся к L при $t \to +\infty$ и при $t \to -\infty$, соответственно. Тогда автоматически получается, что гомоклиническая траектория Γ_0 лежит в $W^s(L) \cap W^u(L)$. Если указанное пересечение многообразий трансверсально, то соответствующая гомоклиническая траектория называется *грубой*; в случае нетрансверсального пересечения говорят о *негрубой* гомоклинической траектории или о *гомоклиническом касании.*

В работе [1] доказывается, что в окрестности грубой гомоклинической траектории многомерной системы существует счетное множество седловых периодических траекторий. Здесь Шильников продолжает тематику своей статьи [8] о структуре окрестности гомоклинической петли седло-фокуса, но уже для нового объекта. Однако в работе [2] рассматривается задача уже другого рода, т.н. “задача полного описания”:

- *описать структуру множества N* ***всех*** *траекторий , целиком лежа-*

щих в достаточно малой окрестности U контура $\Gamma \cup L$.



Л.П. Шильников (Люксембург, 2007)

Шильников называет ее *задачей Пуанкаре-Биркгофа*, хотя, по существу, ни у Пуанкаре, ни у Биркгофа такой явной формулировки не было. Нужно заметить, что задача Пуанкаре-Биркгофа сама по себе оказалась одним из немногих исключительных примеров, когда задача полного описания системы со сложной динамикой допускает полное решение.[3] Основной результат работы [2] – это следующее утверждение:

- N является локально максимальным гиперболическим множеством, траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с траекториями топологической схемы Бернулли из двух символов.

Указанное соответствие было построено эффективно, т.е. фактически в [2] было показано, что

[3]В отличие, например, от полного описания сложной структуры окрестности гомоклинической петли седло-фокуса, которое, по-видимому, никогда не будет достигнуто.

- в случае потока X система $X|_N$ топологически эквивалентна надстройке над топологической схемой Бернулли из двух символов.[4]

В ряде случаев динамические системы с непрерывным временем могут допускать глобальную секущую S. Тогда изучение поведения траекторий можно сводить к исследованию диффеоморфизма последования $T : S \mapsto S$, которое часто называется также отображением Пуанкаре. Это характерно, в частности, для (неавтономных) систем, которые задаются уравнениями вида

$$\dot{x} = X(x,t), \quad x \in R^n,$$

где правые части периодически зависят от времени. Изучение динамики таких систем сводится к исследованию диффеоморфизма $T : R^n \mapsto R^n$ (отображения Пуанкаре за период). Соответствующий дискретный вариант задачи Пуанкаре-Биркгофа выглядит так. Пусть n-мерный диффеоморфизм T имеет седловую неподвижную точку O с мультипликаторами $\rho_1, \ldots, \rho_n$ такими, что $|\rho_i| < 1, i = 1, \ldots, k$, $|\rho_i| > 1, i = k+1, \ldots, n$. Тогда у точки O существуют устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия W^s и W^u (размерностей k и $n-k$ соответственно). В этом случае, если $M \in W^s \cap W^u$ – гомоклиническая точка, то её гомоклиническая траектория определяется как $\Gamma = \{T^n M\}_{n=-\infty}^{+\infty}$.

Предположим, что Γ – грубая гомоклиническая траектория, т.е. инвариантные многообразия W^s и W^u пересекаются в ее точках трансверсально, рис. 3.2a. Пусть $U = U(O \cup \Gamma)$ – достаточно малая окрестность контура $O \cup \Gamma$. Очевидно, U может быть представлена как объединение малой окрестности (шара) U_0, содержащей точку O, и некоторого конечного числа малых окрестностей тех точек траектории Γ, которые не попали в U_0, рис. 3.2b. Опять обозначим через N траекторий, целиком лежащих в U. Тогда из работы [2] вытекает следующий результат

- в случае диффеоморфизма T дискретная динамическая система $T|_N$ топологически сопряжена с некоторой топологической марковской цепью, граф которой представлен на рис. 3.3.

Собственно, возможность существования у многомерных динамических систем (грубых) гомоклинических и гетероклинических траекторий (в последнем случае имеется в виду траектория асимптотическая при $t \to -\infty$ и при

[4] О понятии надстройки над топологической марковской цепью см., например, в работе [9].

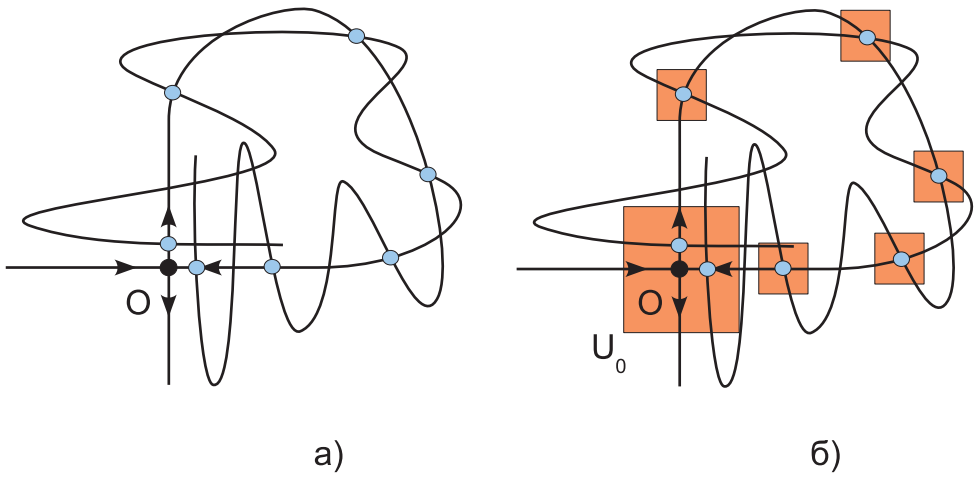


Рис. 3.2.

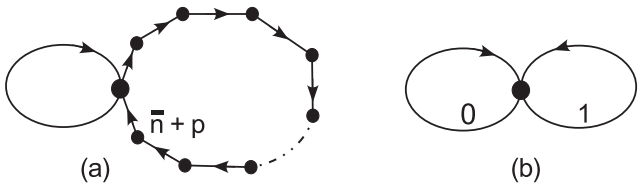


Рис. 3.3. (a) граф гомоклинической ТМЦ для диффеоморфизмов; (b) граф топологической схемы Бернулли из двух символов.

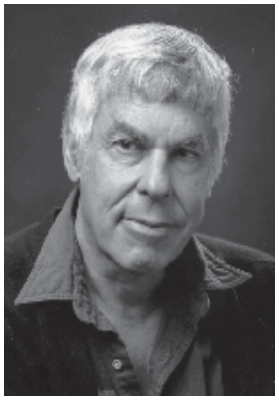
$t \to +\infty$ к разным седловым периодическим траекториям), была установлена Пуанкаре еще в конце 19 века. Этой теме был посвящен один из разделов его знаменитого мемуара [10], который был подан в жюри международного конкурса на лучшее исследование актуальной математической проблемы, приуроченного к 60-летию шведского короля Оскара II.[5] Уже тогда отмечалась (и самим Пуанкаре и, в особенности, Вейерштрассом, который был членом жюри конкурса) та особая роль, которую должны сыграть гомоклинические траектории в вопросах исследования динамики многомерных систем. Сейчас существование у системы грубой гомоклинической траектории рассматривается как один из основных критериев динамического хаоса (для гамильтоновых систем он известен как критерий неинтегрируемости по Пуанкаре).

При исследовании задачи о возмущении интегрируемых систем, Пуанкаре догадался (и построил строгое доказательство этому совершенно неожиданному в то время факту), что при малых аналитических возмущениях устойчивое и неустойчивое многообразия седловых периодических движений *могут*

[5]интересные комментарии к этому событию см. в [11].

А. Пуанкаре

Дж. Биркгоф



С. Смейл

пересекаться, не совпадая. Обнаружив такое явление, Пуанкаре пишет [10]: “Если попытаться представить себе фигуру, образованную этими двумя кривыми и их бесчисленными пересечениями, каждое из которых соответствует двояко-асимптотическому решению, то эти пересечения образуют нечто вроде решетки, ткани, сети с бесконечно тесными петлями; ни одна из двух кривых никогда не должна пересечь самое себя, но она должна навиваться на самое себя очень сложным образом, чтобы пересечь бесконечно много раз все петли сети. Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить.” На рис. 3.4(a) изображен фрагмент такой ”фигуры”, дающей некоторое представление о поведении многообразий W^s_μ и W^u_μ в случае двумерного диффеоморфизма.

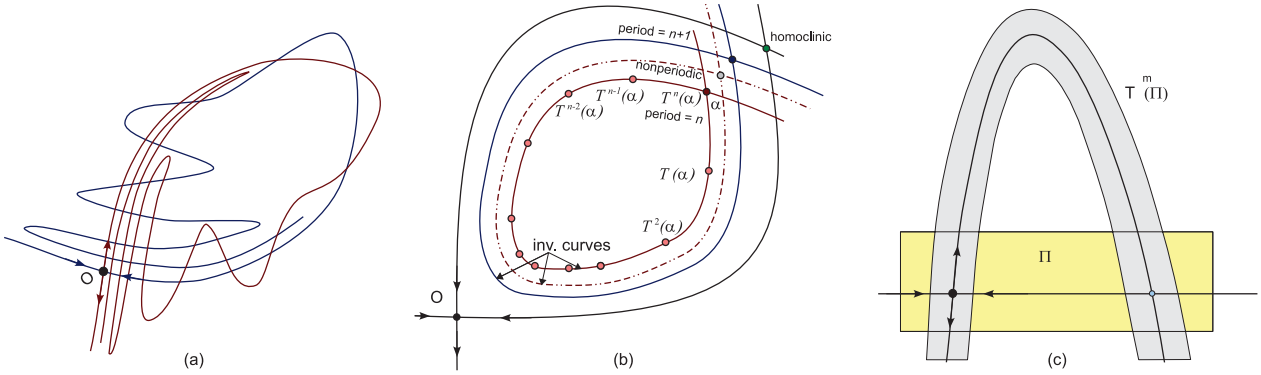


Рис. 3.4 Гомоклинические траектории от Пуанкаре до Смейла: (a) Гомоклиническая “запутанность” Пуанкаре; (b) схема метода Биркгофа: существование счетного множества инвариантных кривых, у которых точки самопересечения являются периодическими; (c) образование подковы Смейла вблизи гомоклинического пересечения.

Формально говоря, у Пуанкаре имеется только один общий результат по тематике, связанной с гомоклиническими орбитами:

- если у двумерного диффеоморфизма имеется гомоклиническая траектория, в точках которой трансверсально пересекаются устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия седловой неподвижной точки, то в N имеется еще счетное множество гомоклинических орбит.

Уже этот один результат свидетельствует о том, что множество N имеет весьма сложную структуру. Позднее, в 1935 г., Дж. Биркгоф в своем знаменитом "папском мемуаре" [12] установил для случая двумерных сохраняющих площадь аналитических отображений, что в окрестности грубой гомоклинической орбиты существует счетное множество периодических траекторий.[4] Существенное продвижение в решении задачи Пуанкаре-Биркгофа было достигнуто лишь спустя почти тридцать лет, благодаря работам Смейла и Шильникова. После их результатов существование грубой гомоклинической траектории стало одним из основных критериев сложной динамики.

Отметим, что Смейл [13] установил, опираясь на свой пример подковы, см. рис. 3.4(c), что в N существует нетривиальное гиперболическое подмножество $\tilde{\Omega}$ – тем самым, в N имеется счетное множество седловых периодических траекторий, континуум траекторий устойчивых по Пуассону и т.п.

Формально говоря, Смейл показал существование некоторого подмножества множества N, а собственно задача полного описания множества N была решена Шильниковым. Кроме того, доказательство Смейла существенно опиралось на предположение, что система вблизи седла может быть приведена гладкой заменой координат к линейному виду. Однако, как известно, это не всегда можно сделать вблизи резонансных седел (в частности, в консервативном случае). Подход Шильникова свободен от этого недостатка. Для того, чтобы преодолеть технические трудности, связанные с нелинейными седлами, Шильниковым был разработан т.н. "метод перекрестных отображений", который, как показало время, стал одним из основных универсальных методов исследования бифуркаций систем со сложной структурой.

[4]Идея метода Биркгофа – достаточно прозрачна, см. рис. 3.4(b). Малая окрестность седловой неподвижной точки допускает непрерывное слоение, состоящее из аналитических кривых (для доказательства этого нетривиального факта Биркгофом была построена теория нормальных форм для неподвижных точек двумерных, сохраняющих площадь отображений). Каждую такую локальную инвариантную кривую можно продолжить глобально. Тогда, в силу того, что сепаратрисы $W^s(O)$ и $W^u(O)$ пересекаются трансверсально, каждая глобальная инвариантная кривая будет также иметь точку самопересечения (вблизи соответствующей гомоклинической точки). Очевидно, что для счетного множества кривых такие точки самопересечения будут периодическими.

На тему задачи Пуанкаре-Биркгофа у Шильникова было еще несколько работ. Так, в статье [3] (см. также рукопись [4]) была изучена структура окрестности гомоклинических орбит к нормально-гиперболическому инвариантному тору (окрестность т.н. гомоклинической трубы инвариантного тора).[6] В работах с Л.М. Лерманом [18,19] был рассмотрен бесконечномерный случай, а также был введен аналог грубой гомоклинической кривой для неавтономных непериодических систем и изучена динамика в окрестности таких кривых.

А.Д. Морозов, М.И. Малкин, Л.П. Шильников и Л.М. Лерман на банкете, посвященном 90-летию ННГУ, 2006

Естественный ход развития исследований привел к необходимости изуче-

[6]В современной терминологии терминах задача ставится так. Рассмотрим гладкий инвариантный седловой (нормально-гиперболический) тор τ, и предположим, что его устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются трансверсально по т.н. гомоклиническому тору γ. Объединение всех итераций тора γ называется гомоклинической трубой тора τ. Дополнительно предполагается, что гомоклинический тор γ трансверсален сильно устойчивому и сильно неустойчивому инвариантным слоениям (т.н. условия сильной трансверсальности, см. [14]). Кроме того, предполагается, что тор γ проектируется на тор τ по слоям сильно устойчивого и сильно неустойчивого слоений однозначно (см. условие (5) из [3]). В [3,4] показано, что множество N точек траекторий, целиком лежащих в малой окрестности замыкания гомоклинической трубы, состоит из несчетного множества труб, кодируемых схемой Бернулли из двух символов. Поведение траекторий на этом множестве – "множестве Шильникова" – весьма нетривиально и остается предметом современных исследований [15,16,17]. Во время написания работы [3] теория нормально-гиперболических многообразий не была разработана, поэтому Шильников формулирует условия, аналогичные условиям строгой трансверсальности в виде некоторых неравенств, см. формулу (3.45) в [4].

ния гомоклинических касаний (нетрансверсальных пересечений инвариантных многообразий седловых периодических траекторий). Систематическое изучение этой задачи было начато Н.К.Гавриловым и Л.П.Шильниковым в работах [5,6]. Основная цель этих работ – исследование динамических свойств и бифуркаций трехмерных потоков с квадратичными гомоклиническими касаниями.

Для этого в [5,6] были прежде всего рассмотрены однопараметрические семейства X_μ общего положения (где μ – параметр расщепления инвариантных многообразий $W^s(O)$ и $W^u(O)$ относительно исходной гомоклинической траектории Γ_0). Работа [5] была посвящена задаче описания множества N_μ траекторий системы X_μ, целиком лежащих в малой фиксированной окрестности траектории Γ_0, а в работе [6] были рассмотрены вопросы классификации систем с гомоклиническими касаниями и их основные бифуркации.

Прежде всего были найдены условия, при выполнении которых множество N_μ имеет сложную структуру: в этом случае в N_μ содержатся нетривиальные неравномерно гиперболические подмножества, для которых было дано описание с точностью до топологической сопряженности на языке символической динамики. Кроме того, было показано, что, в отличие случая грубой гомоклинической траектории, множество N_μ может иметь совершенно разную структуру в зависимости от геометрии гомоклинического касания.

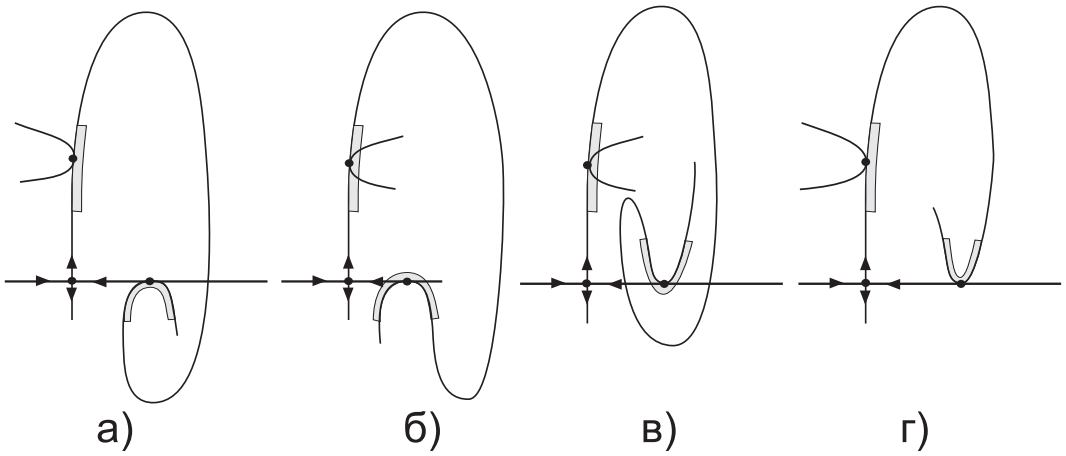


Рис. 3.5 Типы гомоклинических касаний у двумерных диффеоморфизмов в случае $\lambda > 0, \gamma > 0$.

Так, в [5,6] было выделено *три класса систем с гомоклиническими касаниями* (т.е. при $\mu = 0$), для которых множество N_0 имеет разную структуру. Этот результат мы проиллюстрируем на примере двумерных диффеоморфизмов, имеющих седловую неподвижную точку O с мультипликаторами λ, γ такими, что $0 < |\lambda| < 1 < |\gamma|$ и $|\lambda\gamma| \neq 1$, и негрубую гомоклиническую траекторию Γ_0, в точках которой многообразия $W^s(O)$ и $W^u(O)$ имеют квадратичное касание. Мы также будем полагать, что $\lambda > 0, \gamma > 0$ (хотя в [5,6] рассмотрены также

случаи, когда λ и/или γ отрицательны), и седловая величина $\sigma \equiv |\lambda\gamma|$ меньше единицы (случай $\sigma > 1$ сводится к $\sigma < 1$ переходом к обратному отображению f^{-1}). Тогда имеется 4 различных типа гомоклинических касаний, см., например, рис. 3.5: два случая гомоклинических касаний "снизу" (рис. а) и б)), и два случая касаний "сверху" (рис. в) и г)). Системы с гомоклиническим касанием "снизу" принадлежат *первому классу* – здесь множество N_0 имеет тривиальную структуру: $N_0 = \{O; \Gamma_0\}$. Системы с гомоклиническим касанием "сверху" в случае рис. 3.5в) принадлежат *второму классу*: здесь множество N_0 неравномерно гиперболично – все траектории из N_0, за исключением Γ_0, являются седловыми. Множество N_0 в этом случае допускает полное описание на языке символической динамики.[7] Диффеоморфизмы в случае рис. 3.5г) относятся к *третьему классу*. Здесь множество N_0 имеет сложную структуру: в N_0 содержатся нетривиальные гиперболические подмножества, которые, в отличие от случая диффеоморфизмов второго класса, всё N_0, вообще говоря, не исчерпывают.

Кроме того, в указанных работах Гаврилова и Шильникова было выяснено значение гомоклинических касаний различных типов для динамики систем в целом. Так, было установлено, что системы с гомоклиническими касаниями первого класса могут лежать на границе систем Морса-Смейла. При переходе через такую границу сложная структура возникает сразу – взрывом, поэтому совокупность всех соответствующих бифуркационных явлений получила наименование *гомоклинического Ω-взрыва*. В дальнейшем, эти явления были более детально изучены в других работах, см., например, [20-23]. Важность систем второго класса проявляется в том, что они могут разделять системы с гиперболической структурой и системы с негиперболическим хаотическим поведением траекторий.[8] Системы с гомоклиническими касаниями третьего класса являются своеобразными индикаторами сложности: они показывают, что не только сама система, но все близкие, имеют чрезвычайно сложную динамику.

В работе [6] были изучены основные бифуркации периодических траекторий как в рамках трансверсальных однопараметрических семейств, так и в классе семейств систем, у которых касание сохраняется. Здесь, в частности, были

[7]В отличие от случая грубой гомоклинической траектории – уже с помощью фактор-системы схемы Бернулли из трех символов; факторизация здесь возникает из-за того, что образ гомоклинической траектории Γ_0 при символическом описании получается "склеиванием" двух гомоклинических последовательностей $(\ldots, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ и $(\ldots, 0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

[8]Например, бифуркационные значения параметров, отвечающие гомоклиническим касаниям второго класса являются "последними" при рождении "полной" подковы Смейла, а также при возникновении гиперболической структуры в отображении Эно.

Л.П. Шильников с учениками: Д.В. Тураев, С.В. Гонченко, О.В. Стенькин (2011 г.)

установлены такие фундаментальные результаты, как, например, рождение устойчивых периодических траекторий при бифуркациях гомоклинических касаний (известный сейчас как “теорема о каскаде периодических стоков”), существование модулей Ω-эквивалентности (т.е., топологической эквивалентности на множестве неблуждающих траекторий) у систем с гомоклиническими касаниями третьего класса. Вообще, само понятие модуля (топологической и Ω-эквивалентности) было введено в теорию динамических систем позднее в работе Пэлиса [24]. Соответственно, результаты об Ω-модулях были доказаны также позже, например, в работах [25-28], но уже в [6] был, фактически, указан основной Ω-модуль, это инвариант

$$\theta = -\frac{\ln|\lambda|}{\ln|\gamma|}$$

В этой главе представлен также весьма интересный обзор [7] Л.П. Шильникова, в котором основное внимание уделено бифуркациям, связанным с перехо-

дом от систем Морса-Смейла к системам с нетривиальными гиперболическими множествами. Здесь описаны различные типы таких бифуркаций, когда граница систем Морса-Смейла является достижимой со стороны систем Морса-Смейла, и когда она недостижима. Примерами бифуркаций первого типа являются описанный выше гомоклинический Ω-взрыв [5,6], бифуркация букета гомоклинических петель седло-седла [29], а также некоторые бифуркации, связанные с разрушением двумерного инвариантного тора [30,31], см. главу 4. Шильников приводит также пример бифуркации второго рода, в основе которой лежит бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода устойчивой периодической траектории – тот каскад, который был впоследствии изучен Фейгенбаумом [32] и др.

Тематика гомоклинических касаний была вообще одной из приоритетных в научной деятельности Л.П. Шильникова. Им вместе с С.В. Гонченко и Д.В. Тураевым было получено в этом направлении большое число фундаментальных результатов, см., например, [33-41].

Литература к главе 3.

[1*] Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой.// ДАН СССР, 1967, т.172, 1, 54-57.

[2*] Шильников Л.П., Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа.// Мат. сб., 1967, т.74(116), 3, 378-397.

[3*] Шильников Л.П., К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора.// ДАН СССР, 1968, т.180, 2, 286-289.

[4*] Шильников Л.П., О структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора. // Рукопись

[5*] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I.// Мат. сб., 1972, т.88(130), 4, с.475-492.

[6*] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой II.// Мат. сб., 1973, т.90(132), 1, с.139-156.

[7*] Шильников Л.П., Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре.// Труды 7 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, 1977, 16с.

[8*] Шильников Л.П., Об одном случае существования счетного множества периодических движений.// ДАН СССР, 1965, т.169, 3, 558-561.

[9] Афраймович В.С., Шильников Л.П., Об особых множествах систем Морса-Смейла.// Труды ММО, 1973, т.28, 181-214.

[10] Пуанкаре А., Новые методы небесной механики.- в кн. "Избранные труды", М.: Наука, Т.1, 1971; Т.2, 1972; Т.3, 1974.

[11] Шильников Л.П., Гомоклинические орбиты: от Пуанкаре до наших дней.- в кн. *Математические события XX века.* М.: ФАЗИС, 2003.

[12] Birkhoff G.D., Nouvelles recherche sur les systemes dynamiques.// Memoire Pont. Acad. Sci. Novi. Lancaei, 1935, v.53, pp.85-216.

[13] Smale S., Diffeomorphisms with many periodic points. // Diff. and Comb. Topology, Princeton Univ. Press (1965), pp.63-80.

[14] Gelfreich V., Turaev D., Arnold Diffusion in a priori chaotic symplectic maps.// Comm. Math. Phys., 2017, 353, 507-547

[15*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях коразмерности один, приводящих к появлению счетного множества торов.// ДАН СССР, 1982, т.262, 4, 777-780.

[16] Gorodetski A., Ilyashenko Yu., Kleptsyn V., Nalsky M., Nonremovable zero Lyapunov exponent. // Functional Analysis and Its Applications, 2005, 39 (1), 21-30.

[17] Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simo C., Turaev D., Three-dimensional Hénon-like map and wild Lorenz-like attractors. // Bifurcation and Chaos, 2005, 15, 3493-3508.

[18] Лерман Л.М., Шильников Л.П., Гомоклинические структуры в бесконечномерных системах.// Сиб. мат. журнал, т.29, N 3, 1988 , 92-103.

[19] Lerman L.M., Shilnikov L.P., Homoclinic structures in nonautonomons systems: nonautonomous chaos.// Chaos, 1992, v. 2, N 3, 447-454.

[20] Newhouse S. and Palis J., Cycles and bifurcation theory. // Asterisque, 1976, 44-140.

[21] Palis J. and Takens F., Cycles and measure of bifurcation sets for two dimensional diffeomorphisms. // Inventiones Math., 1985., vol.82, 397-422.

[22] Стенькин О.В., Шильников Л.П., Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности. // Матем.сб., 1998, т.189, 4, 127-144.

[23] Гонченко С.В., Стенькин О.В., Гомоклинический омега-взрыв: интервалы гиперболичности и их границы. // Нелинейная Динамика, 2011, т.7, №1, 3-24.

[24] Palis J., A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability. // Asterisque, 1978, **51**, pp.335-346.

[25] Гонченко С.В., Модули систем с негрубыми гомоклиническими траекториями (случаи диффеоморфизмов и векторных полей).// в кн. “Методы качественной теории и теории бифуркаций”. Горький, 1989, с. 34-49.

[26] Гонченко С.В., Шильников Л.П., Инварианты Ω-сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией.// Укр. мат. журн., 1990, **42**, No.2, с. 153-159.

[27] Гонченко С.В., Шильников Л.П., О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре.// Изв.Росс.Акад.Наук, серия матем., 1992, **56**, No.6, с. 1165-1196.

[28] Gonchenko S.V., Dynamics and moduli of Ω-conjugacy of 4D-diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic orbit to a saddle-focus fixed point.// Amer.Transl.Math., 2000, **200**, No.2, pp.107-134.

[29*] Шильников Л.П., Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем.// ДАН СССР, 1969, т.182, 1, 53-56.

[30*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.// ДАН СССР, 1974, т.219, 6, 1281-1284.

[31*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем.// ПММ, 1977, т.41, 4, 618-627.

[32] Feigenbaum M.J., Quantitative universality for a class of non-linear transformations.// J. Stat. Phys., 1978, 19, 25-52.

[33] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай).// Доклады РАН, т. 329, 1993, 404-407.

[34] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П. Динамические явления в системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре.// Доклады РАН, т. 330, 2, 1993, 144-147.

[35] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., On models with non - rough Poincare homoclinic curves.// Physica D, 1993, v. 62, Nos.1-4, 1-14.

[36] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits.// Chaos, 1996, v.6, N1, 15-31.

[37] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Об областях Ньюхауса двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром.// Труды МИРАН им. Стеклова, 1997, т.216, 76-125.

[38] Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Гомоклинические касания произвольного порядка в областях Ньюхауса. // ВИНИТИ, Динамические системы, 1999, т.6, 69-128.

[39] Гонченко С.В., Шильников Л.П., Гомоклинические касания. // Монография (сборник статей), НИЦ "Регулярная и Хаотическая Динамика", Москва-Ижевск, 2007, 523 с.

[40] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. // Nonlinearity, 2008, 21(5), 923-972.

[41] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors. // Regular and Chaotic Dynamics. 2009, V. 13, 1, 136-146.

Доклады Академии наук СССР
1967, Том 172, № 2, с. 298-301

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. Шильников

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 11 III 1966)

§ 1. Рассмотрим систему $m+n+1$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Z(z), \tag{1}$$

где правые части по крайней мере дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой области $G \subset R^{m+n+1}$. Предположим, что система имеет периодическое движение $\mathfrak{L}_o$ периода 2π, характеристические показатели которого удовлетворяют следующим свойствам: за исключением одного нулевого имеется $m \geq 1$ показателей $\lambda_1, ..., \lambda_m$, имеющих отрицательные реальные части, и $n \geq 1$ показателей $\gamma_1, ..., \gamma_n$, имеющих положительные реальные части. Как известно, в этом случае существует два интегральных многообразия размерности $m+1$ и $n+1$, которые пересекаются по $\mathfrak{L}_o$. Устойчивое интегральное многообразие обозначим через $\mathfrak{M}^+$, а неустойчивое – через $\mathfrak{M}^-$.

Предположим, что существует траектория Γ_0, двоякоасимптотическая к $\mathfrak{L}_o$. Следуя Пуанкаре ([1]), указавшему на возможность существования таких движений (см. также ([6])), Γ_0 назовем гомоклинической кривой. Так как $\Gamma_0 \subset \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}^-$, то относительно этого пересечения естественно предположить, что оно является грубым, т.е.

$$\dim(W_{M^+} \cap W_{M^-}) = 1, \tag{2}$$

где через W_{M^+} и W_{M^-} обозначены касательные пространства к $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в точке $M \in \Gamma_0$.

Теорема 1 *При выполнении условия* (2) *в любой окрестности гомоклинической кривой* Γ_0 *содержится счетное число периодических движений седлового типа.*

Замечание 1. Из этой теоремы следует, что пять известных условий грубости динамических систем, высказанные Смейлом ([3]) в качестве гипотезы, не являются независимыми.

Замечание 2. Как известно, неавтономная система

$$dz/dt = f(z,t)$$

с периодической правой частью сводится к изучению автономной системы

$$\begin{aligned} dz/dt &= f(z,\theta), \\ d\theta/dt &= 1 \end{aligned}$$

с тороидальным фазовым пространством, имеющей глобальную секущую.

Биркгофом ([2]) для случая точечного отображения плоскости в плоскость, сохраняющего площадь, было доказано, что в окрестности гомоклинической точки содержится счетное множество периодических точек. Однако метод Биркгофа не может быть распространен на общий случай.

Наше доказательство теорем 1 и 2 не использует построения глобальной секущей.

З а м е ч а н и е 3. Другие случаи существования счетного множества периодических движений, связанных с негрубым пересечением интегральных многообразий, рассмотрены в работах ([10–12]). Вопросам, связанным с грубостью гомеоморфизмов, имеющих счетное множество периодических движений, посвящен ряд работ Смейла ([4,5]).

Исследованию грубости и структуры гомоклинической ячейки посвящена работа Ю.И.Неймарка и автора (см. ([7])).

§ 2. В основе доказательства теоремы 1 лежит построение точечного отображения в окрестности Γ_0 с использованием так называемого параметрического представления отображения в окрестности $\mathfrak{L}_\circ$. (О параметрическом представлении отображения см. также ([12])).

С помощью некоторой замены переменных систему (1) в окрестности $\mathfrak{L}_\circ$ можно привести к виду

$$\begin{aligned} dx/dt &= Ax + P(x,y,\theta)x, \\ dy/dt &= By + Q(x,y,\theta)y, \\ d\theta/dt &= 1, \end{aligned} \tag{3}$$

где A и B – постоянные матрицы порядка m и n, приведенные к нормальному жорданову виду, характеристические корни которых соответственно $\lambda_1, ..., \lambda_m$ и $\gamma_1, ..., \gamma_n$; P и Q – периодические функции по θ в общем случае периода 4π, обращающиеся в нуль при $x = y = 0$. Уравнения $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в этих переменных имеют соответственно вид

$$y = 0, \qquad x = 0. \tag{3.1}$$

Обозначим через S_0 поверхность

$$\|x\|^2 = r^2, \quad \|y\|^2 < r^2,$$

а через S_1

$$\|y\|^2 = r^2, \quad \|x\|^2 < r^2.$$

Л е м м а 1. *При всех достаточно малых $r > 0$ и $0 \le \theta \le 4\pi$ поверхности S_0 и S_1 являются поверхностями без контакта для траекторий системы* (3).

Из леммы 1 следует, что траектория l, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, \theta_0) \in S_0$, где $\|y_0\| \neq 0$, через время t_0 пересечет S_1 в некоторой точке $M_1(x_1, y_1, \theta_1)$. Обозначим это отображение через T_0.

Пусть

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t, x_0, y_0, \theta_0), \\ y(t) &= y(t, x_0, y_0, \theta_0), \\ \theta(t) &= t + \theta_0 \end{aligned}$$

есть уравнение l. Тогда T_0 можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= x(t_0, x_0, y_0, \theta_0), \\ y_1 &= y(t_0, x_0, y_0, \theta_0), \\ \theta_1 &= t_0 + \theta_0 \bmod \tau \ (\tau \text{ равно либо } 2\pi, \text{ либо } 4\pi), \end{aligned} \tag{5}$$

где время перехода t_0 определяется из уравнения

$$\|y(t_0, x_0, y_0, \theta_0)\|^2 = r^2.$$

Нетрудно доказать, что отображение T_0 можно записать в виде

$$\begin{array}{l} x_1 = x^{\Pi}(t_0, x_0, y_1, \theta_0), \\ y_1 = y^{\Pi}(t_0, x_0, y_1, \theta_0), \\ \theta_1 = t_0 + \theta_0 \bmod \tau, \ \|x_0\|^2 = r^2, \ \|y_1\|^2 = r^2, \end{array} \tag{6}$$

где x^{Π} и y^{Π} стремятся к нулю при $t \to \infty$ вместе со всеми первыми производными. В параметрической форме (6) отображение T_0 определено при всех x_0, y_1, удовлетворяющих условию $\|x_0\|^2 = r^2$, $\|y_1\|^2 = r^2$, и $t_0 > 0$.

Пусть $M_0^+(x_0, 0, \theta_0^+)$ и $M_1^-(0, y_1^-, \theta_1^-)$ – точки пересечения Γ_0 с S_0, S_1 и U_0, U_1 – их окрестности на S_0, S_1

$$U_0 = [M_0(x_0, y_0, \theta_0): \ \|x_0 - x_0^+\| < \varepsilon, \ \|y_0\| < \varepsilon, \ |\theta_0 - \theta_0^+| < \varepsilon],$$

$$U_1 = [M_1(x_1, y_1, \theta_1): \ \|x_1\| < \delta, \ \|y_1 - y_1^-\| < \delta, \ |\theta_1 - \theta_1^-| < \delta].$$

Пусть ε и δ таковы, что векторы x_0 и y_1 представимы в виде $x_0 = (\tilde{x}_0, x_0^{'}), y_1 = (\tilde{y}_1, y_1^{'})$, где $\tilde{x}_0$ выражается через компоненты $(m-1)$-мерного вектора $x_0^{'}$, а $\tilde{y}_1$ – через компоненты $(n-1)$-мерного вектора $y_1^{'}$.

Из теоремы о непрерывной зависимости от начальных условий следует, что по траекториям, близким к Γ_0, можно установить взаимно однозначное соответствие между некоторыми окрестностями точек M_0^+ и M_1^-. Обозначим это отображение через T_1. Пусть δ таково, что $T_1 U_1 \subset U_0$. Отображение T_1 в рассматриваемых переменных можно записать в виде

$$\begin{array}{l} \bar{x}_0^{'} = F(x_1, y_1^{'}, \theta_1), \\ \bar{y}_0 = G(x_1, y_1^{'}, \theta_1), \\ \bar{\theta}_0 = \Phi(x_1, y_1^{'}, \theta_1), \end{array} \tag{7}$$

или

$$\begin{array}{l} \Delta\bar{x}_0^{'} = A_1\, x_1 + B_1\, \Delta y_1^{'} + C_1\, \Delta\theta_1 + ..., \\ \Delta\bar{y}_0 = A_2\, x_1 + B_2\, \Delta y_1^{'} + C_2\, \Delta\theta_1 + ..., \\ \Delta\bar{\theta}_0 = a\, x_1 + b\, \Delta y_1^{'} + c\, \Delta\theta_1 + ..., \end{array} \tag{8}$$

где $\Delta\bar{x}_0^{'} = \bar{x}_0^{'} - (x_0^+)^{'}, \ \Delta y_1^{'} = y_1^{'} - (y_1^-)^{'}, \ \Delta\bar{\theta}_0 = \bar{\theta}_0 - \theta_0^+, \ \Delta\theta_1 = \theta_1 - \theta_1^-$.

Выполнение условия (2) означает, что

$$\text{rang } \|B_2 C_2\| = n. \tag{9}$$

Из леммы 1, (9) и параметрического представления (6) отображения T_0 следует, что $\bar{y}_0 \neq 0$ можно представить в виде

$$\bar{y}_0 = y^{\Pi}(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{\theta}_0), \tag{10}$$

где $\bar{t}_0$ – время перехода фазовой точки из точки $\bar{M}_0\,(\bar{x}_0, \ \bar{y}_0, \ \bar{\theta}_0) \in S_0$ в точку $\bar{M}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{\theta}_1) \in S_1$.

Рассмотрим отображение $T = T_1 T_0$. Его можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\bar{x}_0' = F(x^{\Pi}(t_0, x_0, y_1, \theta_0),\ y_1',\ t_0 + \theta_0), \\ &y^{\Pi}(\bar{t}_0, \bar{x}_0, \bar{y}_1, \bar{\theta}_0) = G(x^{\Pi}(t_0, x_0, y_1, \theta_0),\ y_1',\ t_0 + \theta_0), \\ &\bar{\theta}_0 = \Phi(x^{\Pi}(t_0, x_0, y_1, \theta_0),\ y_1',\ t_0 + \theta_0). \end{aligned} \tag{11}$$

Легко видеть, что оно определено при $\|\Delta x_0'\| < \varepsilon,\ \|\Delta y_1'\| < \delta,\ |\theta_0 - \theta_0^+|\,\varepsilon,\ |t_0 + \theta_0 - \theta_1^-| < \delta \bmod 4\pi$ и точку $(x_0',\, y_1',\, t_0,\, \theta_0)$ отображает в точку $(\bar{x}_0',\, \bar{y}_1',\, \bar{t}_0,\, \bar{\theta}_0)$. Представив t_0 в виде $t_0 = \tau k - \theta_0^+ + \theta_1^- + \tau_0$, получаем, что область определения T состоит из счетного объединения непересекающихся областей $\sigma_k = \big[\|\Delta x_0'\| < \varepsilon, \|\Delta y_1'\| < \delta, |\theta_0 - \theta_0^+| < \varepsilon,\ |\tau_0 + \Delta\bar{\theta}_0| < \delta\,\big]$, где $k = \bar{k}, \bar{k}+1, \ldots$.

Таким образом, задача о существовании счетного множества периодических движений в $U(\Gamma_0)$ свелась к задаче о нахождении неподвижных точек отображения T и его степеней.

Л е м м а 2. *Отображение T имеет счетное число неподвижных точек седлового типа.*

Неподвижные точки отображения T находятся из системы

$$\begin{aligned} &f \equiv x_0' - F(x^{\Pi},\ y_1',\ \theta_0 + t_0 + \theta_0^+) = 0, \\ &g \equiv y^{\Pi} - G(x^{\Pi},\ y_1',\ \theta_0 + t_0 + \theta_0^+) = 0, \\ &\varphi \equiv \theta_0 - \Phi(x^{\Pi},\ y_1',\ \theta_0 + t_0 + \theta_0^+) = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Используя условие

$$\lim \frac{D(f, g, \varphi)}{D(x_0',\, y_1',\, \theta_0,\, \tau_0)} = (-1)^{n-1}\,|B_2\, C_2| \neq 0, \tag{13}$$

легко доказываем, что отображение T в каждой σ_k при $k \geq \bar{k}' \geq \bar{k}$ имеет неподвижную точку M_k^*.

Линеаризовав (11) в окрестности неподвижной точки и составив характеристическое уравнение, убеждаемся, что каждая неподвижная точка является грубой точкой типа седло.

Пусть N_p – множество неподвижных точек отображения T кратности p, т. е. неподвижных точек отображения T^p. Аналогичным образом доказывается, что N^p не пусто для всех $p \geq 2$.

Из построения отображения T следует, что в любой окрестности гомоклинической кривой Γ_0 содержится счетное множество периодических движений.

§ 3. Предположим, что система (1) имеет периодические движения $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \ldots, \mathfrak{L}_n$ седлового типа и траектории $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$, где $l \geq k$ такие, что $\alpha(\Gamma_i) = \omega(\Gamma_{i+1}),\ \alpha(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_l)$, где через $\alpha(\Gamma_i)$ и $\omega(\Gamma_i)$ обозначены α- и ω-предельные множества траектории Γ_i, которыми являются указанные периодические решения. Пусть $U(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)$ есть некоторая окрестность контура $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l$, который назовем гомоклиническим контуром.

Аналогично теореме 1 доказывается

Т е о р е м а 2 *Если устойчивые и неустойчивые многообразия периодических движений пересекаются по Γ_i грубо, то в любой окрестности гомоклинического контура $U(\Gamma_1, \ldots, \Gamma_l)$ содержится счетное множество периодических движений седлового типа.*

Здесь доказательство сводится к исследованию неподвижных точек отображения T, представимого в виде произведения отображений $T_1^{(i)}\, T_0^{(i)}$, где $T_0^{(i)}$ – отображение в окрестности $\mathfrak{L}_{\mathrm{i}}$, которое строится аналогично отображению T_0 § 2, а $T_1^{(i)}$ – отображение в окрестности Γ_i, которое строится аналогично отображению T_1.

З а м е ч а н и е. Изучение отображения T позволяет установить существование инвариантного множества, аналогичного описанному Смейлом ([13]).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
10 III 1966

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

([1]) H. P o i n c a r e, Les methodes nouvelles de la mecanique celeste, 1-3, Paris, 1899.
([2]) G. D. B i r k h o f f, Nouvelles recherohes sur les svstemes dynamiques, Memoriale Ponf. Acad. Novi Lyncaei, 1935, s. 3, 1.
([3]) S. S m a l e, Bull. Am. Math. Soc, 66, 43 (1960).
([4]) S. S m a l e, Тр. Международн. симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1963.
([5]) S. S m a l e, International Congress of Mathematicians at Stockholm, 19102.
([6]) В. К. М е л ь н и к о в, Тр. Моск. матем. общ., 12, 1963.
([7]) Ю. И. Н е й м а р к, Тр. II Всесоюзн. съезда по теорет. и прикл. мех., 2, 1965, стр. 97.
([8]) Л. П. Ш и л ь н и к о в, ДАН, 143, № 2, 289 (1962).
([9]) Л. П. Ш и л ь н и к о в, Матем. сборн., 61,(104), 4, 443 (1963).
([10]) Л. П. Ш и л ь н и к о в, ДАН, 162, № 3, 558 (1965).
([11]) Ю. И. Н е й м а р к, Л. П. Ш и л ь н и к о в, ДАН, 162, № 6, 1261 (1965).
([12]) Л. П. Ш и л ь н и к о в, ДАН, 172, № 1 (1967).
([13]) S. S m a l e, Diffeomorphisms with Many Periodic Points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton Mathematical Series, № 27, 1965.

1967 Математический Сборник т.74(110),№ 3, с. 378-397

Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа

Л.П.Шильников (Горький)

§ 1. Введение

Рассмотрим систему $m+n+1$ дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = Z(z) \tag{1.1}$$

при условии, что функции $Z(z)$ определены и непрерывно-дифференцируемы в некоторой области $G \subset R^{m+n+1}$. Предположим, что система имеет периодическое движение L_0 (с периодом 2π), характеристические показатели которого удовлетворяют следующему условию: за исключением одного нулевого имеется $m > 1$ показателей $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ с отрицательными реальными частями и $n > 1$ показателей $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$ с положительными реальными частями.

Как известно, в этом случае существуют два интегральных многообразия (с размерностями $m+1$ и $n+1$), пересекающихся по L_0. Устойчивое интегральное многообразие обозначим через $\mathfrak{M}^+$, а неустойчивое – через $\mathfrak{M}^-$.

Предположим также, что существует траектория Γ_0, двоякоасимптотическая к L_0, т. е. α-предельным и ω-предельным множествами траектории Γ_0 является периодическое движение L_0. Следуя А. Пуанкаре, назовем Γ_0 *гомоклинической кривой*. Относительно пересечения $\mathfrak{M}^+$ с $\mathfrak{M}^-$ по Γ_0 предположим, что оно является грубым, т. е.

$$dim(W_M^+ \cap W_M^-) = 1 \tag{1.2}$$

где через W_M^+ и W_M^- обозначены пространства, касательные к $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в точке $M \in \Gamma_0$.

Заметим, что изучение неавтономной системы

$$\frac{dz}{dt} = f(z,t) \tag{1.3}$$

с периодической правой частью по t сводится к изучению автономной системы

$$\frac{dz}{dt} = f(z,\theta), \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{1.4}$$

имеющей глобальную секущую.

Впервые на возможность существования таких движений указал А. Пуанкаре [1]. Им же было отмечено, что существование гомоклинических кривых приводит к сложному характеру поведения траекторий.

Дальнейшее изучение динамических систем, содержащих гомоклинические кривые, связано с работами Д. Биркгофа [2]–[6], который доказал, что в окрестности гомоклинической точки отображения плоскости в плоскость, сохраняющего площадь, содержится счетное

множество периодических точек, и указал на возможность изучения структуры расширенной окрестности с помощью аппарата символической динамики.

Решению задачи Пуанкаре–Биркгофа о структуре окрестности гомоклинической кривой системы (1.1) и посвящена настоящая работа.

Прежде всего заметим, что при рассмотрении окрестности гомоклинической кривой представляет интерес изучение только тех траекторий, которые целиком лежат в ней. Для таких траекторий в достаточно малой окрестности кривой Γ_0 установлена следующая классификация:

1) Множество траекторий N^+ (N^-), асимптотических к L_0 только в положительном (отрицательном) направлении, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в одну сторону последовательностей, составленных из счетного множества символов $1, 2, ..., p, ...$

2) Множество траекторий $N^\pm$, двоякоасимптотических к L_0 (гомоклинических кривых), исключая Γ_0, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех конечных отрезков, составленных из символов $1, 2, ..., p, ...$

3) Множество траекторий N, не являющихся асимптотическими к L_0, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из счетного множества символов.

Доказывается, что множество N^+ (N^-) после введения естественной топологии становится гомеоморфным бэровскому нуль-множеству.

Для изучения типов траекторий множества N и их характера поведения строится дискретная динамическая система $(\Sigma_{\bar{k}}, T, U)$, где T – отображение некоторой локальной секущей S_0, а $\Sigma_{\bar{k}}$ – инвариантное множество отображения T с естественной топологией $\{U\}$.

Введена также еще одна дискретная динамическая система.

О п р е д е л е н и е. С и с т е м о й Б и р к г о ф а - М о р з а назовем систему (Ω_0, ω, V), точками пространства Ω_0 которой являются функции целочисленного аргумента, принимающие значения из счетного множества 0,1,2, ... с окрестностями $\{V\}$, где $V_{-l,k}$ – множество всех функций, совпадающих на отрезке $[-l, k]$, а отображение ω есть сдвиг влево на единицу: $\omega(f(n)) = f(n-1)$.

Установлено, что система $(\Sigma_{\bar{k}}, T, U)$ топологически эквивалентна системе Биркгофа - Морза.

Это позволяет утверждать, что система Биркгофа-Морза является топологическим инвариантом систем, содержащих гомоклинические кривые, на которых выполняется условие (1.2), и дать ответ на вопрос о типах движений и их взаимоотношениях аналогично работам Д. Биркгофа и М. Морза [6]–[11], связанных с изучением геодезических потоков на поверхностям отрицательной кривизны с помощью ими же созданного аппарата символической динамики.

Этот же метод позволяет изучить и структуру окрестности гомоклинического контура.

Настоящая работа является развернутым изложением заметки [19] и доклада, прочитанного автором на Международном математическом конгрессе в Москве. Автор благодарен Е. А. Леонтович-Андроновой за интерес и внимание к работе.

§ 2. Некоторые свойства решений в окрестности периодического движения L_0

Как известно, в некоторой окрестности периодического движения систему (1.1) можно привести к виду

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x, y, \theta), \qquad \frac{dy}{dt} = By + g(x, y, \theta), \qquad \frac{d\theta}{dt} = 1\,. \tag{2.1}$$

Здесь A и B – постоянные матрицы порядка m и n с действительными коэффициентами, имеющие нормальный жорданов вид, характеристические корни которых соответственно равны $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ и $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, f и g – гладкие функции, периодические по θ (с периодом τ_0, равным в общем случае 4π) и представимые в виде $f = f_1 x$, $g = g_1 y$, где f_1 и g_1 обращаются в нуль при $x = y = 0$.

В этих переменных устойчивое многообразие $\mathfrak{M}^+$ и неустойчивое многообразие $\mathfrak{M}^-$ описываются соответственно уравнениями $y = 0$, $x = 0$.

Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений ($t_0 > 0$)

$$\begin{aligned} \xi(t) &= e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\, f(\xi(\tau), \eta(\tau), \theta_0 + \tau)\, d\tau, \\ \eta(t) &= e^{B(t-t_0)}y_1 + \int\limits_{t_0}^t e^{B(t-\tau)}\, g(\xi(\tau), \eta(\tau), \theta_0 + \tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Лемма 2.1 *Существует такое $r > 0$, что система* (2.2) *в шаре $\|\xi\| \le r, \|\eta\| \le r$ при $\|x_0\| \le \frac{r}{2c}$, $\|y_1\| \le \frac{r}{2c}$, где c – некоторая положительная постоянная и $0 \le t \le t_0$, имеет единственное решение*

$$\xi(t) = \xi(t, t_0, x_0, y_1, \theta_0), \qquad \eta(t) = \eta(t, t_0, x_0, y_1, \theta_0). \tag{2.3}$$

Доказательство будем проводить методом сжатых отображений. Рассмотрим пространство H_r непрерывных функций $(\xi(t), \eta(t))$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \le t \le t_0} \|\xi(t)\| \le r, \qquad \sup_{0 \le t \le t_0} \|\eta(t)\| \le r. \tag{2.4}$$

Норму в H_r определим следующим образом

$$|\ (\xi(t), \eta(t))\ | = \sup_{0 \le t \le t_0} (\|\xi(t)\| + \|\eta(t)\|). \tag{2.5}$$

Легко видеть, что H_r является полным метрическим пространством.

Рассмотрим оператор F_t

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(t) &= e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\, f(\xi, \eta, \theta_0 + \tau)\, d\tau, \\ \bar{\eta}(t) &= e^{B(t-t_0)}y_1 + \int\limits_{t_0}^t e^{B(t-\tau)}\, g(\xi, \eta, \theta_0 + \tau)\, d\tau. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Докажем, что F_t – сжимающий в H_r, если r достаточно мало.

Предварительно заметим, что справедливы следующие оценки

$$\|e^{At}\| < e^{-\lambda t}c, \quad \|e^{B(t-t_0)}\| < e^{\gamma(t-t_0)}c \quad (t \le t_0), \tag{2.7}$$

$$\|f\| \le M\|\xi\|, \quad \|g\| \le M\|\eta\|, \tag{2.8}$$

где $\max Re\ \lambda_i < -\lambda < 0,\ \ 0 < \gamma < \min Re\ \gamma_i,\ \ c$ – некоторая константа, а $M \to 0$ при $r \to 0$.

Покажем, что $F_t H_r \subset H_r$. Используя оценки (2.7) и (2.8), получаем

$$\|\bar{\xi}(t)\| < \|x_0\| + Mc\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\,\|\xi(\tau)\|d\tau < \tfrac{r}{2} + \tfrac{Mcr}{\lambda},$$
$$\|\bar{\eta}(t)\| < \|y_1\| + Mc\int\limits_t^{t_0} e^{\gamma(t-\tau)}\,\|\eta(\tau)\|d\tau < \tfrac{r}{2} + \tfrac{Mcr}{\gamma}.$$

Очевидно, если r достаточно мало, то $\sup\|\bar{\xi}(t)\| \le r,\ \sup\|\bar{\eta}(t)\| \le r$.

Покажем, что F_t – сжимающий оператор.

$$\|\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2\| = \|\int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}(f(\xi_1,\eta_1,\theta_0+\tau) - f(\xi_2,\eta_2,\theta_0+\tau))d\tau\| \le$$
$$\le \tfrac{N(r)}{\lambda}c \sup_{0\le t\le t_0}(\|\xi_1-\xi_2\| + \|\eta_1-\eta_2\|),$$
$$\|\bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2\| = \|\int\limits_t^{t_0} e^{B(t-\tau)}(g(\xi_1,\eta_1,\theta_0+\tau) - g(\xi_2,\eta_2,\theta_0+\tau))d\tau\| \le$$
$$\le \tfrac{N(r)}{\gamma}c \sup_{0\le t\le t_0}(\|\xi_1-\xi_2\| + \|\eta_1-\eta_2\|),$$

где $N(r) = \max\limits_{\|\xi\|\le r, \|\eta\|\le r}(\|f_\xi\|,\ \|f_\eta\|,\ \|g_\xi\|,\ \|g_\eta\|)$. Так как частные производные функций f и g стремятся к нулю при $\xi \to 0,\ \eta \to 0$, то при достаточно малых r

$$|\ (\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2,\ \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_2)\ | < q\ |\ (\xi_1 - \xi_2,\ \eta_1 - \eta_2)\ | \tag{2.9}$$

где $q < 1$.

Л е м м а 2.2 *Для решения* $(\xi(t), \eta(t))$ *системы* (2.6) *при достаточно малом* r *справедливы оценки*

$$\|\xi(t)\| < re^{-\frac{\lambda}{2}t}, \qquad \|\eta(t)\| < re^{\frac{\gamma}{2}(t-t_0)}. \tag{2.10}$$

Действительно, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$\|\xi(t)\| < e^{-\lambda t}\,c\,\|x_0\| + Mc\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\,\|\xi(\tau)\|d\tau$$
$$\|\eta(t)\| < e^{\gamma(t-t_0)}\,c\,\|y_1\| + Mc\int\limits_t^{t_0} e^{\gamma(t-\tau)}\,\|\eta(\tau)\|d\tau$$

или

$$p(t) < \tfrac{r}{2} + Mc\int\limits_0^t p(\tau)\,d\tau, \qquad q(t) < \tfrac{r}{2} + Mc\int\limits_t^{t_0} q(\tau)\,d\tau,$$

где $p(t) = \|\xi(t)\|\,e^{\lambda t},\ \ q(t) = \|\eta(t)\|\,e^{-\gamma(t-t_0)}$. Используя известные интегральные неравенства, при достаточно малом r получаем оценки (2.10)

Лемма 2.3 *Справедливы оценки*

$$\left\|\frac{\partial\xi}{\partial x_0}\right\|+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial x_0}\right\|< (c+1)e^{-\frac{\lambda}{2}\,t}, \tag{2.11}$$

$$\left\|\frac{\partial\xi}{\partial y_1}\right\|+\left\|\frac{\partial\eta}{\partial y_1}\right\|< (c+1)e^{\frac{\gamma}{2}\,(t-t_0)}, \tag{2.12}$$

Чтобы получить оценку (2.11), воспользуемся методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения возьмем

$$\xi_0(t) = e^{At}\,x_0, \qquad \eta_0(t) = e^{B(t-t_0)}\,y_1.$$

Тогда, очевидно, $(k+1)$-е приближение будет записываться в виде

$$\xi_{k+1}(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\,f(\xi_k(\tau),\eta_k(\tau),\theta_0+\tau)\,d\tau,$$
$$\eta_{k+1}(t) = e^{B(t-t_0)}y_1 + \int\limits_t^{t_0} e^{B(t-\tau)}\,g(\xi_k(\tau),\eta_k(\tau),\theta_0+\tau)\,d\tau.$$

Заметим, что из метода сжатых отображений следует, что $\|\xi_k\|\le r$, $\|\eta_k\|\le r$ для любого k.

Производные $(k+1)$-го приближения по x_0 запишутся в следующем виде

$$\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_0} = e^{At} + \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)_k\frac{\partial\xi_k}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)_k\frac{\partial\eta_k}{\partial x_0}\right]d\tau,$$
$$\frac{\partial\eta_{k+1}}{\partial x_0} = \int\limits_t^{t_0} e^{B(t-\tau)}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial\xi}\right)_k\frac{\partial\xi_k}{\partial x_0} + \left(\frac{\partial g}{\partial\eta}\right)_k\frac{\partial\eta_k}{\partial x_0}\right]d\tau.$$

Оценка для нулевого приближения очевидна. Предполагая, что она верна для k-го приближения, докажем ее для $(k+1)$-го приближения. Имеем

$$\left\|\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_0}\right\|< e^{-\lambda t}c + N(r)\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\left(\left\|\frac{\partial\xi_k}{\partial x_0}\right\|+\left\|\frac{\partial\eta_k}{\partial x_0}\right\|\right)d\tau <$$
$$< e^{-\lambda t}c + N(r)(c+1)\int\limits_0^t e^{-\lambda(t-\tau)}\,e^{-\frac{\lambda}{2}\,\tau}d\tau <$$
$$< e^{-\lambda t}c + \frac{2N(r)(c+1)}{\lambda}\,e^{-\frac{\lambda}{2}\,t} < e^{-\frac{\lambda}{2}\,t}\left[c+\frac{2N(r)(c+1)}{\lambda}\right],$$
$$\left\|\frac{\partial\eta_{k+1}}{\partial x_0}\right\|= N(r)\int\limits_t^{t_0} e^{\gamma(t-\tau)}\left(\left\|\frac{\partial\xi_k}{\partial x_0}\right\|+\left\|\frac{\partial\eta_k}{\partial x_0}\right\|\right)d\tau <$$
$$< N(r)(c+1)e^{-\frac{\lambda}{2}\,t}\int\limits_t^{t_0} e^{\gamma(t-\tau)}\,e^{-\frac{\lambda}{2}\,(\tau-t)}d\tau < \frac{N(r)(c+1)}{\gamma+\frac{\lambda}{2}}\,e^{-\frac{\lambda}{2}\,t}.$$

Поэтому при достаточно малом r

$$\left\|\frac{\partial\xi_{k+1}}{\partial x_0}\right\|< \left(c+\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{\lambda}{2}\,t}, \qquad \left\|\frac{\partial\eta_{k+1}}{\partial x_0}\right\|< \frac{1}{2}\,e^{-\frac{\lambda}{2}\,t}$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем оценку (2.11). Аналогично доказывается оценка (2.12).

Рассмотрим функции

$$\xi(t) = \xi(t, t_0, x_0, y_1, \theta_0), \quad \eta(t) = \eta(t, t_0, x_0, y_1, \theta_0), \qquad \theta(t) = \theta_0 + t, \tag{2.13}$$

где ξ и η – решение системы интегральных уравнений. Непосредственно проверкой убеждаемся, что (2.13) есть решение системы (2.1), проходящее при $t = 0$ через точку $M_0(x_0, \eta(0, t_0, x_0, y_1, \theta_0), \theta_0)$, а при $t = t_0$ – через точку $M_1(\xi(t_0, t_0, x_0, y_1, \theta_0), y_1, \theta_1)$, где $\theta_1 = \theta_0 + t_0 (\mathrm{mod}\ \tau_0)$.

§ 3. Построение отображений в окрестности L_0

Пусть $M_0^+(x_0^+, 0, \theta_0^+)$ и $M_1^-(0, y_1^-, \theta_1^-)$ – точки, лежащие в достаточно малой r_0-окрестности периодического движения. Обозначим через S_0 и S_1 секущие плоскости $\theta = \theta_0^+$, $\theta = \theta_1^-$. Пусть

$$U_0 = [M_0(x_0, y_0),\ \|x_0 - x_0^+\| \le \varepsilon_0,\ \|y_0\| \le \varepsilon_0],$$

$$U_1 = [M_1(x_1, y_1),\ \|x_1\| \le \varepsilon_1,\ \|y_1 - y_1^-\| \le \varepsilon_1]$$

– окрестности точек M_0^+ и M_1^- на S_0 и S_1. Так как $M_0^+ \in \mathfrak{M}^+$, то всегда можно указать такое достаточно малое ε_0, чтобы в рассматриваемой окрестности L_0 траектории пересекали U_0 только один раз. Аналогичное ограничение наложим на ε_1.

Пусть

$$x(t) = x(t, x_0, y_0, \theta_0^+), \qquad y(t) = y(t, x_0, y_0, \theta_0^+), \qquad \theta(t) = \theta_0^+ + t$$

есть уравнения траектории L, проходящей при $t = 0$ через точку $M_0(x_0, y_0) \in U_0$. Отображение U_0 на U_1 по траекториям L обозначим через T_0. Очевидно, оно будет записываться в следующем виде:

$$x_1 = x(t_0, x_0, y_0, \theta_0^+), \qquad y_1 = y(t_0, x_0, y_0, \theta_0^+), \qquad \theta_1 = \theta_0 + t_0 \ (\mathrm{mod}\ \tau_0) \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. $T_0 U_0 \bigcap U_1 \ne \emptyset$.

Обозначим через $U_{x_0},\ U_{y_0},\ U_{x_1},\ U_{y_1}$ множества

$$\|x_0 - x_0^+\| \le \varepsilon_0, \qquad \|y_0\| \le \varepsilon_0, \qquad \|x_1\| \le \varepsilon_1, \qquad \|y_1 - y_1^-\| \le \varepsilon_1.$$

Пусть $x_0 \in U_{x_0},\ y_1 \in U_{y_1}$. Рассмотрим решение системы (2.1)

$$x(t) = \xi(t, t_0, x_0, y_1, \theta_0^+),\ y(t) = \eta(t, t_0, x_0, y_1, \theta_0^+),\ \theta(t) = \theta_0 + t\ (0 \le t \le t_0) \tag{3.2}$$

Как следует из леммы 2.2, ξ и η равномерно стремятся к нулю при $t_0 \to \infty$. Следовательно, существует достаточно большое $t_0' > 0$ такое, что при всех $t_0 \ge t_0'$ будут выполняться условия $\|x(t_0)\| \le \varepsilon_1,\ \|y_0\| \le \varepsilon_0$.

Поэтому для всех $t_0 > t_0'$, удовлетворяющих условию $\theta_1^- = \theta_0 + t_0 \ (\mathrm{mod}\, \tau_0)$, получим, что концы решения (3.2) лежат в U_0 и U_1. Следовательно, $T_0 U_0 \bigcap U_1 \ne \emptyset$.

Отображение $T_0 : (x_0, y_0) \to (x_1, y_1)$, используя представление решения (3.2), можно также записать в виде

$$x_1 = \xi(t_0, t_0, x_0, y_1, \theta_0^+), \quad y_0 = \eta(0, t_0, x_0, y_1, \theta_0^+), \quad \theta_1^- = \theta_0^+ + t_0 \tag{3.3}$$

или (используя представление $t_0 = k\tau_0 - \theta_0^+ + \theta_1^-$)

$$x_1 = \tilde{\xi}(x_0, y_1, k), \quad y_0 = \tilde{\eta}(x_0, y_1, k) \tag{3.4}$$

где $k = \bar{k}, \bar{k}+1, \ldots$.

С л е д с т в и е *Если* $\varepsilon_0 \to 0$, $\varepsilon_1 \to 0$, *то* $\bar{k} \to \infty$.

Пусть σ_k^0 - образ $U_{x_0} \times U_{y_1}$ при отображении $(x_0, y_1) \to (x_0, \tilde{\eta}(x_0, y_1, k))$, а σ_k^1 - образ $U_{x_0} \times U_{y_1}$ при отображении $(x_0, y_1) \to (\tilde{\xi}(x_0, y_1, k), y_1)$.

Л е м м а 3.2. *Область определения* $\sigma^0(\bar{k})$ *отображения* T_0 *состоит из счетного объединения непересекающихся областей* σ_k^0.

При каждом фиксированном $k \geq \bar{k}$ концевыми точками решения (3.2) являются точки $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = \tilde{\eta}(x_0, y_1, k)$ и $M_1(x_1, y_1)$, где $x_1 = \tilde{\xi}(x_0, y_1, k)$.

Эти точки лежат в U_0 и U_1 и, когда x_0 пробегает U_{x_0} , а y_1 пробегает U_{y_1} , заполняют множества σ_k^0 и σ_k^1 . Так как траектории не пересекаются, то $\sigma_{k_1}^i \cap \sigma_{k_2}^i = \emptyset$ при $k_1 \neq k_2$ $(i = 0, 1)$.

Поэтому область определения отображения T_0 есть $\sigma^0(\bar{k}) = \bigcup\limits_{\bar{k}}^{\infty} \sigma_k^0$, а областью значений будет область $\sigma^1(\bar{k}) = \bigcup\limits_{\bar{k}}^{\infty} \sigma_k^1$, причем $T_0 \sigma_k^0 = \sigma_k^1$.

Л е м м а 3.3. *Справедливы оценки*

$$\|\tilde{\xi}\| + \|\tilde{\eta}\| + \|\tilde{\xi}_{x_0}\| + \|\tilde{\xi}_{y_1}\| + \|\tilde{\eta}_{x_0}\| + \|\tilde{\eta}_{y_1}\| < \bar{L} e^{-\nu k}, \tag{3.5}$$

где $\bar{L}$ *и* ν *– некоторые положительные постоянные.*

Доказательство следует из лемм 2.2 и 2.3.

Из построения σ_k^0 следует, что σ_k^0 расслаивается на m-мерные поверхности

$$y_0 = \tilde{\eta}(x_0, y_1, k) \tag{3.6}$$

зависящие от $y_1 \in U_{y_1}$.

Аналогично, σ_k^1 расслаивается на n-мерные поверхности

$$x_1 = \tilde{\xi}(x_0, y_1, k) \tag{3.7}$$

Введем также еще два отображения в окрестности L_0. Рассмотрим отображение S_1 на себя по траекториям системы (2.1). Обозначим его через T_0^-. Рассмотрим $(T_0^-)^{k_1}$, где k_1 – некоторое целое число. $(T_0^-)^{k_1}$запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x\,(\theta_1^- + k_1\tau_0,\, x_1,\, y_1,\, \theta_1^-) = x^-(x_1,\, y_1), \\ \bar{y}_1 &= y\,(\theta_1^- + k_1\tau_0,\, x_1,\, y_1,\, \theta_1^-) = y^-(x_1,\, y_1). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Используя представление решения в виде (3.2), $(T_0^-)^{k_1}$ можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \xi^-\,(x_1,\, \bar{y}_1) = \xi\,(\theta_1^- + k_1\tau_0,\, \theta_1^- + k_1\tau_0,\, x_1,\, \bar{y}_1,\, \theta_1^-), \\ y_1 &= \eta^-\,(x_1,\, \bar{y}_1) = \eta\,(0,\, \theta_1^- + k_1\tau_0,\, x_1,\, \bar{y}_1,\, \theta_1^-). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Непосредственно с ним связано отображение T^- :

$$\bar{x}_1 = \xi^-(x_1, y_1), \quad \bar{y}_1 = \eta^-(x_1, y_1), \tag{3.10}$$

определенное в шаре $E_1 : \|x_1\| \le r_0,\ \|y_1\| \le r_0$. Легко видеть, что T^- при достаточно большом k_1 является сжимающим и

$$\|\xi^-\| + \|\eta^-\| + \|\xi^-_{x_1}\| + \|\xi^-_{y_1}\| + \|\eta^-_{x_1}\| + \|\eta^-_{y_1}\| < \bar{L}_1 e^{-\nu_1 k_1} < q < 1. \tag{3.11}$$

Рассмотрим также отображение S_0 на себя, которое обозначим через T_0^+ . Тогда $(T_0^+)^{k_1}$ запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= x\,(\theta_0^+ + k_1\tau_0,\, x_0,\, y_0,\, \theta_0^+) = x^+(x_0,\, y_0), \\ \bar{y}_0 &= y\,(\theta_0^+ + k_1\tau_0,\, x_0,\, y_0,\, \theta_0^+) = y^+(x_0,\, y_0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

или

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \xi^+\,(x_0,\, \bar{y}_0) = \xi\,(\theta_0^+ + k_1\tau_0,\, \theta_0^+ + k_1\tau_0,\, x_0,\, \bar{y}_0,\, \theta_0^+), \\ y_0 &= \eta^+\,(x_0,\, \bar{y}_0) = \eta\,(0,\, \theta_0^+ + k_1\tau_0,\, x_0,\, \bar{y}_0,\, \theta_0^+). \end{aligned} \tag{3.13}$$

С $(T_0^+)^{k_1}$ также свяжем отображение T^+:

$$\bar{x}_0 = \xi^+(x_0, y_0), \quad \bar{y}_0 = \eta^+(x_0, y_0), \tag{3.14}$$

определенное в шаре $E_0 : \|x_0\| \le r_0,\ \|y_0\| \le r_0$. Отображение T^+ при достаточно большом k_1 также является сжимающим. При этом имеет место оценка, аналогичная оценке (3.11).

§ 4. Построение отображения T_1 в окрестности Γ_0

По предположению, у системы (1.1) существует гомоклиническая кривая Γ_0. Без ограничения общности можно считать, что точки $M_0^+(x_0^+, 0, \theta_0^+)$ и $M_1^-(0, y_1^-, \theta_1^-)$ есть точки пересечения Γ_0 с S_0 и S_1. Как известно, между некоторыми достаточно малыми окрестностями точек M_1^- и M_0^+ на S_1 и S_0 можно установить взаимно однозначное соответствие, которое обозначим через T_1.
В переменных x, y уравнения T_1 можно записать в виде

$$\bar{x}_0 = F(x_1, y_1), \quad \bar{y}_0 = G(x_1, y_1), \tag{4.1}$$

Так как, по предположению, $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ пересекаются по Γ_0 грубо, то ранг матрицы $G_{y_1}(0, y_1^+)$ равен n. Из этого следует, что последнее уравнение при $\|\bar{y}_0\| \le \varepsilon_0^{'},\ \|x_1\| \le \varepsilon_1^{'},\ \|y_1 - y_1^-\| \le \varepsilon_1^{'}$ разрешимо относительно y_1

$$y_1 = G^{'}(x_1, \bar{y}_0), \tag{4.2}$$

где $\varepsilon_0^{'}$ и $\varepsilon_1^{'}$ – некоторые достаточно малые постоянные, а уравнение образа поверхности $x_1 = 0$ представимо в виде

$$x_0 = \tilde{\varphi}(y_0), \tag{4.3}$$

где

$$\|\tilde{\varphi}_{y_0}\| < \|F_{y_1}(0, y_1^-)\ G_{y_1}^{-1}(0, y_1^-)\| + 1 = \tilde{L} + 1.$$

Рассмотрим пространство H_ρ гладких функций $x_1 = \varphi_1(y_1)$, определенных при $\|y_1 - y_1^-\| \le \varepsilon_1^{'}$ и удовлетворяющих условию $\sup(\|\varphi_1(y_1)\| + \|\varphi^{'}(y_1)\|) < \rho$.

Легко видеть, что при достаточно малом $\rho = \rho_0$ образ любой поверхности $x_1 = \varphi_1(y_1)$ из H_{ρ_0} при $\|y_0\| \le \varepsilon^{''}$ ($\varepsilon^{''}$ достаточно мало, $0 < \varepsilon^{''} \le \varepsilon_0^{'}$), будет иметь уравнение $x_0 = \varphi_0(y_0)$, где $\|\varphi_0^{'}(y_0)\| \le \tilde{L} + 1$.

§ 5. Построение отображения $T = T_1\,T_0$ и его свойства

Будем считать, что ε_1 из § 3 совпадает с $\varepsilon_1^{'}$, указанным в § 4. Тогда при $\bar{k}_1 \geq \bar{k}$, где $\bar{k}_1$ – некоторое достаточно большое целое число, $T_0\sigma^0(\bar{k}_1) = \sigma^1(\bar{k}_1)$ будет принадлежать области определения отображения T_1. Следовательно, $T = T_1\,T_0$ определено на $\sigma^0(\bar{k}_1)$ и отображает $\sigma^0(\bar{k}_1)$ на некоторую окрестность точки M_0^+.

Теорема 5.1. *Существует такое достаточно большое число $\bar{k}_2 \geq \bar{k}_1$, что для всех $i, j \geq \bar{k}_2$*

$$\sigma_i^0 \cap T\,\sigma_j^0 \neq \emptyset \tag{5.1}$$

В силу (3.5) , поверхности (3.7) , на которые расслаиваются области σ_k^1, при всех k (начиная с некоторого) будут лежать в H_{ρ_0}. Так как $\|\,\bar{\eta}_{x_0}\,\| \to 0$ при $k \to \infty$, то можно указать такое $\bar{k}_2 \geq \bar{k}_1$, что при всех $i,\, j \geq \bar{k}_2$ все m-мерные поверхности $y_0 = \tilde{\eta}(x_0, y_1, i)$ будут находиться в общем положении с n-мерными образами поверхностей $x_1 = \tilde{\xi}(x_0, y_1, j)$. Следовательно, $\sigma_i^0 \cap T_1\sigma_j^1 \neq \emptyset$ или $\sigma_1^0 \cap T\,\sigma_j^0 \neq \emptyset$.

Отображение T в переменных x_0, y_0 будет записываться в виде

$$\bar{x}_0 = F(\tilde{x}(x_0, y_0, j),\, \tilde{y}(x_0, y_0, j)), \quad \bar{y}_0 = G(\tilde{x}(x_0, y_0, j),\, \tilde{y}(x_0, y_0, j)), \tag{5.2}$$

где через $\tilde{x}\,(x_0,\, y_0,\, j)$, $\tilde{y}\,(x_0,\, y_0,\, j)$ обозначены формулы (3.1) отображения T_0 с $t = j\tau_0 + \theta_1^- - \theta_0^+$.

Пусть $\bar{M}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in \sigma_i^0 \bigcap T\sigma_j^0$ и $\bar{M}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = T_0\bar{M}_0$. В переменных (x_0, y_1) отображение T будет иметь следующий вид:

$$\bar{x}_0 = F(\tilde{\xi}(x_0, y_1, j), y_1), \;\; \tilde{\eta}(\bar{x}_0, \bar{y}_1, i) = G(\tilde{\xi}(x_0, y_1, j), y_1). \tag{5.3}$$

Из соотношений

$$d\bar{x}_0 = F_{x_1}\tilde{\xi}_{x_0}dx_0 + [F_{x_1}\tilde{\xi}_{y_1} + F_{y_1}]\,dy_1,$$
$$\tilde{\eta}_{\bar{x}_0}d\bar{x}_0 + \tilde{\eta}_{\bar{y}_1}d\bar{y}_1 = G_{x_1}\tilde{\xi}_{x_0}dx_0 + [G_{x_1}\tilde{\xi}_{y_1} + G_{y_1}]\,dy_1,$$

следует, что при $i, j \geq \bar{k}_3 \geq \bar{k}_2$ справедлива оценка

$$\|\bar{x}_0^{'} - \bar{x}_0^{''}\| + \|y_1^{'} - y_1^{''}\| < N(e^{-j\nu}\|x_0^{'} - x_0^{''}\| + e^{-i\nu}\|\bar{y}_1^{'} - \bar{y}_1^{''}\|), \tag{5.4}$$

а отображение T представимо в виде

$$\bar{x}_0 = \tilde{F}(x_0, \bar{y}_1, i, j), \quad y_1 = \tilde{G}(x_0, \bar{y}_1, i, j), \tag{5.5}$$

где $\|\tilde{F}_{x_0}\| + \|\tilde{F}_{\bar{y}_1}\| + \|\tilde{G}_{x_0}\| + \|\tilde{G}_{\bar{y}_1}\| < q < 1$. Рассмотрим связанные с T отображения $T_{ij}(x_0, \bar{y}_1 \to (\bar{x}_0, y_1)$. Из доказательства теоремы 5.1 следует, что T_{ij} определено на множестве $\|x_0 - x_0^+\| \leq \varepsilon_0$, $\|\bar{y}_1 - y_1^-\| \leq \varepsilon_1$ (обозначим его через $E_j^0 \times E_i^1$) и $E_j^0 \times E_i^1$ отображает в шар

$$E_i^0 \times E_j^1 : \|\bar{x}_0 - x_0^+\| \leq \varepsilon_0, \;\; \|y_1 - y_1^-\| \leq \varepsilon_1$$

Здесь индексы i, j введены для того, чтобы подчеркнуть связь T_{ij} с отображением $\sigma_j^0 \to \sigma_i^0$.

Рассмотрим также отображение $T_1(T_0^-)^{k_1}$, где $(T_0^-)^{k_1}$ введено в § 3. Легко видеть, что оно определено и записывается в виде

$$\bar{x}_0 = F(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \qquad \tilde{x}_1 = x^-(x_1, y_1),$$

$$\bar{y}_0 = G(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \qquad \tilde{y}_1 = y^-(x_1, y_1)$$

или

$$\bar{x}_0 = F(\tilde{\xi}(x_1, \tilde{y}_1, j), \tilde{y}_1), \qquad \eta(\bar{x}_0, \bar{y}_1, i) = G(\tilde{\xi}^-(x_1, \tilde{y}_1, j), \tilde{y}_1).$$

Как и T, отображение $T_1(T_0^-)^{k_1}$ можно записать в виде

$$\bar{x}_0 = \tilde{F}^-(x_1, \bar{y}_1, i, k_1), \quad \tilde{y}_1 = \tilde{G}^-(x_1, \bar{y}_1, i, k_1), \tag{5.6}$$

где производные функций $\tilde{F}^-$ и $\tilde{G}^-$ удовлетворяют условию

$$\|\tilde{F}^-_{x_1}\| + \|\tilde{F}^-_{\bar{y}_1}\| + \|\tilde{G}^-_{x_1}\| + \|\tilde{G}^-_{\bar{y}_1}\| < q < 1 \tag{5.7}$$

при достаточно большом k_1 и $i \geq \bar{k}_4 \geq \bar{k}_2$. Связанные с $T_1\,(T_0^-)^{k_1}$ отображения $(x_1,\, \bar{y}_1) \to (\bar{x}_0,\, \bar{y}_1)$, которые обозначим через T_i, определены на множестве $E^-_{r_0 i} : \|x_1\| \leq r_0,\ \|\bar{y}_1 - y_1^-\| \leq \varepsilon_1$ и отображают его в множество $E^-_{ir_0}$:$\|\bar{x}_0 - x_0^+\| \leq \varepsilon_0,\ \|\tilde{y}_1\| \leq r_0$. Аналогично строится отображение $(T_0^+)^{k_1} T_1 : \sigma^1(\bar{k}_2) \to E_0$, которое запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= \xi^+(\tilde{x}_1,\ \bar{y}_0), \quad \tilde{x}_0 = F(\tilde{\xi}(x_0, y_1, j), y_1) \\ \tilde{y}_0 &= \eta^+(\tilde{x}_1,\ \bar{y}_0), \quad \tilde{y}_0 = G(\tilde{\xi}(x_0, y_1, j), y_1), \end{aligned}$$

или

$$\bar{x}_0 = \xi^+(F(\tilde{\xi}, y_1), \bar{y}_0), \qquad \eta^+(F(\tilde{\xi}, y_1), \bar{y}_0) = G(\tilde{\xi}, y_1).$$

или

$$\bar{x}_0 = \tilde{F}^+(x_0, \bar{y}_0, k_1, j), \qquad y_1 = \tilde{G}^+(x_0, \bar{y}_0, k_1, j), \tag{5.8}$$

при достаточно большом k_1 и $j \geq \bar{k}_5 \geq \bar{k}_2$. Связанные с этим отображением отображения: $(x_0, \bar{y}_0) \to (\bar{x}_0, y_1)$ обозначим через T_j^+. Отображения T_j^+ определены на множестве $E^+_{jr_0}$:$\|x_0 - x_0^+\| \leq \varepsilon_0,\ \|\bar{y}_0\| \leq r_0$ и отображают $E^+_{jr_0}$ в $E^+_{r_0 j}$:$\|x_0\| \leq r_0,\ \|y_1 - y_1^-\| \leq \varepsilon_1$. Для норм производных функций $\tilde{F}^+$ и $\tilde{G}^+$ при достаточно большом числе k_1 и $j \geq \bar{k}_6 \geq \bar{k}_5$ справедлива оценка, аналогичная оценке (5.7).

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что неподвижные точки отображения T_{ii} есть неподвижные точки отображения T. Так как каждое T_{ii} имеет неподвижную точку, то отсюда следует существование счетного множества неподвижных точек отображения T. Аналогично устанавливается существование счетного множества периодических точек произвольной кратности.

Однако, для изучения траекторий, лежащих целиком в окрестности гомоклинической кривой, и, в особенности, для изучения инвариантного множества отображения T представляет интерес подход, связанный с изучением неподвижных точек в прямом произведении пространств, который позволяет единообразно доказывать существование как периодических, так и непериодических траекторий.

§ 6. Некоторые теоремы о существовании неподвижных точек в прямом произведении пространств

Пусть имеется счетное множество полных метрических пространств X_i с метрикой $\rho_i(x_i^{'}, x_i^{''})$, где $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Пусть также заданы операторы $\mathcal{A}_i$ такие, что

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_i X_i \subset X_{i+1}, \\ \rho_{i+1}(\mathcal{A}_i x_i^{'}, \mathcal{A}_i x_i^{''}) < q \rho_i(x_i^{'}, x_i^{''}) \end{gathered}$$

Предположим, что

$$\sup_{x_i^{'},x_i^{''}\in X_i} \rho_i(x_i^{'},x_i^{''}) < d < \infty.$$

Рассмотрим прямое произведение $X = \prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} X_i$. Метрику в X введем следующим образом:

$$\rho(x_i^{'},x_i^{''}) = \sup_{-\infty<i<+\infty} \rho_i(x_i^{'},x_i^{''})$$

где $x = (..., x_{-i}, ..., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}$, действующий в X:

$$x \xrightarrow{\mathcal{A}} \bar{x},$$

где $\bar{x} = (..., \bar{x}_{-i}, ..., \bar{x}_{-1}, \bar{x}_0, \bar{x}_1, ...)$, $\bar{x}_i = \mathcal{A}_{i-1}x_{i-1}$

Теорема 6.1. *Оператор $\mathcal{A}$ – сжимающий, если $q < 1$.*

Действительно, $\rho_{i+1}(\mathcal{A}_i x_i^{'}, \mathcal{A}_i x_i^{''}) < q\rho_i(x_i^{'}, x_i^{''}) \leq q\rho(x^{'}, x^{''})$.
Следовательно, $\sup\limits_i \rho_{i+1}(\mathcal{A}_i x_i^{'}, \mathcal{A}_i x_i^{''}) = \rho(\bar{x}^{'}, \bar{x}^{''}) < q\rho(x^{'}, x^{''})$

Пусть $x^* = (..., x_{-i}^*, ..., x_{-1}^*, x_0^*, x_1^*, ...)$ – неподвижная точка оператора $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}x^* = x^*$. Записав это равенство по компонентам, получим, что только одна последовательность $(..., x_{-i}^*, ..., x_0^*, ...x_i^*, ...)$ удовлетворяет условиям

$$x_{i+1}^* = \mathcal{A}_i x_i^* \quad (i = 0, \pm 1, ...).$$

Рассмотрим две последовательности полных метрических пространств : X_i и Y_i $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Предположим, что

$$\sup_{x_i^{'},x_i^{''}\in X_i} \rho_{X_i}(x_i^{'},x_i^{''}) < d, \quad \sup_{y_i^{'},y_i^{''}\in Y_i} \rho_{Y_i}(y_i^{'},y_i^{''}) < d.$$

Пусть на $X_i \times Y_{i+1}$ заданы операторы $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_{i+1}$ такие, что $\mathcal{A}_i(X_i \times Y_{i+1}) \subset X_{i+1}$, $\mathcal{B}_{i+1}(X_i \times Y_{i+1}) \subset Y_i$. Предположим, что

$$\rho_{X_{i+1}}(\bar{x}_{i+1}^{'}, \bar{x}_{i+1}^{''}) < \frac{q}{2}(\rho_{X_i}(x_i^{'}, x_i^{''}) + \rho_{Y_{i+1}}(y_{i+1}^{'}, y_{i+1}^{''})),$$

$$\rho_{Y_i}(\bar{y}_i^{'}, \bar{y}_i^{''}) < \frac{q}{2}(\rho_{X_i}(x_i^{'}, x_i^{''}) + \rho_{Y_{i+1}}(y_{i+1}^{'}, y_{i+1}^{''})),$$

где $\bar{x}_{i+1} = \mathcal{A}_i(x_i, y_{i+1})$, $\bar{y}_i = \mathcal{B}_{i+1}(x_i, y_{i+1})$.

Рассмотрим пространство $Z = \prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} (X_i \times Y_i)$. Метрику в Z введем следующим образом:

$$\rho_Z((x^{'}, y^{'}), (x^{''}, y^{''})) = \sup_i(\rho_{X_i}(x_i^{'}, x_i^{''}) + \rho_{Y_i}(y_i^{'}, y_i^{''})),$$

где $z = (x, y) = (..., (x_{-1}, y_{-1}), (x_0, y_0), (x_1, y_1), ...)$. Введем оператор $C^{1,-1}$,

$$z = (x, y) \xrightarrow{C^{1,-1}} \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$$

Аналогично доказывается

Теорема 6.2. *Оператор $C^{1,-1}$ при $q < 1$ – сжимающий.*

Пусть $z^* = (x^*, y^*)$ - неподвижная точка оператора $C^{1,-1}$. Записывая в координатах, получим, что существует только одна последовательность

$$(..., (x^*_{-1}, y^*_{-1}),\ (x^*_0, y^*_0),\ (x^*_1, y^*_1), ...),$$

удовлетворяющая условиям

$$x^*_{i+1} = \mathcal{A}_i(x^*_i, y^*_{i+1}), \quad y^*_{i+1} = \mathcal{B}_{i+1}(x^*_i, y^*_i).$$

З а м е ч а н и е 1. Пусть $C_1^{1,-1}$ и $C_2^{1,-1}$ – два оператора, удовлетворяющие на Z тем же условиям, что и $C^{1,-1}$. Предположим, что

$$\sup \|C_1^{1,-1} z - C_2^{1,-1} z\| \le \beta$$

Тогда легко видеть, что $\|z_1^* - z_2^*\| \le \frac{\beta}{1-q}$, где $z_1^* = C_1^{1,-1} z_1^*, \quad z_2^* = C_2^{1,-1} z_2^*$.

З а м е ч а н и е 2. Последовательности точечных отображений применительно к изучению движений неавтономной системы с непериодической правой частью впервые рассматривались Ю. И. Неймарком [18]. Им же были доказаны теоремы о сохранении устойчивых и седловых траекторий последовательности точечных отображений при малых их возмущениях в предположении, что эти отображения в устойчивом случае действуют в полном линейном нормированном пространстве, а в седловом случае – в гильбертовом пространстве.

§ 7. Классификация асимптотических движений к L_0, целиком лежащих в достаточно малой окрестности Γ_0

Множество траекторий, целиком лежащих в достаточно малой окрестности Γ_0, можно разбить на два множества. К первому множеству отнесем траектории, асимптотические к L_0 хотя бы в одну сторону. Этому множеству принадлежит, в частности, гомоклиническая кривая Γ_0. Остальные траектории отнесем ко второму множеству, которое обозначим через N.

Рассмотрим множество N^- траекторий, асимптотических к L_0 только при $t \to -\infty$ и целиком лежащих в достаточно малой окрестности Γ_0 . Пусть траектория $L \in N^-$ и точка $M(0, y_1)$ есть точка пересечения L с U_1. Так как L целиком лежит в окрестности Γ_0, то при $t \to +\infty$ она будет пересекать S_0 только в точках $\sigma^0(\bar{k}_0)$, где $\bar{k}_0 \ge \max\limits_{1 \le i \le 6}\{\bar{k}_i\}$ и стремится к бесконечности с уменьшением окрестности Γ_0. Обозначим через $M_0^1, M_0^2, \dots, M_0^i, \dots$ точки пересечения L с $\sigma^0(\bar{k}_0)$ в порядке возрастания времени. Так как $\sigma^0_{j_1} \cap \sigma^0_{j_2} = \emptyset$ при $j_1 \ne j_2$, то для каждого i имеем $M_0^i \in \sigma^0_{j_i}$, где $j_i \ge \bar{k}_0$.

Следовательно, мы показали, что каждой траектории $L \in N^-$ соответствует бесконечная последовательность $(j_1, j_2, \dots, j_i, \dots)$.

Пусть (x_0^i, y_0^i) – координаты точки $M_0^i \in \sigma^0_{j_i}$, (x_1^i, y_1^i) – координаты точки $M_1^i = T_0 M_0^i$, (x_1^{-i}, y_1^{-i}) – координаты точки $M_1^{-i} = (T_0^-)^{-k_1 i} M$, где $i = 0, 1, 2, \dots$. Связь между координатами указанных точек L будет следующая:

$$\begin{array}{ll} x_0^{i+1} = F(x_1^i, y_1^i), & y_0^{i+1} = G(x_1^i, y_1^i), \\ x_1^i = \tilde{x}(x_0^i, y_0^i), & y_1^i = \tilde{y}(x_0^i, y_0^i), \\ x_1^{-i} = x^-(x_1^{-i-1}, y_1^{-i-1}), & y_1^{-i} = y^-(x_1^{-i-1}, y_1^{-i-1}). \end{array} \tag{7.1}$$

или

$$\begin{array}{ll} x_0^{i+1} = \tilde{F}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i), & y_1^i = \tilde{G}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i), \\ x_0^1 = \tilde{F}(x_1^0, y_1^1, j_1, k_1), & y_1^0 = \tilde{G}(x_1^0, y_1^1, j_1, k_1), \\ x_1^{-i} = \xi^-(x_1^{-i-1}, y_1^{-i}), & y_1^{-i-1} = \eta^-(x_1^{-i-1}, y_1^{-i}). \end{array} \tag{7.2}$$

Докажем, что каждой последовательности $(j_1, j_2, \dots, j_i, \dots)$, где $j_i \geq \bar{k}_0$, соответствует траектория, принадлежащая N^-.

Рассмотрим две последовательности отображений $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{B}_i$, где

$$\mathcal{A}_i : x_0^{i+1} = \tilde{F}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i),$$

$$\mathcal{A}_0 : \bar{x}_0^1 = \tilde{F}^-(x_1^0, y_1^1, j_1, k_1),$$

$$\mathcal{A}_{-i-1} : \bar{x}_1^{-i} = \xi^-(x_1^{-i-1}, y_1^{-i}),$$

$$\mathcal{B}_{i+1} : \bar{y}_1^i = \tilde{G}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i),$$

$$\mathcal{B}_1 : \bar{y}_1^0 = \tilde{G}^-(x_1^0, y_1^1, j_1, k_1),$$

$$\mathcal{B}_{-i} : \bar{y}_1^{-i-1} = \eta^-(x_1^{-i-1}, y_1^{-i}).$$

Нетрудно видеть, что эти отображения удовлетворяют условиям теоремы 6.2. Следовательно, существует единственная последовательность, удовлетворяющая условиям (7.2). Так как траектория, проходящая через найденные точки, остается в окрестности L_0 при $t \to -\infty$, то отсюда следует, что она лежит на интегральном многообразии $\mathfrak{M}^-$.

В множестве N^- введем следующую топологию: под окрестностью $\sigma^-_{j_1,\dots,j_l}$ траектории L, пересекающей последовательно $\sigma^0_{j_1}, \dots, \sigma^0_{j_l}$ будем понимать множество всех траекторий из N^-, пересекающих последовательно $\sigma^0_{j_1}, \dots, \sigma^0_{j_l}$. Выше было показано, что N^- находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных последовательностей $(j_1, \dots, j_i, \dots)$,$j_i \geq \bar{k}_0$, которые обозначим через $\Omega^-_{\bar{k}_0}$. Это соответствие является гомеоморфным, если в $\Omega^-_{\bar{k}_0}$ под окрестностью последовательности $(j_1, \dots, j_i, \dots)$ понимать множество всех последовательностей, у которых первые l символов совпадают с отрезком $(j_1, \dots, j_l)$. Так как Ω^-_1 есть бэровское нуль-множество и $\Omega^-_{\bar{k}_0}$ гомеоморфно Ω^-_1, то N^- гомеоморфно Ω^-_1.

Таким образом, доказана

Теорема 7.1. *Множество траекторий N^- находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в одну сторону последовательностей, составленных из натуральных чисел, и после введения топологии $\{\sigma^-_{j_1,\dots,j_l}\}$, гомеоморфно бэровскому нуль-множеству.*

Аналогично доказываются следующие теоремы.

Теорема 7.2. *Множество траекторий N^+, асимптотических к L_0 только в положительном направлении, гомеоморфно бэровскому нуль-множеству.*

Теорема 7.3. *Множество траекторий $N^\pm$, двоякоасимптотических к L_0 (исключая Γ_0), находится во взаимно однозначном соответствии с множеством отрезков $(j_1, \dots, j_\beta)$, где $\beta \geq 1$ и j_i – натуральные числа.*

Следствие. *Множество гомоклинических кривых периодического движения L_0 счетно.*

§ 8. Структура инвариантного множества отображения T

Из построения T_0 и T_1 следует, что траектории из N, где N – множество траекторий, не являющихся асимптотическими к L_0 и целиком лежащих в некоторой достаточно малой окрестности Γ_0, будут пересекать S_0 в точках $\sigma_0(\bar{k}_0)$. Пусть L – одна из траекторий множества N и $(..., M_0^{-i}, ..., M_0^0, ..., M_0^i)$ – точки пересечения L с $\sigma_0(\bar{k}_0)$, расположенные в порядке возрастании времени. Так как $M_0^i \in \sigma_{j_i}^0$ для каждого i, то каждой траектории $L \in N$ соответствует единственная бесконечная в обе стороны последовательность $(..., j_{-i}, ..., j_0, ..., j_i, ...)$ из символов $j_i \geq \bar{k}_0$. Пусть (x_0^i, y_0^i) – координаты точки M_0^i, а (x_1^i, y_1^i) – координаты точки $M_1^i = T_0 M_0^i$. Так как $M_0^{i+1} = T\, M_0^i$, то

$$x_0^{i+1} = \tilde{F}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i), \qquad y_1^i = \tilde{G}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i). \tag{8.1}$$

Доказательство обратного утверждения (о том, что каждой бесконечной в обе стороны последовательности $\alpha = (..., j_{-i}, ..., j_0, ..., j_i, ...)$ соответствует единственная траектория, принадлежащая N) сводится к доказательству существования неподвижной точки отображения $C_\alpha^{1,-1} = (..., (\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_1), ..., (\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}), ...)$, где

$$\mathcal{A}_i : \bar{x}_0^{i+1} = \tilde{F}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i),$$

$$\mathcal{B}_{i+1} : \bar{y}_1^i = \tilde{G}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}, j_i).$$

Легко видеть, что условия теоремы 6.2 выполнены и отображение $C_\alpha^{1,-1}$ имеет единственную неподвижную точку. Следовательно, существует единственная последовательность $(..., (x_0^0, y_1^0), ..., (x_0^i, y_1^i), ...)$, удовлетворяющая условиям (8.1).

Таким образом, доказана

Теорема 8.1. *Траектории множества N находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из счетного множества символов.*

Обозначим через $\Sigma_{\bar{k}_0}$ множество точек из $\sigma_0(\bar{k}_0)$, через которые проходят траектории из N, и пусть $\sigma_{j_{-k},...,j_0,...,j_l}$ - множество точек из $\sigma_{j_0}^0$, через которые проходят траектории рассматриваемой динамической системы, пересекающие в положительном направлении последовательно множества $\sigma_{j_1}^0, ..., \sigma_{j_l}^0$, а в отрицательном – множества $\sigma_{j_{-1}}^0, ..., \sigma_{j_{-k}}^0$. Рассмотрим некоторую бесконечную в обе стороны последовательность $\alpha = (..., j_{-l}, ..., \hat{j}_0, ..., j_l, ...)$, $j_k \geq \bar{k}_0$. Ей отвечает единственная траектория, проходящая через $..., \sigma_{j_{-l}}^0, ..., \hat{\sigma}_{j_0}^0, ..., \sigma_{J_l}, ...$ Следовательно,

$$\sigma_{j_0} \cap \sigma_{j_0 j_1} \cap \sigma_{j_{-1} j_0 j_1} \cap ... \tag{8.2}$$

имеет единственную точку. Поэтому получаем, что $\Sigma_{\bar{k}_0}$ построено с помощью A-операции и

$$\Sigma_{\bar{k}_0} = \bigcup (\sigma_{j_0} \cap \sigma_{j_0 j_1} \cap \sigma_{j_{-1} j_0 j_1} \cap ...) \tag{8.3}$$

по всевозможным различным последовательностям с указанным символом j_0.

Следствие 1. *Так как каждые два слагаемых в* (8.3) *пересекаются по пустому множеству, то согласно теореме Н. Н. Лузина* (см. [20]) *получаем, что $\Sigma_{\bar{k}_0}$ есть борелевское множество. Легко видеть, что N, а следовательно, и $\Sigma_{\bar{k}_0}$ имеют мощность континуума.*

С л е д с т в и е 2. *Диаметр множества $\sigma_{j_{-l},\dots,j_0,\dots,j_l}$ стремится к нулю при $l \to \infty$.*

С л е д с т в и е 3. *Траектории множества N орбитно-неустойчивы.*

Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$(\Sigma_{\bar{k}_0}, T, U_{j_{-k},\dots,j_0,\dots,j_l}), \quad \text{где } U_{j_{-k},\dots,j_0,\dots,j_l} = \sigma_{j_{-k},\dots,j_0,\dots,j_l} \bigcap \Sigma_{\bar{k}_0}.$$

Введем также динамическую дискретную систему $(\Sigma_{\bar{k}_0}, \omega, V_{-k,l})$. Точками пространства $\Sigma_{\bar{k}_0}$ являются функции $f(n)$ целочисленного аргумента, принимающие значения из счетного множества $\bar{k}_0, \bar{k}_0 + 1, \dots$. Окрестностью $V_{-k,l}$ точки $f(n)$ назовем множество всех функции $g(n)$, для которых $g(n) = f(n)$, где $-k \le n \le l$. В качестве отображения в $\Sigma_{\bar{k}_0}$ возьмем сдвиг ω вправо на единицу, т.е. $\omega(f(n)) = f(n-1)$.

Обозначим через η следующее соответствие: каждой точке $M_0 \in \Sigma_{\bar{k}_0}$ с $T^i M_0 \in \sigma_{j_i^0}$ $(i = 0, \pm 1, \dots)$ поставим в соответствие $f(n)$, удовлетворяющую условию $f(n) = j_n$. Легко видеть, что η – гомеоморфизм и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_{\bar{k}_0} & \xrightarrow{T} & \Sigma_{\bar{k}_0} \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \Omega_{\bar{k}_0} & \xrightarrow{\omega} & \Omega_{\bar{k}_0} \end{array} \tag{8.4}$$

коммутативна.

В свою очередь, $(\Omega_{\bar{k}_0}, \omega, V_{-k,l})$ для любого $\bar{k}_0$ гомеоморфна системе Биркгофа-Морза $(\Omega_0, \omega, V_{-k,l})$.

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 8.2. *Система $(\Sigma_{\bar{k}_0}, T, U_{j_{-k},\dots,j_l})$ топологически эквивалентна системе Биркгофа-Морза.*

Сформулируем ряд утверждений, которые легко доказываются для системы Биркгофа-Морза, а, следовательно, и для системы $(\Sigma_{\bar{k}_0}, T, U_{j_{-k},\dots,j_l})$.

1. Множество периодических точек всюду плотно в $\Sigma_{\bar{k}_0}$.

2. У любой периодической точки существует счетное множество гомоклинических кривых.

3. У любого конечного набора периодических точек существует счетное множество гомоклинических контуров [1].

4. Существуют траектории, всюду плотные в $\Sigma_{\bar{k}_0}$, т.е. система $(\Sigma_{\bar{k}_0}, T, U_{j_{-k},\dots,j_l})$ транзитивна и т. д..

Пусть S' и S'' две динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями, порядки которых в общем случае различны. Предположим, что они имеют периодические движения L_0' и L_0'', у которых есть гомоклинические кривые Γ_0' и Γ_0'', по которым соответствующие интегральные многообразия пересекаются грубо. Тогда можно построить две системы: (Σ', T', U') и (Σ'', T'', U'').

Т е о р е м а 8.3. *Динамические системы (Σ', T', U') и (Σ'', T'', U'') топологически эквивалентны.*

[1] Определение гомоклинического контура дано в § 9.

Доказательство вытекает из диаграмм

$$\begin{tikzcd} \Sigma' \arrow[r, "T'"] \arrow[d, "\eta'"'] & \Sigma' \arrow[d, "\eta'"] \\ \Omega' \arrow[r, "\omega"'] & \Omega' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Sigma'' \arrow[r, "T''"] \arrow[d, "\eta''"'] & \Sigma'' \arrow[d, "\eta''"] \\ \Omega'' \arrow[r, "\omega"'] & \Omega'' \end{tikzcd} \tag{8.5}$$

$$\begin{tikzcd} \Omega' \arrow[r] & \Omega_0 \arrow[dl] \\ \Omega'' \arrow[u] & \end{tikzcd} \tag{8.6}$$

Рассмотрим систему

$$\dot{z} = Z(z) + p\,(z) \tag{8.7}$$

где $p(z) \in C^1$. Нетрудно видеть, что если $p(z)$ достаточно мало по норме в C^1, система (8.7) будет иметь периодическое движение $L_0^{'}$, близкое к L_0, и гомоклиническую кривую $\Gamma_0^{'}$ периодического движения $L_0^{'}$, близкую к Γ_0, по которой без касания пересекаются интегральные многообразия. Обозначим через $(\tilde{\Sigma}, \tilde{T}, \tilde{U})$ соответствующую системе (8.7) дискретную динамическую систему.

О п р е д е л е н и е. Систему $(\Sigma_{\bar{k}_0}, T, U_{j_{-k},\dots,j_l})$ будем называть г р у б о й, если по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при любом $\|p\,(z)\|_{C^1} < \delta$ существует гомеоморфизм ξ множества $\Sigma_{\bar{k}_0}$ на $\tilde{\Sigma}$, удовлетворяющий условиям:

1) соответствующие друг другу при гомеоморфизме ξ точки находятся на расстоянии, меньшем ε,

2) диаграмма

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{\bar{k}_0} \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\xi"'] & \Sigma_{\bar{k}_0} \arrow[d, "\xi"] \\ \tilde{\Sigma} \arrow[r, "\tilde{T}"] & \tilde{\Sigma} \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Т е о р е м а 8.4. *Система $(\Sigma_{\bar{k}_0}, T, U)$ при достаточно большом $\bar{k}_0$ является грубой.*

Из близости $L_0^{'}$ к L_0, $\Gamma_0^{'}$ к Γ_0 отображений $\tilde{T}_0$ и $\tilde{T}_1$ к T_0 и T_1 и замечания теоремы 6.2 следует, что при достаточно большом $\bar{k}_0$, каждой бесконечной последовательности $(\dots, j_{-l}, \dots, j_0, \dots, j_l, \dots)$ с начальным символом j_0 будут соответствовать точки $M_0 \in \Sigma_{\bar{k}_0}$ и $\tilde{M}_0 \in \tilde{\Sigma}_{\bar{k}_0}$, отстоящие на расстоянии, меньшем ε, при достаточно малом $p\,(z)$. Соответствие $M_0 \to \tilde{M}_0$ обозначим через ξ. Из диаграмм типа (8.4) и диаграммы

$$\begin{tikzcd} \Sigma_{\bar{k}_0} \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\xi"'] & \Omega_{\bar{k}_0} \arrow[dl, "\bar{\eta}"] \\ \tilde{\Sigma}_{\bar{k}_0} & \end{tikzcd}$$

следует, что ξ есть топологическая эквивалентность.

З а м е ч а н и е. Диффеоморфизмы со свойствами, близкими к T, но приводящие к рассмотрению символической динамической системы с конечным числом символов, изучались С. Смейлом [15]–[17].

§ 9. Структура окрестности гомоклинического контура

Предположим, что система (1.1) имеет q периодических движений седлового типа. Обозначим их через $L_1^0, ..., L_q^0$. Предположим также, что существует q траекторий $\Gamma_1^0, ..., \Gamma_q^0$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\omega(\Gamma_q^0) = \alpha(\Gamma_1^0) = L_1^0 \omega(\Gamma_i^0) = \alpha(\Gamma_{i+1}^0) = L_{i+1}^0, \tag{9.1}$$

где через $\omega(\Gamma)$ и $\alpha(\Gamma)$ обозначены предельные множества траектории Γ.

Совокупность траекторий $(\Gamma_1^0, ..., \Gamma_q^0)$ в этом случае назовем г о м о к л и н и ч е с к и м к о н т у р о м. Предположим, что гомоклинический контур является грубым, т. е.

$$\dim(W_{iM}^- \cap W_{i+1\ M}^+) = 1 \tag{9.2}$$

где через W_{iM}^- и $W_{i+1\ M}^+$ обозначены касательные пространства к $\mathfrak{M}_i^-$ и $\mathfrak{M}_{i+1}^+$ в точке $M \in \Gamma_i^0$.

Заметим, что для выполнения условия (9.2) необходимо, чтобы устойчивые многообразия периодических движений имели одинаковую размерность [14].

Как и выше, в окрестностях указанных периодических движений могут быть построены отображения $T_{01}, T_{02}, ..., T_{0q}$, аналогичные T_0, а также отображения, аналогичные (3.9) и (3.13). В окрестностях же $\Gamma_1^0, ..., \Gamma_q^0$ могут быть построены отображения $T_{12}, T_{23}, ..., T_{q1}$, аналогичные T_1.

Относительно траекторий, целиком лежащих в некоторой достаточно малой окрестности гомоклинического контура, устанавливаются следующие теоремы.

Т е о р е м а 9.1. *Множество траекторий, асимптотических к периодическому движению L_i только в одну сторону, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в одну сторону последовательностей, составленных из векторов $(j^1, j^2, ..., j^q)$, где j^i – натуральные числа.*

Т е о р е м а 9.2. *Множество траекторий, асимптотических к периодическому движению L_i, при $t \to -\infty$ и к L_j при $t \to +\infty$, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех отрезков $(j^1, ..., j^p)$, где $p \equiv j - i - 1\ (mod\ q)$ и j^i – натуральные числа.*

С л е д с т в и е 1. *Каждое периодическое движение L_i имеет счетное множество гомоклинических кривых.*

С л е д с т в и е 2. *В любой окрестности гомоклинического контура имеется счетное множество гомоклинических контуров.*

Т е о р е м а 9.3. *Множество траекторий, не являющихся асимптотическими к периодическим движениям, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из векторов $(j^1, j^2, ..., j^q)$, где j^i – целые числа.*

Рассмотрим следующую дискретную динамическую систему $(\Omega_{\vec{k}_0}, \omega, V)$: точками пространства $\Omega_{\vec{k}_0}$ являются вектор-функции $\vec{f}(n) = (f_1(n), ..., f_q(n))$, где $f_i(n)$ - функция целочисленного аргумента, принимающая значения из счетного множества $\bar{k}_0, \bar{k}_0 + 1, ...$; $\vec{k}_0 =$

$(\bar{k}_0, ..., \bar{k}_0)$; окрестность $V_{-k,l}$ точки $\vec{f}(n)$ состоит из всех $\vec{g}(n)$, удовлетворяющих условию $\vec{g}(n) = \vec{f}(n)$ $(-k \leq n \leq l)$; ω - сдвиг: $\omega\vec{f}(n) = \vec{f}(n-1)$.

Систему $(\Omega_\theta, \omega, V)$, где $\theta = (0, ..., 0)$ назовем системой Биркгофа - Морза типа q.

Аналогичным образом можно построить дискретную динамическую систему $(\Sigma_{\vec{k}_0}, T, U)$, где $T = T_{1q}T_{0q}$, ... , $T_{21}T_{01}$, топологически эквивалентную системе Биркгофа - Морза типа q.

Для системы $(\Sigma_{\vec{k}_0}, T, U)$ справедливы теоремы предыдущего параграфа.

(Поступила в редакцию 6/11 1967 г.)

Литература

I. H. P o i n c a r e, Les methodes nouvells de la mecanique celeste, III, Paris, 1899.
2. G. B i r k h o f f, On the periodic motions of dynamics, Acta math., 50 (1927), 359-379.
3. G. B i r k h o f f and P. S m i t h, Structure analysis of surface transformations, J. math, pures et appl., 9 (1928), 345-379.
4. G. B i r k h o f f, Sur l'existence de regions d'instabilite en dynamiques, Ann. Inst, Henri Poincare, 2 (1932), 369-386.
5. G. B i r k h o f f, Nouvelles recherches sur les systemes dynamiques, Mem. Pont Acad. Sci. Novi Lyncaci, 1 (1935), 85-216.
6. Д. Б и р к г о ф, Динамические системы, Физматгиз, Москва - Ленинград, 1941.
7. M. M o r s e, A one-to-one representation of geodesics on surface of negative curvature, Amer. J. Math., 42 (1920), 33-51.
8. M. M o r s e, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature. Trans. Amer. Aalh. Soc, 22, 1 (1921), 84-100.
9. M. M o r s e, A fundamental class of geodesics on any closed surface of negative curvature, Amer. J. Math., 42 (1920), 33-51.
10. M. M o r s e, Instability and transitivity, J. math, pures et appl., 14 (1935), 49-71.
11. V. M o r s e and G. Hedlund, Symbolic Dynamics, Amer. J. Math., 60 (1938), 815-866.
12. А. А. А н д р о н о в и Л. С. П о н т р я г и и, Грубые системы, ДАН СССР, 14, №5 (1937), 247-250.
13. Е. А. Л е о н т о в и ч и А. Г. М а й е р, О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории, ДАН СССР, 103, № 4 (1955), 557-560.
14. S. S m a l e, Morse inequalities for a dynamical system, Bull. Amer. Math. Soc, 66 [1966), 43-49.
15. С.С м е й л, Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, 1963, т. 2, 365-366.
16. S. S m a l e, Dynamical systems and the topological conjugacy problem for diffeomorphism, Proc. of the International Congress of Math., Uppsala, 1963, 490-496.
17. S. S m a l e, Diffeomorphisms with many periodic points. Differential and combinatorial topology, Princeton, 1965.
18. Ю. И. Н е й м а р к, Труды II Всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, 1965, т. 2, стр. 97.
19. Л. П. Ш и л ь н и к о в, О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой, ДАН СССР, 172, № 2 (1967), 298-301.
20 Ф. Х а у с д о р ф, Теория множеств, Москва, ОНТИ, 1937.

Доклады Академии наук СССР
1968, Том 180, № 2, с. 286-289

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

Л.П. Шильников

К ВОПРОСУ О СТРУКТУРЕ ОКРЕСТНОСТИ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 06 VII 1967)

1. Пусть T – гладкое взаимно однозначное отображение, определенное в некоторой области G эвклидова пространства R^{l+m+n}. Предположим, что T имеет инвариантный тор τ размерности l и что в окрестности τ T может быть записано в виде

$$\bar{x} = A(\theta)(x + f(x, y, \theta)), \quad \bar{y} = B(\theta)(y + g(x, y, \theta)), \quad \bar{\theta} = \Psi(\theta), \tag{1}$$

где $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_l)$; A, B, f, g, $\Psi \in C^1$ и периодические по θ с периодом $1 = (1, ..., 1)$, $f = g = f_x = f_y = f_\theta, = g = g_x = g_y = g_\theta = 0$ при $x = y = 0$.

Предположим, что

$$\max \|A(\theta)\| < 1, \quad \max \|B^{-1}(\theta)\| < 1. \tag{2}$$

Условия (2) означают, что тор τ является седловым. Можно показать, что при условиях

$$\bar{p} = \max \|A(\theta)\| \max \ \|\Psi_0^{-1}\| < 1, \quad \bar{\bar{p}} = \max \|B^{-1}(\theta)\| \max \ \|\Psi_0\| < 1 \tag{3}$$

устойчивые и неустойчивые многообразия τ, которые обозначим через $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, в достаточно малой окрестности τ записываются в виде $y = R^+(x, \theta)$, $x = R^-(y, \theta)$, где $R^+, R^- \in C^1$ и $R^+(0, \theta) = R^-(0, \theta) = R^+_x(0, \theta) = R^+_\theta(0, \theta) = R^-_y(0, \theta) = R^-_\theta(0, \theta) = 0$. Всюду ниже предполагается, что условия (3) выполнены и $f(0, y, \theta) = g(x, 0, \theta) \equiv 0$.

Предположим, что $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ пересекаются по l-мерному многообразию γ типа тор, которое будем называть гомоклиническим тором [1]. Относительно этого пересечения предположим, что оно является грубым, т. е. для произвольной точки $M \in \gamma$

$$\dim(W^+_M \cap W^-_M) = l, \tag{4}$$

где через W^+_M и W^-_M обозначены касательные пространства к $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в точке M.

Наличие гомоклинического тора γ приводит к существованию счетного множества гомоклинических торов $\gamma_i = T^i\gamma$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Последовательность $\Gamma_0 = (..., \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_i, ...)$ мы будем называть гомоклинической трубой тора τ.

[1] Существование пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий торов седлового типа рассматривал В. И. Арнольд ([4]) в задаче, иллюстрирующей эффект неустойчивости консервативных систем с многими степенями свободы

Пусть $\gamma^- = T^{-p_1}\gamma$ и $\gamma^+ = T^{p_2}\gamma$ – два гомоклинических тора трубы Γ_0, целиком лежащие в достаточно малой окрестности τ. Мы будем предполагать, что их уравнения могут быть записаны в виде

$$\gamma^- : x = 0,\ y = \varphi^-(\theta); \quad \gamma^+; x = \varphi^+(\theta),\ y = 0, \tag{5}$$

где φ^- и φ^+ – гладкие функции, периодические по θ с периодом 1.

Цель работы состоит в выяснении возможных типов инвариантных труб, целиком лежащих в окрестности трубы Γ_0.

2. Рассмотрим систему

$$\begin{gathered} x_k = A_k x_0 + \sum_{j=0}^{k} A_{k-j}\ f(x_j, y_j, \theta_j), \\ y_k = B_{k-N} y_N - \sum_{j=k}^{N} B_{k-j}\, g(x_j, y_j, \theta_j), \\ \theta_k = \Psi_k(\theta_0), \end{gathered} \tag{6}$$

где $A_{k-j} = A(\theta_{k-1})...A(\theta_i)$, $\quad B_{k-j} = B^{-1}(\theta_k)...B^{-1}(\theta_{i-1})$. $\quad \Psi_k = \underbrace{\Psi(\Psi(...\Psi}_{k}(\theta_0))$ и положено $A_0 f = 0,\ B_{k-N}\ g = 0,\ A_0 = E_m,\ B_0 = E_n$.

Лемма 1. *Существует такое r, что при $\|x_0\| < r/2$, $\quad \|y_N\| < r/2$ система* (6) *имеет единственное решение*

$$\Big(x_k(x_0, y_N, \theta_0),\ y_k(x_0, y_N, \theta_0),\ \theta_k = \Psi_k(\theta_0)\Big)_{k=0}^{k=N}, \quad \text{где } \|x_k\| < r,\ \|y_k\| < r.$$

Доказательство следует из метода сжатых отображений.

Лемма 2. *Справедливы оценки*

$$\begin{gathered} \|x_N\| \ + \ \|\partial x_N/\partial x_0\| \ + \ \|\partial x_N/\partial y_N\| \ < \ L(\max\|A(\theta)\|)^N, \\ \|y_0\| \ + \ \|\partial y_0/\partial x_0\| \ + \ \|\partial y_0/\partial y_N\| \ < \ L(\max\|B^{-1}(\theta)\|)^N, \\ \|\partial x_N(x_0, y_N, \Psi_N^{-1}(\theta_N))/\partial\theta_N\| \ < \ L\bar{p}^N, \ \ \|\partial y_0/\partial\theta_0)\|) \ < \ L\,\overset{=N}{p}, \end{gathered} \tag{7}$$

где L некоторая константа.

Пусть $U_0 = [\,M_0(x_0, y_0, \theta_0); \quad \|x_0 - \varphi^+(\theta_0)\| \le \varepsilon_0, \quad \|y_0\| \le \varepsilon_0, \quad \theta_0 \in \tau]$, $U_1 = [\,M_1(x_1, y_1, \theta_1); \quad \|y_1 - \varphi^-(\theta_1)\| \le \varepsilon_1, \quad \|x_1\| \le \varepsilon_1, \quad \theta_1 \in \tau]$. Выберем ε_0 настолько малым, чтобы в рассматриваемой окрестности τ $\ T^i M_0 \cap U_0 = \emptyset$, где $i \ne 0$ и $M_0 \in U_0$. Аналогичное ограничение наложим на ε_1.

Лемма 3. *Для любого k больше некоторого $\bar{k}_1$ отображение T^k из U_0 в U_1 определено и записывается в виде*

$$\begin{gathered} \theta_1 = \Psi_k(\theta_0), \\ \xi_1 = x_k(\xi_0 + \varphi^+(\theta_0),\ \eta_1 + \varphi^-(\Psi_k^{-1}(\theta_0)),\ \theta_0), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\eta_0 = y_0(\xi_0 + \varphi^+(\theta_0),\ \eta_1 + \varphi^-(\Psi_k^{-1}(\theta_0)),\ \theta_0), \tag{9}$$

где $\xi_0 = x_0 - \varphi^+(\theta_0),\ \ \eta_0 = y_0,\ \xi_1 = x_1,\ \eta_1 = y_1 - \varphi^-(\theta_0)$.

Обозначим через σ_k^0 область определения $T^k : U_0 \to U_1$. Из вида T^k следует, что σ_k^0 расслаивается на поверхности (9), гладко стремящиеся к $y_0 = 0$ при $k \to \infty$. Заметим, что

$$\sigma_{k_1}^0 \cap \sigma_{k_2}^0 = \emptyset, \quad \sigma_{k_1}^1 \cap \sigma_{k_2}^1 = \emptyset, \ \text{ где } \ \sigma_k^1 = T^k \sigma_k^0 \ \text{ и } \ k_1 \neq k_2.$$

Отображение $T^{p_1+p_2}$ в окрестности γ^-, которой можно считать U_1, в переменных ξ, η, θ запишется в виде

$$\bar{\xi}_0 = F(\xi_1, \eta_1, \theta_1),\ \ \bar{\eta}_0 = G(\xi_1, \eta_1, \theta_1),\ \ \bar{\theta}_0 = \Phi(\xi_1, \eta_1, \theta_1). \tag{10}$$

По предположению $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ пересекаются грубо, а уравнения γ^- и γ^+ записываются в виде (5). Для выполнения этих условий достаточно, чтобы

$$\|G_{\eta_1}(0,0,\theta_1)\| \neq 0, \quad \left\| \begin{matrix} G_{\eta_1} & G_{\theta_1} \\ \Phi_{\eta_1} & \Phi_{\theta_1} \end{matrix} \right\|_{\substack{\xi_1=0 \\ \eta_1=0}} \neq 0 \tag{11}$$

При выполнении (11) уравнение $\mathfrak{M}^-$ можно записать в виде

$$\xi_0 = \varphi_0^0(\eta_0, \theta_0), \tag{12}$$

где φ_0^0 – гладкая функция, определенная при $\|y_0\| \leq \varepsilon_0^{'}$, периодическая по θ_0 с периодом 1 и $\max(\,\|\partial\varphi_0^0/\partial\eta_0\|,\ \|\partial\varphi_0^0/\partial\theta_0\|\,) < L_0$.

Введем пространство H^0 поверхностей P^0 с нормой C^0, уравнения которых записываются в виде $\xi_0 = \varphi_0(\eta_0, \theta_0)$, где функции φ_0 определены при $\|\eta_0\| \leq \varepsilon_0^{'}/2$, периодичны по θ_0 с периодом 1 и удовлетворяют условиям $\|\,\varphi_0\,(\,0, \theta_0)\,\| < \varepsilon_0/2$, $\|\,\varphi_0(\eta_0^{'}, \theta_0^{'}) - \varphi_0(\eta_1^{''}, \theta_1^{''})\,\| < (L_0+1)(\|\eta_0^{'} - \eta_0^{''}\| + \|\theta_0^{'} - \theta_0^{''}\|)$.

Обозначим через H_k^0 множество поверхностей $P_k^0 = P^0 \cap \sigma_k^0$.

Теорема 1. *Существует такое* $\bar{k}_2 \geq \bar{k}_1$, *что при всех* $i, j \leq \bar{k}_2$: 1) $T^{j+p_1+p_2}\sigma_j^0 \cap \sigma_i^0 \neq \emptyset$; 2) *определены операторы* $\mathcal{T}_{ij}^+ : H_j^0 \to H_i^0$; 3) *в некоторой метрике, эквивалентной* C^0, $\rho(\mathcal{T}_{ij}^+\,\varphi_0^{'},\ \mathcal{T}_{ij}^+\,\varphi_0^{''}) < q\rho(\varphi_0^{'}, \varphi_0^{''})$, *где* $q < 1$.

3. Пусть

$$\pi = (..., i_{-1}, i_0, i_1, ..., i_\rho, ...), \tag{13}$$

некоторая бесконечная в обе стороны последовательность, составленная из целых чисел $i_\rho \geqslant \bar{k}_2$. Последовательности π мы сопоставим последовательность

$$\to H_{i_{\rho-1}}^0 \xrightarrow{\mathcal{T}_{i_\rho i_{\rho-1}}^+} H_{i_\rho}^0 \xrightarrow{\mathcal{T}_{i_{\rho+1} i_\rho}^+} H_{i_{\rho+1}}^0 \to ... \tag{14}$$

Лемма 4. ([6]) *Пусть дана последовательность полных метрических пространств* X_i *с метрикой* $\rho_i, i = 0 \pm 1, \pm 2, ...$, *и последовательность операторов* $\mathcal{A}_i$, *удовлетворяющих следующим условиям:* 1) $\sup \rho_i(x_i^{'}, x_i^{''}) < D$; 2) $\mathcal{A}_i(X_i) \subset X_{i+1}$; 3) $\rho_{i+1}(\mathcal{A}_i x_i^{'}, \mathcal{A}_i x_i^{''}) < q\rho_i(x_i^{'}, x_i^{''})$, *где* $q < 1$. *Тогда существует единственная последовательность*

$(..., x^*_{-1}, x^*_0, ..., x^*_i, ...)$, $x^*_i \subset X_i$, *удовлетворяющая условиям* $x^*_{i+1} = \mathcal{A}_i x^*_i$.

Применяя эту лемму к (14) получаем, что последовательности π соответствует единственная устойчивая последовательность поверхностей $\{P^\pi_{i_\rho}\}$, уравнения которых $\xi_0 = \varphi^\pi_{i\rho}(\eta_0, \theta_0)$, удовлетворяющая условиям

$$T^{-i_\rho - p_1 - p_2}\ P^\pi_{i_{\rho+1}} \subset P^\pi_{i_\rho} \tag{15}$$

Аналогичным образом устанавливается, что любой последовательности π, где $i_\rho \geq \bar{k}'_2$, соответствует единственная устойчивая в отрицательном направлении последовательность поверхностей $\{Q^\pi_{i_\rho}\}$, уравнения которых $\eta_0 = \psi^\pi_{i\rho}(\eta_0, \theta_0)$, где $\psi^\pi_{i\rho}$ определены при $\|\xi_0\| \leq \varepsilon_0$, периодичны по θ_0, графики их лежат в $\sigma^0_{i_\rho}$, причем $\psi^\pi_{i\rho} \to 0$ при $i_\rho \to \infty$ вместе с константами Липшица.

При всех $i_\rho \geq \bar{k} \geq \max(\bar{k}_2, \bar{k}'_2)$ $P^\pi_{i_\rho}$ и $Q^\pi_{i_\rho}$ пересекаются по единственному l-мерному тору $\gamma^\pi_{i_\rho}$. Из построения следует, что $\Gamma_0 = (..., \gamma^\pi_{i_\rho}, ..., \gamma^\pi_{i_{\rho+1}})$ есть инвариантная труба.

В результате приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Множество инвариантных труб, целиком лежащих в достаточно малой окрестности* Γ_0 *и не являющихся асимптотическими к* τ*, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех последовательностей* π*, где* $i_\rho \geq\ k^* \geq \bar{k}$.

Следствие. *В любой окрестности* Γ_0 *содержится счетное множество периодических торов.*

Относительно существования асимптотических труб в малой окрестности Γ_0 имеет место следующая

Теорема 3. *Множество инвариантных труб, асимптотических к* τ *только в отрицательном (положительном) направлении, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех бесконечных последовательностей* $\pi = (i_1, i_2, , ..., i_\rho, ...)$*, где* $i_\rho \geq\ k^* \geq \bar{k}$.

Множество гомоклинических труб тора τ *, исключая* Γ_0 *, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех отрезков* $(\nu_1, \ldots, \nu_q)$ *, где* $\nu_q \geq\ k^*,\ q \geq\ 1$.

Замечание 1. В случае, когда T имеет неподвижную точку типа седло, устойчивое и неустойчивое многообразия которой грубо пересекаются в гомоклинической точке, теоремы 2 и 3 дают описание структуры окрестности гомоклинической траектории. Несколько другое доказательство было ранее предложено автором ([5,6]) при изучении непрерывных динамических систем.

Замечание 2. Условия (3) автоматически выполняются, когда движения на торе квазипериодические. Однако в общем случае это не так. В частности, условия (3) могут нарушаться, когда отображение на инвариантном торе имеет Y-структуру в смысле Д. В. Аносова ([1–3]) [2].

[2]См. также работы ([7–9]), посвященные сохранению гладких инвариантных многообразий, в частности торов, при малых гладких возмущениях векторных полей.

Замечание 3. Хотя в работе проводилось исследование в предположении, что инвариантным многообразием отображения T является тор, результаты справедливы и для любого гладкого многообразия при аналогичных предположениях относительно T. Примером таких инвариантных многообразий могут быть $R^1, R^1 \times S^1$ и т. д.

4. Рассмотрим систему $m+n$ уравнений

$$dx_i/dt = f_i(x_1, ..., x_{m+n}, t), \tag{16}$$

где f_i определены и непрерывны вместе с производными $\partial f_i/\partial x_j$ в области $G \times R^1$, где G – ограниченная замкнутая область из R^{m+n}, и являются квазипериодическими функциями t с базисом частот $\omega_1, ..., \omega_k$. Пусть $x = 0$ есть решение и система

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Sigma a_{ij}(t)\xi_j, \tag{17}$$

где $a_{ij} = \partial f_i(0,t)/\partial x_j$ имеет фундаментальную матрицу, представимую в виде

$$\begin{pmatrix} \Psi^+(t) & 0 \\ 0 & \Psi^-(t) \end{pmatrix}, \tag{18}$$

где Ψ^+ и Ψ^- – матрицы соответственно порядка m и n, удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} &\|\Psi^+(t)(\Psi^+(\tau))^{-1}\| < \bar{k}\, e^{-\lambda(t-\tau)}, \;\; t-\tau \geq 0, \\ &\|\Psi^-(t)(\Psi^-(\tau))^{-1}\| < \bar{k}\, e^{\lambda(t-\tau)}, \;\; t-\tau \leq 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\bar{k}$ и λ – некоторые положительные постоянные. Тогда решение $x = 0$ является решением седлового типа и имеет устойчивое интегральное многообразие $\mathfrak{M}^+_{m+1}$ размерности $m+1$ и неустойчивое $\mathfrak{M}^-_{n+1}$ размерности $n+1$. Предположим, что существует решение $x = \varphi(t)$, двоякоасимптотическое к $x = 0$, и что $\mathfrak{M}^+_{m+1}$ и $\mathfrak{M}^-_{n+1}$ пересекаются по $x = \varphi(t)$ грубо.

Теорема 4. *Система* (16) *имеет счетное множество квазипериодических движений седлового типа с базисом частот* $\omega_1, ..., \omega_k$.

В основе доказательства лежит следующая

Лемма 5. *Устойчивое и неустойчивое многообразия* $\mathfrak{M}^+_{m+k}$ *и* $\mathfrak{M}^-_{n-k}$ *тора* $x = 0$ *системы*

$$dx_i/dt = g_i(x_1, ..., x_{m+n}, \vartheta_1, ..., \vartheta_k), \;\; d\vartheta_j/dt = \omega_j \tag{18$'$}$$

где $g_i(x, \omega_1 t, ..., \omega_k t) = f(x,t)$, *грубо пересекаются по* k*-мерной гомоклинической трубе.*

Применяя результаты, полученные выше, к системе (18$'$), получаем, что у (18$'$) существует счетное множество периодических торов. Следовательно, система (16) имеет счетное множество квазипериодических движений.

В заключение приношу благодарность академику Л. С. Понтрягину за внимание к работе.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете

им. Н. И. Лобачевского

Поступило
06 VII 1967

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

([1]) Л. П. Д. В. Аносов, ДАН, 145, № 4, 707 (1962).
([2]) Д. В. Аносов, ДАН, 151, № 6, 1250 (1963).
([3]) В. И. Арнольд, Я. Г. Синай, ДАН, 144, № 4, 653 (1962).
([4]) В. И. Арнольд, ДАН, 156, № 1, 9 (1964).
([5]) Л. П. Шильников, ДАН, 172, № 2, 298 (1967).
([6]) Л. П. Шильников, Матем. сборн., 74 (116), 3, 378 (1967).
([7]) I. Kupka, C. R., 258, № 17, 4197 (1964). ([8]) B. Sacker, Comm. Pure and Appl. Math., 18, № 4, 717 (1965).
([9]) Ю. И. Неймарк, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, № 3, 311 (1967).
([10]) Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963.

Л.П. Шильников

О СТРУКТУРЕ ОКРЕСТНОСТИ ГОМОКЛИНИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ИНВАРИАНТНОГО ТОРА

Черновик рукописи полной версии статьи в журнале Доклады Академии наук СССР 1968. Том 180, № 2 , 286-289 (см. предыдущую статью в этой книге)

I. Пусть T – гладкое взаимно однозначное отображение, определенное в некоторой области G евклидова пространства R^{l+m+n}. Предположим, что T имеет гладкое инвариантное многообразие $\mathcal{L}$ размерности l, у которого есть два инвариантных многообразия $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$. Устойчивое многообразие $\mathfrak{M}^+$ имеет размерность $l+m$, неустойчивое $\mathfrak{M}^-$ имеет размерность $l+n$. Предположим, что $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ пересекаются по гладкому l-мерному многообразию γ, гомеоморфному $\mathcal{L}$. Многообразие γ будем называть гомоклиническим многообразием.

Мы будем предполагать, что гомоклиническое многообразие γ является грубым, т. е. для произвольной точки $M \in \gamma$

$$\dim(W_M^+ \cap W_M^-) = l, \tag{3.2}$$

где через W_M^+ и W_M^- обозначены касательные пространства к $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в точке M.

Наличие гомоклинического многообразия γ приводит к существованию счетного множества гомоклинических многообразий

$$\gamma_i = T^i\gamma, \;\; i = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, ...$$

Последовательность $\Gamma_0 = (..., \gamma_{-1}, \gamma_0, \gamma_1, ...)$ будем называть гомоклинической трубой многообразия γ.

Здесь рассмотрена следующая задача. Пусть инвариантное многообразие $\mathcal{L}$ есть тор, который будем обозначать через $\mathbb{T}$, и в его окрестности отображение T может быть записано в виде[1]

$$\bar{x} = A(\theta)x + f(x, y, \theta), \qquad \bar{y} = B(\theta)y + g(x, y, \theta), \qquad \bar{\theta} = \Psi(\theta) + h(x, y, \theta), \tag{3.3}$$

где $x = (x_1, ..., x_m)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, $\theta = (\theta_1, ..., \theta_l)$; A, B, f, g, $\Psi \in C^1$ и периодические по θ с периодом $1 = (1, ..., 1)$; $f_\theta = f = f_x = 0$, $g_\theta = g = g_y = 0$ и $h = 0$ при $x = y = 0$. [2]

Предположим, что

$$\max_\theta \|A(\theta)\| < 1, \quad \max_\theta \|B^{-1}(\theta)\| < 1. \tag{3.4}$$

Условия (3.4) означают, что тор $\mathbb{T}$ является седловым. При некоторых условиях[3] многообразия $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ в достаточно малой окрестности $\mathbb{T}$ записываются в виде

$$y = R^+(x, \theta), \;\; x = R^-(y, \theta), \tag{3.5}$$

[1]Отметим, что в статье в ДАН рассмотрен только случай $h \equiv 0$, так что исследованный здесь случай является существенно более общим и требует значительно более сложных оценок. Это и последующие примечания сделаны редакторами книги.

[2]В рукописи (в отличие от статьи в ДАН) условие на f наложено при $x = 0$, а условие на g – при $y = 0$, что является слишком ограничительным и в доказательстве вообще не используется, поэтому мы поставили здесь так, как в статье в ДАН.

[3]условия (3) в статье в ДАН

где $R^+, R^- \in C^1$ и $R^+(0,\theta) = R^-(0,\theta) = R^+_x(0,\theta) = R^+_\theta(0,\theta) = R^-_y(0,\theta) = R^-_\theta(0,\theta) = 0$.

Пусть $\gamma^- = T^{-p_1}\gamma$ и $\gamma^+ = T^{p_2}\gamma$ – два гомоклинических тора трубы Γ_0, целиком лежащие в достаточно малой окрестности $\mathbb{T}$. Мы будем предполагать, что их уравнения могут быть записаны в виде[4]

$$\begin{aligned} &\gamma^- : x = 0,\ y = \varphi^-(\theta), \\ &\gamma^+ : x = \varphi^+(\theta),\ y = 0, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где φ^- и φ^+ – гладкие функции, периодические по θ с периодом 1.

Цель работы состоит в выяснении возможных типов инвариантных труб, целиком лежащих в окрестности Γ_0.

II. Рассмотрим следующую систему

$$\begin{cases} x_k = A_k\ x_0 + \sum\limits_{j=0}^{k} A_{k-j}\ f(x_j, y_j, \theta_j), \\ y_k = B_{k-N}\, y_N - \sum\limits_{j=k}^{N} B_{k-j}\, g(x_j, y_j, \theta_j), \\ \theta_k = \Psi(\theta_{k-1}) + h(x_{k-1}, y_{k-1}, \theta_{k-1}), \end{cases} \tag{3.8}$$

где $A_{k-j} = A(\theta_{k-1}) \cdots A(\theta_j)$, $B_{k-j} = B^{-1}(\theta_k) \cdots B^{-1}(\theta_{j-1})$, и положено $A_0 f = 0$, $B_{k-N} g = 0$, $A_0 = E_m$, $B_0 = E_n$. Всюду под нормой X (X – функция или матрица) будем подразумевать $\max\limits_\theta$ от обычной нормы X.

Лемма 1. *Существует такое r, что при $\|x_0\| < r/2$, $\|y_N\| < r/2$ и $\theta_0 \in \mathbb{T}$ система* (3.8) *имеет решение $\{x_k,\ y_k,\ \theta_k\}$ такое, что*

$$\|x_k\| < r\|A\|^k, \qquad \|y_k\| < r\|B^{-1}\|^{N-k}. \tag{3.9}$$

Доказательство. Рассмотрим оператор L, который переводит последовательность $\{y_k\}$ в последовательность $\{\bar{y}_k\}$ следующим образом.

1. Задаваясь краевыми условиями (x_0, y_N, θ_0) и начальным приближением $\{y_k\}$ таким, что[5]

$$\|y_k\| < \mathcal{L}_0 \|B^{-1}\|^{N-k}, \tag{3.10}$$

из системы (3.8) находим θ_1, x_1; по (x_1, y_1, θ_1) находим θ_2, x_2, и т.д.

[4]Таким образом, как и в статье в ДАН, предполагается, что локальные координаты выбраны так, что устойчивое и неустойчивое многообразия распрямлены, т.е. $R^+ = 0$ и $R^- = 0$, и это также обеспечивает, что

$$f(0, y, \theta) \equiv 0, \qquad g(x, 0, \theta) \equiv 0 \tag{3.6}$$

в формуле (3.3). Как теперь хорошо известно из (еще не вполне сформировавшейся на момент написания статьи) теории нормально-гиперболических многообразий, на многообразиях $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ существуют единственным образом определенные гладкие инвариантные слоения, сильно устойчивое – на $\mathfrak{M}^+$, и сильно неустойчивое – на $\mathfrak{M}^-$; если ввести координаты так, что эти слоения будут распрямлены, т.е. слои будут иметь вид $\{x = const, y = 0\}$ и $\{y = const, x = 0\}$, то тогда функция h будет удовлетворять условиям $h(0, y, \theta) \equiv 0$, $h(x, 0, \theta) = 0$, что сделало бы ненужным условие (3.47) ниже.

[5]Здесь можно сразу выбрать $\mathcal{L}_0 = r$.

2. По x_{N-1}, θ_{N-1}, $\bar{y}_N = y_N$ находим $\bar{y}_{N-1}$, и т.д.; по x_0, θ_0, $\bar{y}_1$ находим $\bar{y}_0$.

Покажем, что $\{\bar{y}_k\}$ удовлетворяет условию (3.10).

$$\|\bar{y}_k\| \le \|B^{-1}\|^{N-k}\|y_N\| + \sum_{j=k}^{N} \|B^{-1}\|^{j-k}\ \mathcal{L}_l\|B^{-1}\|^{N-j}\|\frac{\partial g}{\partial y_j}\| \le \|B^{-1}\|^{N-k}(\|y_N\| + r\sum_{j=k}^{N}\|\frac{\partial g}{\partial y_j}\|).^{6}$$

Т.к. $\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{x=y=0} = 0$, то $\sum_{j=k}^{N}\|\frac{\partial g}{\partial y_j}\| \le \mathcal{L}_0 M$, где M не зависит от k и N. [7] При достаточно малых r и $\mathcal{L}_0$ получаем (3.10).

Рассмотрим множество Y_N всевозможных последовательностей $(y_0, y_1, \ldots, y_N)$, причем $\|y_k\| \le \mathcal{L}_0\|B^{-1}\|^{N-k}$. Очевидно, это множество компактно в $\underbrace{R^n \oplus R^n \oplus \ldots \oplus R^n}_{N}$. Покажем, что оно выпукло. Пусть $y_k(t) = y_k^1 + t(y_k^2 - y_k^1)$, $t \in [0,1]$, $\{y_k^j\} \in Y_N$, $j = 1, 2$. Тогда

$$\|y_k(t)\| \le t\|y_k^2\| + (1-t)\|y_k^1\| \le r\|B^{-1}\|^{N-k}(t + 1 - t) = r\|B^{-1}\|^{N-k},$$

т. е. непрерывный оператор L переводит компактное выпуклое множество Y_N в себя. Из принципа Шаудера следует, что в Y_N существует хотя бы одна неподвижная точка $\{y_k\}$. Соответствующая последовательность $\{x_k, y_k, \theta_k\}$ есть решение системы (3.8).

Получим оценку (3.9) для этого решения[8].

$$x_k = A_k\ x_0 + \sum_{j=0}^{k} A^{k-j}\ f(x_j, y_j, \theta_j)$$

$$\|x_k\| \le \|A\|^k\|x_0\| + \sum_{j=0}^{k}\|A\|^k \cdot \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\| \cdot \|x_0\| + \sum_{j=0}^{k}\|A\|^{k-j} \cdot \|\frac{\partial f}{\partial x_j}\| \cdot \sum_{i=0}^{j}\|A\|^{j-i} \ldots \le$$

$$\le \|A\|^k\left[\|x_0\| + \|x_0\|\mathcal{L}_0 M_0 + \|x_0\|(\mathcal{L}_0 M_0)^2 + \ldots\right] \le \frac{\|x_0\|}{1 - \mathcal{L}_0 M_0}\|A\|^k.$$

Выбирая $\mathcal{L}_0 < \frac{1}{2M_0}$, получим оценку (3.9) для x_k. Аналогично доказывается оценка на y_k. Лемма доказана.

В дальнейшем x_0 и y_N будут браться такими, что

$$\|x_0 - \varphi^+(\theta)\| < \varepsilon_0, \qquad \|y_N - \varphi^-(\theta)\| < \varepsilon_1.$$

[6] Здесь используется, что $g \equiv 0$ при $y = 0$ (см. (3.6), поэтому $\|g(x_j, y_j, \theta_j)\| \le \|y_j\| \sup_{\|y\| \le \|y_j\|} \|\frac{\partial g}{\partial y}\|$.

[7] Здесь используется, что $g \in C^2$ и поэтому, так как $\frac{\partial g}{\partial y}$ обнуляется при $x = 0$, $y = 0$, мы имеем $\frac{\partial g}{\partial y} = O(\|x_j\| + \|y_j\|)$. Из (3.10), и оценки $\|x_j\| \le \mathcal{L}_0\|A^j\|$ (которая получается дословным повторением доказательства оценки (3.9) для x_k ниже) следует, что $\frac{\partial g}{\partial y} = \mathcal{L}_0\ O(\|A\|^j + \|B^{-1}\|^{N-j})$, откуда равномерная ограниченность $\frac{1}{\mathcal{L}_0}\sum\|\frac{\partial g}{\partial y_j}\|$ вытекает немедленно.

[8] Доказывать надо только оценку для x_k – оценка для y_k уже получена, если в определении пространства Y_N выбрать $\mathcal{L}_0 = r$. Используемая ниже равномерная оценка $\sum\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\| \le \mathcal{L}_0 M_0$ получается таким же рассуждением, как и равномерная оценка для сумм $\|\frac{\partial g}{\partial y_j}\|$; см. предыдущее примечание.

Т. к. φ^+ и φ^- нигде не обращаются в 0, то справедлива оценка

$$K_1 \le \frac{\|x_0\|}{\|y_N\|} \le K_2,$$

где K_1 и K_2 – некоторые константы.

Лемма 2. *При выполнении условия*[9]

$$\left\|\frac{\partial h}{\partial x}(0,0,\theta)\right\| < 1 - \frac{\|\Psi_\theta\| \cdot \|B^{-1}\|}{q} \tag{3.11}$$

где

$$\|\Psi_\theta\| \cdot \|B^{-1}\| < q < 1, \tag{3.12}$$

существует такое r_0, что при $r < r_0$ решение системы (3.8) единственно и для него справедлива оценка[10]

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\| \ + \ \|\frac{\partial y_0}{\partial y_N}\| + \|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}\| \ < \ Lq^N, \tag{3.13}$$

где $L = const$ не зависит от N.

Доказательство. Пусть $\{x_k, y_k, \theta_k\}$ – решение системы (3.8). Тогда

$$y_{k+1} = B(\theta_k)y_k + g(x_k, y_k, \theta_k)$$

$$\frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_0} = \frac{\partial B}{\partial \theta_k} \cdot \frac{\partial \theta_k}{\partial x_0} y_k + B\frac{\partial y_k}{\partial x_0} + \frac{\partial g}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_0} + \frac{\partial g}{\partial \theta_k} \cdot \frac{\partial \theta_k}{\partial x_0} + \frac{\partial g}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial y_k}{\partial x_0}$$

$$\|\frac{\partial y_k}{\partial x_0}\| \le (\|B^{-1}\| + \sigma_1)\left\{\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial g}{\partial x_k}\| \cdot \|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| + (\|\frac{\partial B}{\partial \theta_k}\| \cdot \|y_k\| + \|\frac{\partial g}{\partial \theta_k}\|)\|\frac{\partial \theta_k}{\partial x_0}\|\right\}, \tag{3.14}$$

где σ_1 – величина порядка r. В частности,[11]

$$\|\frac{\partial y_{N-1}}{\partial x_0}\| \le (\|B^{-1}\| + \sigma_1)\left\{\|\frac{\partial g}{\partial x_{N-1}}\| \cdot \|\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_0}\| + (\|\frac{\partial B}{\partial \theta}\| \cdot \|y_{N-1}\| + \|\frac{\partial g}{\partial \theta}\|)\|\frac{\partial \theta_{N-1}}{\partial x_0}\|\right\}, \tag{3.17}$$

$$\|\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_0}\| \le (\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \cdot \|x_{N-2}\| + \|\frac{\partial f}{\partial \theta}\|)\|\frac{\partial \theta_{N-2}}{\partial x_0}\| + (\|A\| + \|\frac{\partial f}{\partial x_{N-2}}\|)\|\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial f}{\partial y_{N-2}}\| \cdot \|\frac{\partial y_{N-2}}{\partial x_0}\|, \tag{3.18}$$

---

[9] Этого всегда можно добиться, например, линейным растяжением координат x, если только выполнено (3.12). При этом в оценках (3.13) меняется только константа L, то есть для выполнения утверждения леммы достаточно выполнения только условия (3.12). Заметим, что оценка (3.13) для $\|\frac{\partial y_0}{\partial y_N}\|$ в этой рукописи не доказана, но она в дальнейшем и не используется.

[10] В доказательстве Теоремы 1 ниже используется только оценка на $\|\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\|$.

[11] Заметим, что формулы (3.18) и (3.19) ниже – частный случай (отвечающий $k = N-1$) неравенств

$$\|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| \le (\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \cdot \|x_{k-1}\| + \|\frac{\partial f}{\partial \theta}\|)\|\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial x_0}\| + (\|A\| + \|\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}\|)\|\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial f}{\partial y_{k-1}}\| \cdot \|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\|, \tag{3.15}$$

$$\|\frac{\partial \theta_k}{\partial x_0}\| \le (\|\Psi_\theta\| + \|\frac{\partial h}{\partial \theta}\|)\|\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\| \cdot \|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\|, \tag{3.16}$$

которые используются и в дальнейшем. Они, как и (3.14), получаются дифференцированием уравнений (3.8).

$$\|\frac{\partial\theta_{N-1}}{\partial x_0}\| \le (\|\Psi_\theta\| + \|\frac{\partial h}{\partial\theta}\|)\|\frac{\partial\theta_{N-2}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\| \cdot \|\frac{\partial y_{N-2}}{\partial x_0}\|. \tag{3.19}$$

Подставим (3.17) в (3.14) для $k = N-2$, получим

$$\|\frac{\partial y_{N-2}}{\partial x_0}\| \le (\|B^{-1}\| + \sigma_1)^2 \left\{ \|\frac{\partial g}{\partial x_{N-1}}\| \cdot \|\frac{\partial x_{N-1}}{\partial x_0}\| + \left(\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{N-1}\| + \|\frac{\partial g}{\partial\theta}\| \right) \cdot \|\frac{\partial\theta_{N-1}}{\partial x_0}\| \right\} +$$

$$+(\|B^{-1}\| + \sigma_1) \left\{ \|\frac{\partial g}{\partial x_{N-2}}\| \cdot \|\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_0}\| + \left(\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{N-2}\| + \|\frac{\partial g}{\partial\theta}\| \right) \cdot \|\frac{\partial\theta_{N-2}}{\partial x_0}\| \right\}. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.18) и (3.19) в (3.20), получим

$$\|\frac{\partial y_{N-2}}{\partial x_0}\| \le \left\{ 1 - (\|B^{-1}\| + \sigma_1)^2 \left[\|\frac{\partial g}{\partial x_{N-1}}\| \cdot \|\frac{\partial f}{\partial y_{N-2}}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\| \left(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{N-2}\| \right) \right] \right\}^{-1} \times$$

$$\times(\|B^{-1}\| + \sigma_1) \left\langle \left\{ \|\frac{\partial g}{\partial x_{N-2}}\| + (\|B^{-1}\| + \sigma_1) \left[\|\frac{\partial g}{\partial x_{N-1}}\| \cdot (\|A\| + \|\frac{\partial f}{\partial x}\|) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \left(\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{N-2}\| + \|\frac{\partial g}{\partial\theta}\| \right) \right] \right\} \cdot \|\frac{\partial x_{N-2}}{\partial x_0}\| + \left\{ \|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{N-2}\| + \|\frac{\partial g}{\partial\theta_{N-2}}\| + \right.$$

$$+(\|B^{-1}\| + \sigma_1) \left[(\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\| \cdot \|x_{N-2}\| + \|\frac{\partial f}{\partial\theta_{N-2}}\|)\|\frac{\partial g}{\partial x_{N-2}}\| + \right.$$

$$\left.\left.\left. + (\|\Psi_\theta\| + \|\frac{\partial h}{\partial\theta}\|) \cdot (\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{N-1}\| + \|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|) \right] \right\} \|\frac{\partial\theta_{N-2}}{\partial x_0}\| \right\rangle.$$

Это неравенство, как и неравенство (3.17), можно записать в виде

$$\|\frac{\partial y_k}{\partial x_0}\| \le q^{N-k} \left[\mathcal{L}_0^{(k)} \cdot \|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| + \mathcal{L}_1^{(k)} \cdot \|\frac{\partial\theta_k}{\partial x_0}\| \right], \tag{3.21}$$

$k = N-1, N-2$. Покажем, что если $\|\frac{\partial y_k}{\partial x_0}\|$ удовлетворяет оценке (3.21), то и $\|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\|$ также удовлетворяет этой оценке, причем сумма $\mathcal{L}_0^{(j)} + \mathcal{L}_1^{(j)}$ не увеличивается.

Подставляя (3.21) в (3.14), получим

$$\|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\| \le (\|B^{-1}\| + \sigma_1) \left\{ q^{N-k} \left(\mathcal{L}_0^{(k)} \cdot \|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| + \mathcal{L}_1^{(k)} \cdot \|\frac{\partial\theta_k}{\partial x_0}\| \right) + \right.$$

$$\left. + \|\frac{\partial g}{\partial x_{k-1}}\| \cdot \|\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_0}\| + (\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial\theta}\| \cdot \|y_{k-1}\|)\|\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial x_0}\| \right\}, \tag{3.22}$$

Для $\|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\|$, $\|\frac{\partial\theta_k}{\partial x_0}\|$ справедливы неравенства (3.18), (3.19) при $N-1 = k$. [12] Подставляя

[12] т.е. неравенства (3.15), (3.16)

их в (3.22), получим оценку на $\|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\|$:

$$\|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\| \le \left\{1-(\|B^{-1}\|+\sigma_1)q^{N-k}\left[\mathcal{L}_0^{(k)}\cdot\|\frac{\partial f}{\partial y}\|+\mathcal{L}_1^{(k)}\cdot\|\frac{\partial h}{\partial y}\|\right]\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left\langle\left\{\|\frac{\partial g}{\partial x_{k-1}}\|+(\|B^{-1}\|+\sigma_1)\cdot q^{N-k}\left[(\|A\|+\|\frac{\partial f}{\partial x}\|)\mathcal{L}_0^{(k)}+\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\,\mathcal{L}_1^{(k)}\right]\right\}\cdot\|\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_0}\|+\right.$$

$$+\left\{\|\frac{\partial g}{\partial\theta_{k-1}}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\cdot\|y_{k-1}\|+(\|B^{-1}\|+\sigma_1)q^{N-k}\left[(\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|\cdot\|x_{k-1}\|+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\|\frac{\partial f}{\partial\theta_{k-1}})\|\mathcal{L}_0^{(k)}+(\|\Psi_\theta\|+\|\frac{\partial h}{\partial\theta}\|)\mathcal{L}_1^{(k)}\right]\right\}\|\frac{\partial\theta_{k-1}}{\partial x_0}\|\right\rangle.$$

Это оценка вида (3.21), причем

$$\mathcal{L}_0^{(k-1)} \le \frac{\sigma_2+\mathcal{L}_0^{(k)}(\|A\|+\|\frac{\partial f}{\partial x}\|)\cdot\|\Psi_\theta\|^{-1}+\mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\cdot\|\Psi_\theta\|^{-1}}{1-(\|B^{-1}\|+\sigma_1)q^{N-k}(\mathcal{L}_0^{(k)}\|\frac{\partial f}{\partial y}\|+\mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial h}{\partial y}\|)},$$

$$\mathcal{L}_1^{(k-1)} \le \frac{\sigma_3+\mathcal{L}_1^{(k)}(\|B^{-1}\|+\sigma_1)(\|\Psi_\theta\|+\|\frac{\partial h}{\partial\theta}\|)/q+\mathcal{L}_0^{(k)}(\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|\cdot\|x_{k-1}\|+\|\frac{\partial f}{\partial\theta}\|)\|\Psi_\theta\|^{-1}}{1-(\|B^{-1}\|+\sigma_1)q^{N-k}(\mathcal{L}_0^{(k)}\|\frac{\partial f}{\partial y}\|+\mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial h}{\partial y}\|)},$$

где σ_2 и σ_3 – величины порядка r. [13]

Покажем, что

$$1-(\|B^{-1}\|+\sigma_1)q^{N-k}(\mathcal{L}_0^{(k)}\|\frac{\partial f}{\partial y}\|+\mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial h}{\partial y}\|) > p > 0,$$

причем p как угодно близко к 1 при достаточно малом r. Для этого достаточно показать, что

$$\mathcal{L}_0^{(k)}q^{N-k}<\alpha,\qquad q^{N-k}\mathcal{L}_1^{(k)}\cdot\max(\|\frac{\partial h}{\partial x}\|,\|\frac{\partial h}{\partial y}\|)<\beta, \tag{3.23}$$

где α, β достаточно малы.

Для $k=N-1,N-2$ можно выбрать такое $\tilde r$, что при $r<\tilde r$ величины α, β как угодно малы. Далее

$$\mathcal{L}_0^{(k-1)}q^{N-k+1} \le \frac{\sigma_2 q^{N-q+1}+\alpha q(\|A\|+\|\frac{\partial f}{\partial x}\|)\|\Psi_\theta\|^{-1}+\beta q\|\Psi_\theta\|^{-1}}{1-(\|B^{-1}\|+\sigma_1)(\|\frac{\partial f}{\partial y}\|\alpha+\beta)}<\alpha,$$

$$\max(\|\frac{\partial h}{\partial x}\|,\|\frac{\partial h}{\partial y}\|)\mathcal{L}_1^{(k-1)}q^{N-q+1} \le \frac{\sigma_3 q^{N-k+1}+\beta(\|B^{-1}\|+\sigma_1)(\|\Psi_\theta\|+\|\frac{\partial h}{\partial\theta}\|)+\alpha\sigma_4}{1-(\|B^{-}1\|+\sigma_1)(\|\frac{\partial f}{\partial y}\|\alpha+\beta)}<\beta.$$

Получаем, что можно выбрать как угодно малые α, β такие, что существует такое $\tilde r>0$, что при $r<\tilde r$ неравенства (3.23) выполняются для всех k, и p как угодно близко к 1.

[13] То же самое верно и для величин $\sigma_{4,5}$ ниже. Тут используется, что $\frac{\partial g}{\partial(x,\theta)}=O(y)$ и $\frac{\partial f}{\partial(y,\theta)}=O(x)$ в силу (3.6).

Имеем

$$\mathcal{L}_0^{(k-1)} + \mathcal{L}_1^{(k-1)} \le \frac{\sigma_5}{p} + \mathcal{L}_0^{(k)} \frac{\|A\| \cdot \|\Psi_\theta\|^{-1}}{p} + \mathcal{L}_1^{(k)} \frac{\|B^{-1}\| \|\Psi_\theta\|/q + \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\Psi_\theta\|^{-1}}{p},$$

где σ_5 порядка r.

Это неравенство можно записать в виде

$$\mathcal{L}_0^{(k-1)} + \mathcal{L}_1^{(k-1)} < \rho(\mathcal{L}_0^{(k)} + \mathcal{L}_1^{(k)}) + \sigma_6.$$

Используя (3.11), получаем[14] следующий результат: существует такое $r_0 \le \tilde{r}$, что $\rho < 1$ при $r < r_0$ и $\mathcal{L}_0^{(k)} + \mathcal{L}_1^{(k)} < C$ для любого k. В частности, $\mathcal{L}_0^{(0)} < C$, т.е. справедлива оценка

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\| < Cq^N.$$

Оценка $\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}\| < C_1 q^N$ получается совершенно аналогично.

Точно так же можно получить оценку

$$\|y_0^{(1)}(x_0^{(1)}, y_N, \theta_0^{(1)}) - y_0^{(2)}(x_0^{(2)}, y_N, \theta_0^{(2)})\| < \tilde{C} q^N (\|x_0^{(1)} - x_0^{(2)}\| + \|\theta_0^{(1)} - \theta_0^{(2)}\|),$$

где $y_0^{(1)}$ и $y_0^{(2)}$ – начальные y-компоненты любых двух решений, удовлетворяющих соответственно краевым условиям $(x_0^{(1)}, y_N, \theta_0^{(1)}$ и $(x_0^{(2)}, y_N, \theta_0^{(2)}$. Пусть $x_0^{(1)} = x_0^{(2)} = x_0$, $\theta_0^{(1)} = \theta_0^{(2)} = \theta_0$. Тогда $y_0^{(1)} = y_0^{(2)} = y_0$. Траекторию решения можно получить, решая задачу Коши с условиями (x_0, y_0, θ_0), которая решается единственным образом. Следовательно, краевая задача[15] имеет единственное решение.[16]

Лемма 3. При выполнении условий

$$\|A\| \cdot \|\Psi_\theta\| < 1, \qquad \|\frac{\partial h(0,0,\theta)}{\partial y}\| < 1 - \frac{\|\Psi_\theta^{-1}\| \cdot \|A\|}{q_1}, \tag{3.24}$$

где $\max\{\|A\| \cdot \|\Psi_\theta\|, \|A\| \cdot \|\Psi_\theta^{-1}\|\} < 1$, существует такое, r_0', что при $r < r_0'$ справедлива оценка [17]

$$\|\frac{\partial x_N}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial x_N}{\partial y_N}\| + \|\frac{\partial x_N}{\partial \theta_N}\| < \tilde{\mathcal{L}} q_1^N, \tag{3.25}$$

где $\tilde{\mathcal{L}} = const$ не зависит от N.

---

[14] здесь используется также то, что $\|\Psi_\theta\|^{-1} \le 1$: напомним, что $\|\Psi_\theta\|$ – это максимум нормы $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$, где Ψ – диффеоморфизм тора $\mathbb{T}$, поэтому $\|\Psi_\theta\| \ge 1$.

[15] здесь и далее, краевая задача – это система уравнений (3.8)

[16] Доказательство оценки (3.13) для $\|\frac{\partial y_0}{\partial y_N}\|$ в рукописи отсутствует, однако она в дальнейшем не используется.

[17] В последующем используется только оценка на $\|\frac{\partial x_N}{\partial x_0}\|$. Заметим, что для ее вывода используется только первое из условий (3.24), при этом показатель q_1 может быть выбран сколь угодно близким к $\|A\| \cdot \|\Psi_\theta\|$ за счет уменьшения размера окрестности r. Отметим также, что частная производная по x_0 от рещения x_N краевой задачи (3.8) берется при фиксированных y_N и θ_0.

Доказательство.[18]

$$\|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| \le (\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \cdot \|x_{k-1}\| + \|\frac{\partial f}{\partial \theta_{k-1}}\|)\|\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial x_0}\| + (\|\frac{\partial f}{\partial x_{k-1}}\| + \|A\|)\|\frac{\partial x_{k-1}}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial f}{\partial y_{k-1}}\| \cdot \|\frac{\partial y_{k-1}}{\partial x_0}\|;$$

$$\|\frac{\partial \theta_{m+1}}{\partial x_0}\| \le \sum_{j=0}^{m} (\|\Psi_\theta\| + \sigma)^{m-j} (\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial x_j}{\partial x_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\| \cdot \|\frac{\partial y_j}{\partial x_0}\|),$$

где σ – величина порядка r. [19]

Предположим, что $\|\frac{\partial x_m}{\partial x_0}\| < \mathcal{D} q_1^m$ для $m = 0, 1, ..., k-1$, и покажем, что $\|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| < \mathcal{D} q_1^k$.

$$\|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| < \mathcal{D}_1 \|A\|^{k-1} \|\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial x_0}\| + \mathcal{D} q_1^{k-1} (\|\frac{\partial f}{\partial x}\| + \|A\|) + \sigma_0 \|A\|^{k-1},$$

где $\sigma_0 \to 0$ при $r \to 0$. [20]

$$\|\frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial x_0}\| \cdot \|A\|^{k-1} \le [\|A\|(\||\Psi_\theta\| + \sigma)]^{k-1} \mathcal{D}_2. \tag{3.26}$$

Т.к. $\mathcal{D}_1$ произвольно мало, то [21]

$$\|\frac{\partial x_k}{\partial x_0}\| < D q_1^k. \tag{3.27}$$

Осталось получить оценку на $\|\frac{\partial x_N}{\partial \theta_N}\|$. [22]

$$\|\frac{\partial x_0}{\partial \theta_N}\| = 0, \qquad \|\frac{\partial x_1}{\partial \theta_N}\| \le (\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \cdot \|x_0\| + \|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\|)\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_N}\| + \|\frac{\partial f}{\partial y}\| \cdot \|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_N}\|, \tag{3.28}$$

$$\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_N}\| \le (\|\Psi_\theta^{-1}\| + \sigma_1) \left\{ \|\frac{\partial \theta_1}{\partial \theta_N}\| + \|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_N}\| \cdot \|\frac{\partial h}{\partial y}\| \right\}, \tag{3.29}$$

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial y_N}\| \le (\|B^{-1}\| + \sigma_2) \left\{ \|\frac{\partial y_1}{\partial \theta_N}\| + (\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial \theta}\| \cdot \|y_0\|)\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_N}\| \right\}, \tag{3.30}$$

[18] В рукописи здесь вычисляются производные по y_N, а затем замечается, что оценка (3.27) на производную по x_0 получается совершенно аналогично. Так как в дальнейшем используется именно оценка на производную по x_0, то мы просто заменили, не меняя текста, производные по y_N на производные по x_0 во всех формулах до формулы (3.27).

[19] оценка на $\partial \theta_{m+1} / \partial x_0$ следует из (3.16).

[20] Здесь используется, что устойчивое многообразие распрямлено, см. (3.6), поэтому $\frac{\partial f}{\partial (y_{k-1}, \theta_{k-1})} = O(x_{k-1}) = r\, O(\|A\|^{k-1})$, см. (3.9). Соответственно, $\mathcal{D}_1$ и σ_0 - величины порядка r. Важно также, что, как следует из (3.13), производные $\frac{\partial y_k}{\partial x_0}$ равномерно ограничены; это используется и в следующем неравенстве. Таким образом, для доказательства оценки (3.27) используется результат Леммы 1, то есть необходимо предполагать условие (3.12).

[21] Точно таким же вычислением получается оценка

$$\|\frac{\partial x_k}{\partial \theta_0}\| < D q_1^k.$$

[22] Эта оценка получается из оценки (3.13) на $\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_0}\|$ просто в силу симметрии задачи относительно перестановки x и y и перехода к обратному отображению. Поэтому последующие вычисления, вплоть до конца доказательства леммы, можно опустить.

где σ_1, σ_2 – величины порядка r. Подставляя (3.30) в (3.29) , получим

$$\|\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_N}\| \le (\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)\left[\|\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_N}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)\left\{\|\frac{\partial y_1}{\partial\theta_N}\| + (\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\cdot\|y_0\|)\|\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_N}\|\right\}\right]$$

или

$$\|\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_N}\| \le \frac{(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)\left[\|\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_N}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)\|\frac{\partial y_1}{\partial\theta_N}\|\right]}{1-\|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\cdot\|y_0\|)(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)}\ . \tag{3.31}$$

Подставляя (3.31) в (3.30), получим

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial\theta_N}\| \le \left(\|B^{-1}\|+\sigma_2\right)\frac{\|\frac{\partial y_1}{\partial\theta_N}\| + (\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\|y_0\|)\|\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_N}\|}{1-\|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\|y_0\|)(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)}, \tag{3.32}$$

и наконец, (3.32) в (3.28),

$$\|\frac{\partial x_1}{\partial\theta_N}\| \le (\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|\cdot\|x_0\| + \|\frac{\partial f}{\partial\theta_0}\|)\frac{(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)\left[\|\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_N}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)\|\frac{\partial y_1}{\partial\theta_N}\|\right]}{1-\|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\cdot\|y_0\|)(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)} +$$

$$+\|\frac{\partial f}{\partial y}\|\left(\|B^{-1}\|+\sigma_2\right)\frac{\|\frac{\partial y_1}{\partial\theta_N}\| + (\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\|y_0\|)\|\frac{\partial\theta_1}{\partial\theta_N}\|}{1-\|\frac{\partial h}{\partial y}\|(\|B^{-1}\|+\sigma_2)(\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\|y_0\|)(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)}.$$

Эта оценка имеет вид

$$\|\frac{\partial x_k}{\partial\theta_N}\| \le q_1^k\left(\mathcal{L}_0^{(k)}\ \|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| + \mathcal{L}_1^{(k)}\ \|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right) \tag{3.33}$$

при $k=1$. Предположим, для некоторого k оценка (3.33) выполнена. Получим ее для $k+1$.

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial x_{k+1}}{\partial\theta_N}\| &\le (\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|\cdot\|x_k\| + \|\frac{\partial f}{\partial\theta_k}\|)\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| + \\ &+(\|A\| + \|\frac{\partial f}{\partial x_k}\|)q_1^k\left[\mathcal{L}_0^{(k)}\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| + \mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right] + \|\frac{\partial f}{\partial y_k}\|\cdot\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|,\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| &\le (\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma)\left\{\|\frac{\partial\theta_{k+1}}{\partial\theta_N}\| + \|\frac{\partial h}{\partial x}\|\cdot\|\frac{\partial x_k}{\partial\theta_N}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|\cdot\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right\} \le \\ &\le (\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma)\left\{\|\frac{\partial\theta_{k+1}}{\partial\theta_N}\| + \|\frac{\partial h}{\partial x}\|\cdot q_1^k\left[\mathcal{L}_0^{(k)}\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| + \mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right] + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|\cdot\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right\},\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\| \le &(\|B^{-1}\|+\sigma_2)\Big\{\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial\theta_N}\| + (\|\frac{\partial g}{\partial\theta}\|+\|\frac{\partial B}{\partial\theta}\|\cdot\|y_k\|)\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| + \\ &+\|\frac{\partial g}{\partial x_k}\|\cdot q_1^k\left(\mathcal{L}_0^{(k)}\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| + \mathcal{L}_1^{(k)}\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right)\Big\}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Неравенства (3.35) и (3.36) дают неявные оценки. Получим оценки явные.

$$\|\frac{\partial\theta_k}{\partial\theta_N}\| \le \left\{1-\|\frac{\partial h}{\partial x}\|q_1^k\mathcal{L}_0^{(k)}\right\}^{-1}(\|\Psi_\theta^{-1}\|+\sigma_1)\left[\|\frac{\partial\theta_{k+1}}{\partial\theta_N}\| + \left(\|\frac{\partial h}{\partial x}\|q_1^k\mathcal{L}_1^{(k)} + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|\right)\|\frac{\partial y_k}{\partial\theta_N}\|\right],$$

$$\|\frac{\partial y_k}{\partial \theta_N}\| \le \left\{1 - \|\frac{\partial g}{\partial x}\| q_1^k \mathcal{L}_1^{(k)}\right\}^{-1} (\|B^{-1}\| + \sigma_2) \left\{\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + \left(\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial \theta}\| \|y_k\| + \|\frac{\partial g}{\partial x}\| q_1^k \mathcal{L}_0^{(k)}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[1 - \|\frac{\partial h}{\partial x}\| q_1^k \mathcal{L}_0^{(k)}\right]^{-1} \left(\|\Psi_\theta^{-1}\| + \sigma_1\right) \left[\|\frac{\partial \theta_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + \left(\|\frac{\partial h}{\partial x}\| q_1^k \mathcal{L}_1^{(k)} + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|\right) \|\frac{\partial y_k}{\partial \theta_N}\|\right]\right\},$$

и окончательно получаем

$$\|\frac{\partial y_k}{\partial \theta_N}\| \le \left(\|B^{-1}\| + \sigma_2\right) \times$$

$$\times \left\{1 - \frac{(\|B^{-1}\| + \sigma_2)(\|\Psi_\theta^{-1}\| + \sigma_1)\left(\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial \theta}\| \cdot \|y_k\| + \|\frac{\partial g}{\partial x}\| \, q_1^k \, \mathcal{L}_0^{(k)}\right)\left(\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \, \mathcal{L}_1^{(k)} q_1^k + \|\frac{\partial g}{\partial y}\|\right)}{\left(1 - \|\frac{\partial g}{\partial x}\| \, q_1^k \, \mathcal{L}_1^{(k)}\right) \, \left(1 - \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \, q_1^k \, \mathcal{L}_0^{(k)}\right)}\right\}^{-1} \times$$

$$\times \frac{\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + \left[1 - \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \, q_1^k \, \mathcal{L}_0^{(k)}\right]^{-1} \left(\|\frac{\partial g}{\partial \theta}\| + \|\frac{\partial B}{\partial \theta}\| \cdot \|y_k\| + \|\frac{\partial g}{\partial x}\| q_1^k \mathcal{L}_0^{(k)}\right) (\|\Psi_\theta^{-1}\| + \sigma_1) \|\frac{\partial \theta_{k+1}}{\partial \theta_N}\|}{1 - \, \|\frac{\partial g}{\partial x}\| \, q_1^k \, \mathcal{L}_1^{(k)}} \tag{3.37}$$

Неравенство (3.37) можно записать в следующем виде

$$\|\frac{\partial y_k}{\partial \theta_N}\| \le (\|B^{-1}\| + \sigma_3)\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + \sigma_4 \|\frac{\partial \theta_{k+1}}{\partial \theta_N}\|. \tag{3.38}$$

Для $\|\frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_N}\|$ получаем следующую оценку:

$$\|\frac{\partial \theta_k}{\partial \theta_N}\| \le (\|\Psi_\theta^{-1}\| + \sigma_5)\|\frac{\partial \theta_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + (\|B^{-1}\| \cdot \|\frac{\partial h}{\partial y}\| + \sigma_6)\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial \theta_N}\|. \tag{3.39}$$

Постоянные σ_3, σ_4, σ_5 и σ_6 можно сделать произвольно малыми за счет выбора r.

Подставим (3.38) и (3.39) в (3.34), получим

$$\begin{aligned}
\|\frac{\partial x_{k+1}}{\partial \theta_N}\| \le & \left\{(\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \cdot \|x_k\| + \|\frac{\partial f}{\partial \theta_k}\|) + (\|A\| + \|\frac{\partial f}{\partial x}\|) q_1^k \mathcal{L}_0^{(k)}\right\} \times \\
& \times \left\{(\|\Psi_\theta^{-1}\| + \sigma_5)\|\frac{\partial \theta_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + (\|B^{-1}\| \cdot \|\frac{\partial h}{\partial y}\| + \sigma_6)\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial \theta_N}\|\right\} + \\
& + \left\{(\|A\| + \|\frac{\partial f}{\partial x}\|) q_1^k \mathcal{L}_1^{(k)} + \|\frac{\partial f}{\partial y_k}\|\right\} \left\{(\|B^{-1}\| + \sigma_3)\|\frac{\partial y_{k+1}}{\partial \theta_N}\| + \sigma_1 \|\frac{\partial \theta_{k+1}}{\partial \theta_N}\|\right\}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Неравенство (3.40) имеет вид (3.33), причем

$$\begin{cases}
\mathcal{L}_0^{(k+1)} \le \dfrac{\|A\|\|\Psi_\theta^{-1}\| + \alpha_1}{q_1} \mathcal{L}_0^{(k)} + \alpha_2 \mathcal{L}_1^{(k)} + \alpha_3, \\[2ex]
\mathcal{L}_1^{(k+1)} \le \dfrac{\|A\|\|B^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial y}\| + \beta_1}{q_1} \mathcal{L}_0^{(k)} + \dfrac{\|A\|\|B^{-1}\| + \beta_2}{q_1} \mathcal{L}_1^{(k)} + \beta_3,
\end{cases}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ могут быть сделаны произвольно малыми за счет выбора r.

$$\mathcal{L}_0^{(k+1)} + \mathcal{L}_1^{(k+1)} \leq \frac{\|A\|\|\Psi_\theta^{-1}\| + \|A\|\|B^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial y}\| + \alpha_1 + \beta_1}{q_1}\mathcal{L}_0^{(k)} +$$

$$+ \left(\frac{\|A\|\|B^{-1}\| + \beta_2}{q_1} + \alpha_2\right)\mathcal{L}_1^{(k)} + (\alpha_3 + \beta_3).$$

Используя (3.24), получаем следующий результат: существует такое r_0', что при $r < r_0'$ сумма $\mathcal{L}_0^{(j)} + \mathcal{L}_1^{(j)}$ будет равномерно по j и N ограничена некоторой константой $\mathcal{D}'$. В частности $\mathcal{L}_0^{(N)} < \mathcal{D}'$, т.е. справедлива оценка $\|\frac{\partial x_N}{\partial \theta_N}\| \leq \mathcal{D}' q_1^N$. Лемма доказана.

Из лемм 2 и 3 легко получается оценка[23]

$$\|\frac{\partial \theta_N}{\partial x_0}\| < \mathcal{L}' \left(\|\Psi_\theta\| + \sigma\right)^N, \tag{3.41}$$

где $\sigma \to 0$ при $r \to 0$.[24]

Пусть

$$U_0 = \left[M_0(x_0, y_0, \theta_0) : \ \|x_0 - \varphi^+(\theta_0)\| \leq \varepsilon_0, \ \|y_0\| \leq \varepsilon_0, \ \theta_0 \in \mathbb{T}\right],$$

$$U_1 = \left[M_1(x_1, y_1, \theta_1) : \ \|x_1\| \leq \varepsilon_1, \ \|y_1 - \varphi^-(\theta_1)\| \leq \varepsilon_1, \ \theta_1 \in \mathbb{T}\right].$$

Выберем ε_0 настолько малым, чтобы в рассматриваемой окрестности $\mathbb{T}$

$$T^i M_0 \cap U_0 = \emptyset,$$

где $i \neq 0$ и $M_0 \in U_0$. Аналогичное ограничение наложим на ε_1.

---

[23]По существу – это неравенство (3.26). Совершенно аналогично получается оценка

$$\|\frac{\partial \theta_N}{\partial \theta_0}\| < \mathcal{L}' \left(\|\Psi_\theta\| + \sigma\right)^N.$$

[24]Таким образом, доказанные в Леммах 2 и 3 результаты можно представить в следующем виде: при выполнении условий

$$\|B^{-1}\| \cdot \|\Psi_\theta\| < 1, \qquad \|A\| \cdot \|\Psi_\theta\| < 1, \tag{3.42}$$

для решения краевой задачи (3.8) выполнены неравенства

$$\left\|\frac{\partial y_0}{\partial(x_0, \theta_0)}\right\| \leq L\left(\|B^{-1}\| \cdot \|\Psi_\theta\| + \sigma\right)^N, \quad \left\|\frac{\partial x_N}{\partial(x_0, \theta_0)}\right\| \leq L\left(\|A\| \cdot \|\Psi_\theta\| + \sigma\right)^N, \quad \left\|\frac{\partial \theta_N}{\partial(x_0, \theta_0)}\right\| \leq L\left(\|\Psi_\theta\| + \sigma\right)^N, \tag{3.43}$$

где $L > 0$ и $\sigma > 0$ – константы, не зависящие от N, причем σ может быть сделана сколь угодно малой за счет уменьшения r – размера окрестности седлового тора $\mathbb{T}$. Можно также убедиться, что оценки (3.43) не меняются, если добавить в них и производные по y_N.

Лемма 4. Для любого $N > \bar{N}_1$ отображение T^N из U_0 в U_1 определено и записывается в виде:[25]

$$\begin{cases} \theta_1 = \theta_N(x_0, y_N, \theta_0), & (43a) \\ x_1 = x_N(x_0, y_N, \theta_0), & (43b) \\ y_0 = y_0(x_0, y_N, \theta_0). & (43c) \end{cases}$$

Обозначим через σ_N^0 область определения $T^N : U_0 \to U_1$. Из вида T^N следует, что σ_N^0 расслаивается на поверхности (43c), гладко стремящиеся к $y_0 = 0$ при $N \to \infty$. Заметим, что $\sigma_{N_1}^0 \cap \sigma_{N_2}^0 = \emptyset, \sigma_{N_1}^1 \cap \sigma_{N_2}^1 = \emptyset$, где $\sigma_N^1 = T^N \sigma_N^0$ и $N_1 \neq N_2$.

Отображение $T^{p_1+p_2}$ в окрестности тора γ^-, которой можно считать U_1, запишется в виде

$$\bar{x}_0 = \mathcal{F}(x_1, y_1, \theta_1), \;\; \bar{y}_0 = \mathcal{G}(x_1, y_1, \theta_1), \;\; \bar{\theta}_0 = \mathcal{H}(x_1, y_1, \theta_1). \tag{3.44}$$

По предположению $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ пересекаются грубо, и уравнения γ^- и γ^+ записываются в виде (3.7). Для выполнения этих условий достаточно, чтобы[26]

$$det(\mathcal{G}_{y_1}) \neq 0, \qquad det \begin{pmatrix} \mathcal{G}_{y_1} & \mathcal{G}_{\theta_1} \\ \mathcal{H}_{y_1} & \mathcal{H}_{\theta_1} \end{pmatrix} \neq 0. \tag{3.45}$$

При выполнении (3.45) уравнение $\mathfrak{M}^-$ можно записать[27] в виде

$$x_0 = \varphi_0^0(y_0, \theta_0), \tag{3.46}$$

где φ_0^0 - гладкая функция, определенная при $y_0\| \leq \varepsilon_0'$, периодическая по θ_0 с периодом 1, и

$$\max\left(\|\frac{\partial \varphi_0^0}{\partial y_0}\|, \|\frac{\partial \varphi_0^0}{\partial \theta_0}\| \right) \leq \mathcal{L}_0.$$

Предположим, что[28]

$$\mathcal{L}_0 < \frac{1 - \frac{\|A\| \cdot \|\Psi_\theta^{-1}\|}{q_2}}{\|\Psi_\theta^{-1}\| \cdot \|\frac{\partial h}{\partial x}\|}, \tag{3.49}$$

[25]По существу, здесь фиксируется обозначение (θ_N, x_N, y_0) для решения краевой задачи (3.8) как функции от (x_0, y_N, θ_0). Доказательства лемма не требует, т.к. существование и единственность решения доказаны в Леммах 1 и 2. Нужно только заметить, что для того, чтобы $\|x_N\| \leq \varepsilon_1$ и $\|y_0\| \leq \varepsilon_0$ (т.е. чтобы соответствующие точки M_1 и M_0 лежали в U_1 и U_0), число итераций N должно быть достаточно большим, см. (3.9).

[26]Когда локальные сильно-устойчивое и сильно-неустойчивое инвариантные слоения на устойчивом и, соответственно, неустойчивом многообразии $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ распрямлены, т.е. их слои записываются в виде $\{y = 0, (x, \theta) = const\}$ и, соответственно, $\{x = 0, (y, \theta) = const\}$, то первое из условий (3.45) означает, что устойчивое многообразие $\mathfrak{M}^+$ трансверсально сильно-неустойчивому слоению в точках гомоклинического тора γ^-, а второе – что неустойчивое многообразие $\mathfrak{M}^-$ трансверсально сильно-устойчивому слоению в точках гомоклинического тора γ^+; а следовательно, по инвариантности, трансверсальность соответствующих многообразий и слоений имеет место во всех точках гомоклинической трубы Γ_0.

[27]вблизи гомоклинического тора γ^+

[28]Как видно из вычислений в доказательстве Леммы 5, условия (3.49),(3.50) необходимо заменить на

$$\frac{\|\Psi_\theta^{-1}\|}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\| \cdot \|\frac{\partial h}{\partial x}\| \, \mathcal{L}_0} \left(\|A\| + \|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \frac{r}{\mathcal{L}_0} \right) < q_2 < 1. \tag{3.47}$$

Это условие отличается от условия (3.49) членом $\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| \frac{r}{\mathcal{L}_0}$, который при построении оценок (3.61), (3.62) был

$$\|\Psi_\theta^{-1}\|\|B^{-1}\| < 1, \tag{3.50}$$

где $q_2 > \max(q_1, q)$ и $\|\Psi_\theta^{-1}\|\|B^{-1}\| < q_2 < 1$.

Введем пространство H^0 гладких поверхностей $\mathcal{P}^0$, уравнения которых записываются в виде $x_0 = \varphi_0(y_0, \theta_0)$, где функции φ_0 определены при $\|y_0\| \le \varepsilon_0'/2$, периодичны по θ_0 с периодом 1 и удовлетворяют условию (3.47) и условию

$$\|\varphi_0(0, \theta_0) - \varphi^+(\theta_0)\| \le \varepsilon_0/2. \tag{3.51}$$

При отображении T^N произвольная поверхность из H^0 переходит в некоторую поверхность $x_N = \varphi_N(y_N, \theta_N)$.

Лемма 5. При выполнении условий (3.49), (3.50), (3.51) и условий предыдущих лемм[29] справедливы оценки:

$$\|\frac{\partial x_N}{\partial \theta_N}\| < \mathcal{L}_0 q_2^N, \qquad \|\frac{\partial x_N}{\partial y_N}\| < \mathcal{L}_0 q_2^N. \tag{3.52}$$

Доказательство.

$$\begin{cases} \theta_1 = \Psi(\theta_0) + h(\varphi_0(y_0, \theta_0), y_0, \theta_0), \\ y_1 = B(\theta_0) y_0 + g(\varphi_0(y_0, \theta_0), y_0, \theta_0). \end{cases} \tag{3.53}$$

Продифференцируем (3.53) по θ_1:

$$1 = \Psi_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0} + \frac{\partial h}{\partial \theta_0}\right)\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial h}{\partial y_0}\right)\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1},$$

отсюда

$$\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\| \le \frac{\|\Psi_\theta^{-1}\| + \alpha}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|}\left[1 + \left(\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y_0}\|\right)\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1}\|\right]. \tag{3.54}$$

$$0 = B(\theta_0)\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} + \left(\frac{\partial g}{\partial x_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial g}{\partial y_0}\right)\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial B}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} y_0 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0} + \frac{\partial g}{\partial \theta_0}\right)\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1},$$

отсюда

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1}\| < \tilde{\alpha}\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\|; \tag{3.55}$$

в рукописи утерян. Сути дела это не меняет, просто делает ограничения на C^1-норму функции φ_0^0 более сильным. При этом, как легко извлечь из доказательства Леммы 5 (см. примечания к формулам (3.67), (3.68), (3.69)), если сильно-устойчивое слоение на устойчивом многообразии $\mathfrak{M}^+$ вблизи седлового тора $\mathbb{T}$ распрямлено, т.е. $h \equiv 0$ при $y = 0$ (см. примечание к формуле (3.7)), то условие (3.47) не нужно, достаточно потребовать только

$$\|\Psi_\theta^{-1}\| \cdot \|A\| < q_2 < 1. \tag{3.48}$$

Таким образом, для выполнения Леммы 5 достаточно нормальной гиперболичности тора $\mathbb{T}$ и условий трансверсальности (3.45). Отметим также, что условие (3.50) в доказательстве Леммы 5 не нужно.

[29] В вычислениях используются только условия (3.47), а также малость $\|\frac{\partial h}{\partial(x,y)}\|$ и $\|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\|$. Условия малости на самом деле не существенны – их всегда можно добиться перемасштабированием переменных (x, y) на некоторую достаточно большую константу. При этом на ту же самую константу умножатся r и $\mathcal{L}_0$, но условие (3.47), как легко видеть, не изменится.

$\alpha, \tilde{\alpha} \to 0$ при $r \to 0$. [30]

Подставляя (3.55) в (3.54), получим

$$\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\| \leq \frac{\|\Psi_\theta^{-1}\| + \alpha'}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|}. \tag{3.56}$$

Подставляя (3.56) в (3.55), получим

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1}\| \leq \tilde{\alpha}', \tag{3.57}$$

где $\alpha', \tilde{\alpha}' \to 0$ при $r \to 0$.

Продифференцируем соотношения (3.53) по y_1.

$$0 = \Psi_\theta \frac{\partial \theta_0}{\partial y_1} + (\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0} + \frac{\partial h}{\partial \theta_0})\frac{\partial \theta_0}{\partial y_1} + (\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial h}{\partial y_0})\frac{\partial y_0}{\partial y_1},$$

$$\|\frac{\partial \theta_0}{\partial y_1}\| \leq \frac{\|\Psi_\theta^{-1}\| + \beta}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|}\left(\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y_0}\|\right)\|\frac{\partial y_0}{\partial y_1}\|; \tag{3.58}$$

$$1 = (B(\theta_0) + \frac{\partial g}{\partial x_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0} + \frac{\partial g}{\partial y_0})\frac{\partial y_0}{\partial y_1} + \frac{\partial B}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta}{\partial y_1}y_1 + (\frac{\partial g}{\partial x_0}\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0} + \frac{\partial g}{\partial \theta_0})\frac{\partial \theta_0}{\partial y_1}.$$

Отсюда[31]

$$\|\frac{\partial y_0}{\partial y_1}\| < \|B^{-1}\| + \tilde{\beta}, \tag{3.59}$$

β и $\tilde{\beta}$ величины порядка r. Подставляя (3.59) в (3.58), получим

$$\|\frac{\partial \theta_0}{\partial y_1}\| \leq \frac{(\|\Psi_\theta^{-1}\| + \beta)(\|B^{-1}\| + \tilde{\beta})(\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y_0}\|)}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|} \tag{3.60}$$

$$x_1 = A(\theta_0)\varphi_0(y_0, \theta_0) + f(\varphi_0(y_0, \theta_0), y_0, \theta_0)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} = A(\theta_0)(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}) + \frac{\partial A}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\varphi_0(y_0, \theta_0) +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}) + \frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}$$

[30] При уменьшении размера r окрестности седлового тора $\mathbb{T}$ нормы производных $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial g}{\partial (x,y,\theta)}$ стремятся к нулю. Однако, поскольку гомоклинический тор γ^+ должен лежать в r-окрестности тора $\mathbb{T}$, то если мы уменьшаем r, мы должны заменить тор γ^+ на какую-то его итерацию $T^p\gamma^+$, соответственно функция φ_0^0 изменится и, априори, норма $\frac{\partial \varphi_0}{\partial (y_0, \theta_0)}$ может вырасти, даже если норма $\frac{\partial g}{\partial (x,y,\theta)}$ станет меньше. Поэтому, чтобы получить малость $\tilde{\alpha}$, нужно также уменьшить ε_0 – размер окрестности тора γ^+, в которой расположена поверхность $\mathcal{P}^0$. Тогда y_0 будет мало на $\mathcal{P}^0$, поэтому $\frac{\partial g}{\partial (x_0, \theta_0)}$ может быть сделано сколь угодно малым (см. (3.6)). Таким образом действительно можно добиться выполнения неравенств (3.55) и (3.56), (3.57) с произвольно малыми $\tilde{\alpha}$, α', $\tilde{\alpha}'$.

[31] Здесь также надо требовать малость ε_0; см. предыдущее примечание.

Используя оценки (3.55) и (3.56) получаем[32]

$$\|\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1}\| \le \frac{\|\Psi_\theta^{-1}\| + \tilde{\beta}'}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|} \left[(\|A\| + \beta') \max\{\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|, \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\|\} + (\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| + \beta')\|\varphi_0\| \right] . \quad (3.61)$$

Аналогично получаем оценку на $\|\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\|$, используя (3.59) и (3.60):

$$\|\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\| \le (\|A\| + \beta_1) \left[\left(\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\| + \|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\| \cdot \|\varphi_0\| \right) (\|B^{-1}\| + \tilde{\beta}_1) + \right.$$

$$\left. + \left(\|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\| + (\|\frac{\partial A}{\partial \theta}\| + \beta')\|\varphi_0\| \right) \frac{(\|B^{-1}\|\|\Psi_\theta^{-1}\| + \beta_1)(\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial y_0}\| + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|)}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial \varphi_0}{\partial \theta_0}\|} \right], \quad (3.62)$$

где $\beta', \tilde{\beta}', \beta_1, \tilde{\beta}_1, \beta_2 \to 0$ при $r \to 0$. Проверим выполнение неравенств:[33]

$$\frac{\|A\|\|\Psi_\theta^{-1}\|\mathcal{L}_0}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0} < \mathcal{L}_0 q_2; \quad (3.63)$$

$$\mathcal{L}_0\|A\| \left\{ \|B^{-1}\| + \frac{\|B^{-1}\|\|\Psi_\theta^{-1}\|(\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0 + \|\frac{\partial h}{\partial y}\|)}{1 - \|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0} \right\} < \mathcal{L}_0 q_2. \quad (3.64)$$

Неравенство (3.63) следует из (3.49), а (3.64) – из (3.24)[34].

Предположим теперь, что

$$\|\frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta_k}\| < \mathcal{L}_0 q_2^k, \qquad \|\frac{\partial \varphi_k}{\partial y_k}\| < \mathcal{L}_0 q_2^k, \quad (3.65)$$

и докажем, что

$$\|\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial \theta_{k+1}}\| < \mathcal{L}_0 q_2^{k+1}, \qquad \|\frac{\partial \varphi_{k+1}}{\partial y_{k+1}}\| < \mathcal{L}_0 q_2^{k+1}. \quad (3.66)$$

---

[32]Члены с φ_0 в этом и следующем неравенствах в рукописи пропущены (хотя в предыдущем уравнении на $\frac{\partial x_1}{\partial \theta_1}$ они выписаны). В неравенстве (3.61) член с $\|\varphi_0\|$ приходит из членов $\frac{\partial A}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\varphi_0(y_0, \theta_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}$ в предыдущем уравнении, а в неравенстве (3.62) – из $\frac{\partial f}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial y_1} + \frac{\partial f}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial y_1}$. Мы оцениваем эти члены, замечая, что так как $f \equiv 0$ при $x = 0$ (см. (3.6)), то $\|\frac{\partial f}{\partial y_0}\| \le \|\frac{\partial^2 f}{\partial(x_0, y_0)}\| \cdot \|\varphi_0\|$ и $\|\frac{\partial f}{\partial \theta_0}\| \le \|\frac{\partial^2 f}{\partial(x_0, \theta_0)}\| \cdot \|\varphi_0\|$, причем $\|\frac{\partial^2 f}{\partial(x_0, \theta_0)}\| \to 0$ при $r \to 0$. Наличие этих членов не влияет на результат, но требует модификации условий на константу $\mathcal{L}_0$, см. (3.47).

[33]они, вернее их модификация (3.69), нужны для того, чтобы доказывать лемму индукцией по числу итераций отображения, см. (3.65),(3.66).

[34]т.е. просто из предположения о достаточной малости $\|\frac{\partial h}{\partial y}\|$, см. примечание к условиям Леммы 5.

Совершенно аналогично оценкам (3.61) и (3.62) получаем[35]

$$\|\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial\theta_{k+1}}\| \le \frac{\|\Psi_\theta^{-1}\|+\beta'}{1-\|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\cdot\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\theta_k}\|}\times$$
$$\times\left[(\|A\|+\beta')\max\{\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\theta_k}\|,\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_k}\|\}+(\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|+\beta')\|\varphi_k\|\right], \tag{3.67}$$

$$\|\frac{\partial\varphi_{k+1}}{\partial y_{k+1}}\| \le (\|A\|+\beta_1)\left[\left(\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_k}\|+\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\|\cdot\|\varphi_k\|\right)(\|B^{-1}\|+\tilde\beta_1)+\right.$$
$$\left.+\left(\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\theta_k}\|+(\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|+\beta')\|\varphi_k\|\right)\frac{(\|B^{-1}\|\|\Psi_\theta^{-1}\|+\beta_1)(\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\cdot\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial y_k}\|+\|\frac{\partial h}{\partial y}\|)}{1-\|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\cdot\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial\theta_k}\|}\right]. \tag{3.68}$$

Подставляя (3.65) в (3.67), (3.68) и используя неравенства (3.63), (3.64), [36] получаем (3.66).

Лемма доказана.

Т.к. каждая точка поверхности $x_N = \varphi_N(\theta_N, y_N)$ является решением краевой задачи (3.8), то справедлива оценка (3.9) Леммы 1. Поэтому

$$\|x_N(y_N,\theta_N)\|_{C^1} < \mathcal{L}_0 q_2^N. \tag{3.70}$$

---

[35]При этом необходимо использовать равномерную малость величины $\alpha_0 = \|\frac{\partial g}{\partial(x_k,\theta_k)}\|\cdot\|\frac{\partial\varphi_k}{\partial(\theta_k,y_k)}\|$, см. примечание к формуле (3.55). При всех $k\ge\bar k$ малость α_0 следует из предположения индукции (3.65), если $\bar k$ достаточно велико, т.к. $q_2<1$. Как только подходящее такое $\bar k$ найдено, малость α_0 при всех $k<\bar k$ достигается за счет выбора ε_0 (область изменения y_0) настолько малой, что y_k будут достаточно малы, и соответственно будут малы $\frac{\partial g}{\partial(x_k,\theta_k)}$ при всех $k<\bar k$, а $\frac{\partial\varphi_k}{\partial(\theta_k,y_k)}$ будут оставаться равномерно ограничены по предположению индукции.

[36]Неравенств (3.63),(3.64) недостаточно, поскольку надо учитывать члены с $\|\varphi_k\|$, пропущенные в рукописи. Как отмечается в рукописи перед неравенством (3.70), для функций $x_k=\varphi_k(\theta_k,y_k)$ справедлива оценка (3.9) Леммы 1. Поэтому, в частности, $\|\varphi_k\|\le r$. Учитывая это, а также то, что $\|\frac{\partial h}{\partial y}\|$ и $\|\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\|$ могут считаться сколь угодно малыми, так же как и коэффициенты β, мы получаем, что для того, чтобы провести индукцию и вывести (3.66) из (3.65) и (3.67),(3.68), надо чтобы выполнялась следующая модификация неравенств (3.63),(3.64):

$$\frac{\|\Psi_\theta^{-1}\|}{1-\|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0 q_2^k}\left(\|A\|\mathcal{L}_0+\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|r\right)<\mathcal{L}_0 q_2;$$
$$\|A\|\cdot\|B^{-1}\|\left\{\mathcal{L}_0+\left(\mathcal{L}_0+\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|r\right)\frac{\|\Psi_\theta^{-1}\|\cdot\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0 q_2^k}{1-\|\Psi_\theta^{-1}\|\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0 q_2^k}\right\}<\mathcal{L}_0 q_2. \tag{3.69}$$

Оба этих неравенства выполнены при всех $k\ge 0$, если выполнено условие (3.47) (напомним, что $\|A\|<1$, $\|B^{-1}\|<1$). Если координаты выбраны так, что сильно-устойчивое слоение распрямлено на $\mathfrak{M}^+$, т.е. $h(x,0,\theta)\equiv 0$, то член $\|\frac{\partial h}{\partial x}\|\mathcal{L}_0 q_2^k$ можно сделать, для произвольно большого $\mathcal{L}_0$, равномерно малым при всех k за счет уменьшения ε_0 (см. предыдущее примечание). Тогда условия (3.69) превращаются в

$$\|\Psi_\theta^{-1}\|\left(\|A\|+\|\frac{\partial A}{\partial\theta}\|\frac{r}{\mathcal{L}_0}\right)<q_2,\qquad \|A\|\cdot\|B^{-1}\|<q_2,$$

чего всегда можно добиться, выбрав $\mathcal{L}_0$ достаточно большим, если выполнено условие (3.48).

Обозначим через H_N^0 пространство поверхностей $\mathcal{P}^0 \cap \sigma_N^0$. Рассмотрим некоторую поверхность из H_N^0

$$x_0 = \varphi_0(y_0, \theta_0). \tag{3.71}$$

Но y_0 есть нулевая y-компонента решения краевой задачи (3.8) с условиями (x_0, y_N, θ_0), т.е.

$$y_0 = y_0(x_0, y_N, \theta_0). \tag{3.72}$$

Подставляя (3.72) в (3.71), получим

$$F_1 = x_0 - \varphi_0(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0) = 0. \tag{3.73}$$

Это уравнение неявной функции x_0 от независимых переменных y_N, θ_0.
Детерминант $det\left[\frac{\partial F}{\partial x_0}\right] > 1 - \tilde{c}q^N$ и при достаточно большом N не равен 0.[37]

Каждой функции из H_N^0 $x_0 = \varphi_0(y_0, \theta_0)$ соответствует некоторая функция $x_0 = \tilde{\varphi}_0(y_N, \theta_0)$. Введем следующую метрику в H_N^0:

$$\rho_1(\varphi_0, \varphi_0') = \|\tilde{\varphi}_0 - \tilde{\varphi}_0'\|_C$$

Лемма 6. Существует такое $\bar{N}_2 \geq \bar{N}_1$, что при $N > \bar{N}_2$ метрика ρ и непрерывная метрика $\rho(\varphi_0, \varphi_0') = \|\varphi_0 - \varphi_0'\|_C$ эквивалентны.

Доказательство. Пусть $x_0 = \varphi_0(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0)$ и $x_0' = \varphi_0'(y_0(x_0', y_N, \theta_0), \theta_0)$. Тогда[38]

$$x_0 - x_0' = \varphi_0(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0) - \varphi_0'(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0) + \varphi_0'(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0) - \varphi_0'(y_0(x_0', y_N, \theta_0), \theta_0)$$

$$\rho_1(\varphi_0, \varphi_0') \leq \rho(\varphi_0, \varphi_0') + \|\frac{\partial \varphi_0'}{\partial y_0}\| \cdot \|\frac{\partial y_0}{\partial x_0}\| \cdot \rho_1(\varphi_0, \varphi_0')$$

$$\rho_1(\varphi_0, \varphi_0') \leq \frac{1}{1 - \mathcal{L}_0 L q^N} \rho(\varphi_0, \varphi_0') \tag{3.74}$$

С другой стороны

$$\varphi_0(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0) - \varphi_0'(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0) = x_0 - x_0' + \varphi_0'(y_0(x_0', y_N, \theta_0), \theta_0) - \varphi_0'(y_0(x_0, y_N, \theta_0), \theta_0)$$

$$\rho(\varphi_0, \varphi_0') \leq \rho_1(\varphi_0, \varphi_0')(1 + \mathcal{L}_0 L q^N). \tag{3.75}$$

Неравенства (3.74) и (3.75) доказывают лемму.

Обозначим оператор $\varphi_0 \to \varphi_N$ через $\mathcal{T}_N^+$.

[37] оценка на детерминант получается в силу (3.13)

[38] Здесь и ниже используется оценка (3.13) на $\frac{\partial y_0}{\partial x_0}$, т.е. в условия леммы надо включить неравенство (3.12).

Лемма 7. Пусть выполнены условия[39]

$$\|A\| \cdot \|\Psi_\theta\| \cdot \|\Psi_\theta^{-1}\| < 1. \tag{3.77}$$

Тогда справедлива оценка

$$\rho_C(\mathcal{T}_N^+ \varphi_0', \mathcal{T}_N^+ \varphi_0'') < C\tilde{q}^N \rho_1(\varphi_0', \varphi_0''), \tag{3.78}$$

где $\tilde{q} < 1$. Константа C не зависит от N.

Доказательство. Функциям φ_0', φ_0'' соответствуют функции $\tilde{\varphi}_0', \tilde{\varphi}_0''$. Любая точка поверхности $x_N' = \varphi_N'(y_N, \theta_N')$ есть решение краевой задачи (3.8) с условиями $(x_0' = \tilde{\varphi}_0'(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0)$. Любая точка поверхности $x_N'' = \varphi_N''(y_N, \theta_N'')$ есть решение краевой задачи с условиями $(x_0'' = \tilde{\varphi}_0''(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0)$:

$$x_N' = x_N(\tilde{\varphi}_0'(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0), \qquad x_N'' = x_N''(\tilde{\varphi}_0''(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0);$$
$$\theta_N' = \theta_N(\tilde{\varphi}_0'(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0), \qquad \theta_N'' = \theta_N(\tilde{\varphi}_0''(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0).$$

$$\varphi_N'(y_N, \theta_N') - \varphi_N''(y_N, \theta_N') = x_N' - x_N' + \varphi_N''(y_N, \theta_N'') - \varphi_N''(y_N, \theta_N')$$

$$\|\varphi_N' - \varphi_N''\| \le \|x_N(\tilde{\varphi}_0'(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0) - x_N(\tilde{\varphi}_0''(y_N, \theta_0), y_N, \theta_0)\| + \|\frac{\partial \varphi_N''}{\partial \theta_N}\| \cdot \|\theta_N' - \theta_N''\| \le$$

$$\le \|\frac{\partial x_N}{\partial x_0}\| \, \rho_1(\varphi_0', \varphi_0'') + \|\frac{\partial x_N''}{\partial \theta_N}\| \cdot \|\frac{\partial \theta_N}{\partial x_0}\| \, \rho_1(\varphi_0', \varphi_0'').$$

Используя оценки (3.25), (3.41) и (3.77) получаем (3.78).[40]

Теорема 1.[41] Существует такое $\bar{N}_3 \ge \bar{N}_2$, что при всех $i, j \ge \bar{N}_3$
1) $T^{j+p_1+p_2}\sigma_j^0 \cap \sigma_i^0 \ne \emptyset$,
2) определены операторы $\mathcal{T}_{ij}^+ : H_j^0 \to H_i^0$,
3) $\rho_1(\mathcal{T}_{ij}^+ \varphi_0', \mathcal{T}_{ij}^+ \varphi_0'') < q'\rho_1(\varphi_0', \varphi_0'')$, где $q' < 1$.

---

[39] В доказательстве используется более сильное условие

$$q_2\|\Psi_\theta\| < 1, \tag{3.76}$$

где q_2 - показатель из Леммы 5, см. (3.52), т.е. q_2 определяется условием (3.47). Если выбрать координаты вблизи седлового тора $\mathbb{T}$ так, что сильно-устойчивое слоение на устойчивом многообразии будет распрямлено, то условие (3.47) не нужно, и q_2 определяется из условия (3.48), что приводит к условию (3.77).

[40] Используется также оценка (3.52) для $\|\frac{\partial x_N''}{\partial \theta_N}\|$

[41] Эта теорема (Теорема 1 статьи в ДАН) подводит итог предыдущим вычислениям: оператор $\mathcal{T}_{ij}^+$ переводит поверхности, принадлежащие пространству H_j^0 в пересечения с σ_i^0 их образов под действием отображения $T^{j+p_1+p_2}$. Поскольку, как доказано в Лемме 7, расстояние между любыми двумя такими поверхностями под действием отображения T^j сжимается сколь угодно сильно при достаточно больших j, то возможное ограниченное растяжение под действием отображения $T^{p_1+p_2}$ этого сжатия не перевесит, т.е. все операторы $\mathcal{T}_{ij}^+$ – сжимающие. Условия, при которых эта теорема доказана здесь – это неравенства (3.12),(3.77) и второе из условий трансверсальности (3.45); если сильно-устойчивое слоение на устойчивом многообразии не распрямлено, то надо также потребовать выполнения неравенств (3.76),(3.47).

III. Пусть

$$\pi = (..., i_{-1}, i_0, i_1, ..., i_\rho, ...) \tag{3.79}$$

- некоторая бесконечная в обе стороны последовательность, составленная из целых чисел $i_\rho \geq \bar{N}_3$. Последовательности π мы сопоставим следующую последовательность

$$\ldots \to H^0_{i_{\rho-1}} \overset{\mathcal{T}^+_{i_\rho i_{\rho-1}}}{\longrightarrow} H^0_{i_\rho} \overset{\mathcal{T}^+_{i_{\rho+1} i_\rho}}{\longrightarrow} H^0_{i_{\rho+1}} \to \ldots \tag{3.80}$$

Лемма 8.[42] Пусть дана последовательность полных метрических пространств X_i с метрикой $\rho_i, i = 0 \pm 1, \pm 2, ...$, и последовательность операторов $\mathcal{A}_i$, удовлетворяющих следующим условиям:
1) $\sup \rho_i(x'_i, x_i") < D$,
2) $\mathcal{A}_i(X_i) \subset X_{i+1}$,
3) $\rho_{i+1}(\mathcal{A}_i x'_i, \mathcal{A}_i x''_i) < q\rho_i(x'_i, x''_i)$, где $q < 1$.
Тогда существует единственная последовательность

$$(..., x^*_{-1}, x^*_0, ..., x^*_i, ...), x^*_i \subset X_i, \tag{3.81}$$

удовлетворяющая условиям $x^*_{i+1} = \mathcal{A}_i x^*_i$.

Применяя эту лемму к (3.80), получаем, что последовательности π соответствует единственная устойчивая последовательность поверхностей $\{\mathcal{P}^\pi_{i_\rho}\}$, уравнения которых $x_0 = \varphi^\pi_{i_\rho}(y_0, \theta_0)$, удовлетворяющая условиям

$$T^{-i_\rho - p_1 - p_2}\ P^\pi_{i_{\rho+1}} \subset P^\pi_{i_\rho}. \tag{3.82}$$

Предположим теперь, что уравнение $\mathfrak{M}^+$ в окрестности γ^- записывается в виде $y_N = \psi^0_0(x_N, \theta_N)$ и выполнены следующие условия:[43]
1) ψ^0_0 - гладкая функция, определенная при $\|x_N\| < \epsilon^0_1$, периодическая по θ_N с периодом 1, и
2)

$$\frac{\|\Psi_\theta\|}{1 - \|\Psi_\theta\| \cdot \|\frac{\partial \bar{h}}{\partial y}\|\ \mathcal{L}_1} \left(\|B^{-1}\| + \|\frac{\partial B^{-1}}{\partial \theta}\| \frac{r}{\mathcal{L}_1} \right) < q_3 < 1, \qquad q_3 \|\Psi^{-1}_\theta\| < 1, \tag{3.83}$$

$$\|B^{-1}\| \cdot \|\Psi^{-1}_\theta\| \cdot \|\Psi_\theta\| < 1, \qquad \|A\| \cdot \|\Psi^{-1}_\theta\| < 1. \tag{3.84}$$

При этих предположениях аналогичным образом устанавливается, что любой последовательности π, где $i_\rho \geq \bar{N}'_3$ соответствует единственная устойчивая в отрицательном направлении последовательность поверхностей $\{Q^\pi_{i_\rho}\}$, уравнения которых $y_0 = \psi^\pi_{i_\rho}(x_0, \theta_0)$, где $\Psi^\pi_{i_\rho}$ определены при $\|x_0 - \varphi^+(\theta_0)\| < \varepsilon_0$, периодичны по θ_0, графики их лежат в $\sigma^0_{i_\rho}$, причем $\psi^\pi_{i_\rho} \to 0$ вместе с производными при $i_\rho \to \infty$.

[42] Эта лемма доказана в работе Л.П.Шильникова [“Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа”.- Мат. сб., 1967, т.74(3), 378-397], приведенной также в этом издании.

[43] Они получаются из условий Теоремы 1 заменой x на y и переходом к обратному отображению. В рукописи здесь выписаны условия, полученные из неравенств (3.49), (3.50). Мы заменили их на исправленные условия, которые получаются из неравенств (3.47), (3.76). Здесь $\bar{h}$ – это функция, такая, что $\theta = \Psi^{-1}(\theta) + \bar{h}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta})$

При всех $i_\rho \geq \bar{N} \geq \max(\bar{N}_3, \bar{N}_3')$ поверхности $\mathcal{P}^\pi_{i_\rho}$, $Q^\pi_{i_\rho}$ пересекаются по единственному l-мерному тору $\gamma^\pi_{i_\rho}$. Из построения следует, что $\Gamma^\pi = (..., \gamma^\pi_{i_\rho}, \gamma^\pi_{i_{\rho+1}}, ...)$ есть инвариантная труба.[44]

Рассмотрим множество $\mathcal{M}$ точек $\{M_{i_\rho}(x_{i_\rho}, y_{i_\rho}, \theta_{i_\rho})\}$ лежащих в r-окрестности тора $\mathbb{T}$ и таких, что

$$i_\rho \geq \bar{N}, \qquad T^{p_1+p_2+i_\rho} M_{i_\rho} = M_{i_{\rho+1}}.$$

Лемма 9. $\mathcal{M} \subset \Gamma^\pi$.

Доказательство. Рассмотрим в каждом пространстве $H^0_{i_\rho}$ пучок поверхностей, содержащих точку M_{i_ρ} и обозначим его через $H^{\mathcal{M}}_{i_\rho}$. Очевидно, $H^M_{i_\rho}$ замкнуто. Операторы $(\mathcal{T})^+_{\rangle|}$ можно рассмотреть только на $H^{\mathcal{M}}_{i_\rho}$. Тогда, применяя предыдущие рассуждения, получим, что каждая поверхность $\mathcal{P}^\pi_{i_\rho}$ принадлежит соответственно $H^{\mathcal{M}}_{i_\rho}$.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь множество N^- труб, асимптотических к $\mathbb{T}$ только при $n \to -\infty$ и целиком лежащих в достаточно малой окресности Γ_0. Пусть $\tilde{\Gamma} \in N^-$. Тогда найдется тор $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ и

$$\tilde{\gamma} \in \sigma^0_{a_1}, \qquad T^{p_1+p_2+a_1}\tilde{\gamma} \in \sigma^0_{a_2}, \ldots$$

Т.о. получаем, что трубе $\tilde{\Gamma}$ соответствует единственная бесконечная в одну сторону последовательность $\tilde{\pi} = (a_1, a_2, \ldots)$. Покажем, что последовательности $\tilde{\pi}$ соответствует единственная труба, ассимптотическая к $\mathbb{T}$ при $n \to -\infty$. Рассмотрим пространство поверхностей $\tilde{H}_0$, уравнения которых записываются в виде

$$x = \varphi(y, \theta),$$

где функции φ определены при $\|y\| < \tilde{r}_0, \theta \in \mathbb{T}$, $\varphi \in C^1$ и удовлетворяют условию (3.47). Преобразование T^N переводит $\tilde{H}_0$ в себя и является сжимающим в метрике ρ_1 при $N > \bar{N}_2$. Рассмотрим последовательность отображений

$$\ldots \xrightarrow{T^N} \tilde{H}_0 \xrightarrow{T^N} \tilde{H}_0 \xrightarrow{T^{N+p_1+p_2}} H^0_{a_1} \xrightarrow{\mathcal{T}^+_{a_2 a_1}} H^0_{a_2} \to \ldots$$

Эти отображения удовлетворяют Лемме 8. Следовательно, существует единственная последовательность поверхностей $\mathcal{P}^{\tilde{\pi}}$. В каждом экземпляре $\tilde{H}_0$ лежит единственная поверхность $\mathcal{P}_i$ (i - индекс, отмечающий экземпляры). В каждом пространстве $H^0_{a_k}$ имеется единственная поверхность $\mathcal{P}_{a_k}$.

---

[44]Таким образом, доказан основной результат – Теорема 2 статьи в ДАН (сюда же относится Лемма 9 ниже, которая, фактически, утверждает, что все траектории, не покидающие малой окрестности объединения $\mathbb{T} \cup \Gamma_0$ и не асимптотические к $\mathbb{T}$, лежат в какой-нибудь из построенных инвариантных труб Γ^π). Повторим использованные в доказательстве условия: это неравенства

$$\|B^{-1}\| \cdot \|\Psi_\theta^{-1}\| \cdot \|\Psi_\theta\| < 1, \qquad \|A\| \cdot \|\Psi_\theta\| \cdot \|\Psi_\theta^{-1}\| < 1, \tag{3.85}$$

и условие трансверсальности (в точках исходной гомоклинической трубы Γ_0) неустойчивого и устойчивого многообразий тора $\mathbb{T}$ сильно-устойчивому и, соответственно, сильно-неустойчивому слоениям. Когда координаты выбраны так, что эти слоения локально распрямлены, условие трансверсальности – это условия (3.45).

Точно так же, рассмотрим пространство поверхностей $\tilde{H}_1$, уравнения которых записываются в виде

$$y = \psi(x, \theta),$$

где ψ определены при $\|x\| \leq \tilde{r}_0, \theta \in \tau$, $\psi \in C^1$ и удовлетворяют условию (3.83). Рассмотрим последовательность отображений

$$\ldots H^1_{a_k} \overset{T^-_{a_k a_{k-1}}}{\longrightarrow} H^1_{a_k} \to \ldots \overset{T^-_{a_2 a_1}}{\longrightarrow} H_{a_1} \overset{T^{-a_1-p_1-p_2}}{\longrightarrow} \tilde{H}_1 \overset{T^{-N}}{\longrightarrow} \tilde{H}_1 \overset{T^{-N}}{\to} \ldots$$

Эти отображения также удовлетворяют условиям Леммы 8, следовательно, существует единственная последовательность поверхностей $Q^{\tilde{\pi}}$. В каждом $H^1_{a_k}$ и каждом экземпляре $\tilde{H}_1$ лежит единственная поверхность Q_i или Q_{a_k}.

$$T^{-a_i} Q_{a_i} \cup \mathcal{P}_{a_i} = \tilde{\gamma}_{a_i}$$

$$\mathcal{P}_i \cup Q_i = \tilde{\gamma}_i$$

Получаем инвариантную трубу

$$(\tilde{\gamma}_{-k}, \tilde{\gamma}_{-(k-1)}, \ldots, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_{a_1}, \ldots),$$

определяемую единственным образом по последовательности $\tilde{\pi}$. Т.к. при $n \to -\infty$ все пары $\tilde{\gamma}$ остаются в окрестности $\mathbb{T}$, то они лежат на $\mathfrak{M}^-$.

Доказана

Теорема 2. Множество труб N^- находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех бесконечных в одну сторону последовательностей, составленных из натуральных чисел.[45]

[45]Это первая часть утверждения Теоремы 3 статьи в ДАН, остальные утверждения доказываются аналогично.

1972 Математический Сборник т.88(130),№ 4, с. 475-492

О трёхмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I

Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников (Горький)

§ 1. **Введение. Формулировка основной теоремы.**

Одной из причин негрубости динамической системы является нарушение трансверсального характера пересечений устойчивых и неустойчивых многообразий состояний равновесия и периодических движений. До сих пор достаточно систематическое изучение негрубых систем, связанное с нарушением условий трансверсальности, проводилось лишь в случае систем, имеющих двоякоасимптотическую траекторию к грубому состоянию равновесия типа седло [1]-[4].

Настоящая работа связана с рассмотрением систем, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, т. е. с такой двоякоасимптотической траекторией к грубому периодическому движению седлового типа, по которой касаются устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения.

Рассмотрим динамическую систему (X_μ, M^3), где X_μ – векторное поле класса C^k, $k \geq 3$, непрерывно зависящее от параметра μ, а M^3 – трехмерное риманово многообразие класса C^∞. Предположим, что при достаточно малых μ система имеет грубое периодическое движение $\mathcal{L}_\mu$ седлового типа, имеющее при $\mu = 0$ гомоклиническую траекторию Γ_0. Обозначим через $\mathfrak{M}_0^+$ и $\mathfrak{M}_0^-$ соответственно устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения $\mathcal{L}_\mu$. Предположим, что

$$dim(W^+_{M_0} \cap W^-_{M_0}) = 2, \tag{1.1}$$

где $W^+_{M_0}$ и $W^-_{M_0}$ – касательные пространства к $\mathfrak{M}_0^+$ и $\mathfrak{M}_0^-$ в точке $M_0 \in \Gamma_0$. Условие (1.1) означает, что $\mathfrak{M}_0^+$ касается $\mathfrak{M}_0^-$ по Γ_0. Будем предполагать, что это касание первого порядка.

Пусть U – некоторая малая окрестность $\bar{\Gamma}_0$. Очевидно, $\mathcal{L}_\mu \in \mathcal{U}$ при μ достаточно малых. Поэтому U мы будем называть расширенной окрестностью периодического движения $\mathcal{L}_\mu$. Задача, которую мы будем решать в этой работе, состоит в изучении структуры множества N траекторий, целиком лежащих в расширенной окрестности U как при $\mu = 0$, так и при $\mu \neq 0$, но достаточно малых.

Пусть S–секущая к $\mathcal{L}_\mu$. Отображение $T_0 : S \longrightarrow S$ по траекториям, близким к $\mathcal{L}_\mu$, в некоторых локальных координатах может быть записано в виде:

$$\bar{x} = \lambda(\mu)x + f(x, y, \mu), \qquad \bar{y} = \gamma(\mu)y + g(x, y, \mu),$$

где $M^*(0, 0)$ $(0,\ 0)$ – неподвижная точка, соответствующая $\mathcal{L}_\mu$, $|\lambda(0)| < 1$, $|\gamma(0)| > 1$. Уравнение $\mathfrak{M}_\mu^+ \cap S : y = 0$, уравнение $\mathfrak{M}_\mu^- \cap S : x = 0$.

Пусть $M^-(0, y^-)$ и $M^+(x^+, 0)$ –точки пересечения траектории Γ_0 с секущей S. Без ограничения общности можно считать, что $x^+ > 0$, $y^- > 0$. Очевидно, существует такая окрестность II_1 точки M^-, что отображение $T_1 : S \longrightarrow S$ по траекториям, близким к глобальному

куску Γ_0, определено при всех достаточно малых μ. В локальных координатах (x, y) отображение T_1 будет иметь вид:

$$\bar{x} - x^+ = F(x, y - y^-, \mu), \quad \bar{y} = G(x, y - y^-, \mu),$$

где F и G определены на Π_1 и $F(0,0,0) = G(0,0,0) = 0$. В силу условия (1.1) $G_y(0,0,0) = 0$. Так как T_1 – диффеоморфизм, то $c = G_x(0,0,0) \neq 0$ и $b = F_y(0,0,0) \neq 0$.

Условие, что касание $\mathfrak{M}_0^+$ с $\mathfrak{M}_0^-$ по Γ_0 первого порядка, эквивалентно выполнению неравенства

$$d = G_{yy}(0,0,0) \neq 0, \tag{1.2}$$

Пусть $y - y^- = \varphi(x, \mu)$ – уравнение кривой $\varphi : G_y(x, y - y^-, \mu) = 0$. Тогда отображение T_1 можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\bar{x} - x^+ = F(x, y - y^-, \mu), \\ &\bar{y} = E(\mu) + C(x, \mu)x + D(x, y, \mu)(y - y^- - \varphi(x, \mu)), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $E(\mu) = G(0, \varphi(0, \mu), \mu)$, $E(0) = 0$, $C(0,0) = c$, $2D(0, y^-, 0) = d$. Для дальнейшего существенными будут следующие параметры: λ, γ, c, d, E. Будем предполагать, что седловая величина $|\lambda\gamma| < 1$.

Из построения T_0 и T_1 следует, что существует достаточно малая окрестность U, гомеоморфная внутренности "тора" с приклеенной ручкой, в которой $\mathcal{L}_\prime$ лежит внутри "тора", а внутри ручки лежит глобальный кусок Γ_0 (см. рис. 1).

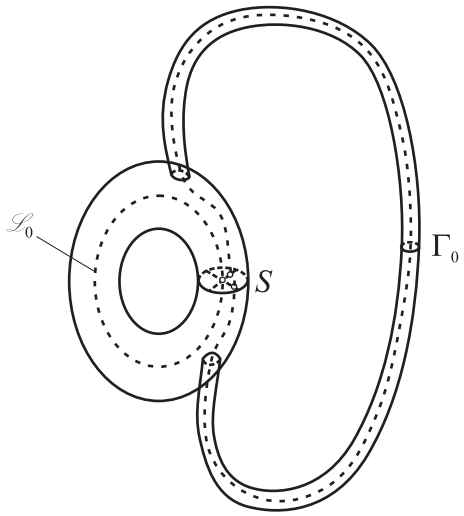


Рис. 1

Точки пересечения однообходных гомоклинических кривых с секущей S находятся из уравнений

$$\mathfrak{M}^+ \cap S : \bar{y} = 0; \quad \bar{x} - x^+ = F(0, y - y^-, \mu),$$

$$\mathfrak{M}^- \cap S : x = 0; \quad 0 = G(0, y - y^-, \mu).$$

Из представления (1.3) и условия (1.2) вытекает, что при $\mu = 0$ в окрестности U гомоклинические кривые к $\mathcal{L}_\mu$, обходящие ручку только один раз, кроме Γ_0, отсутствуют. Легко видеть, что при всех достаточно малых μ возможны следующие три случая:

1) В U будут только две гомоклинические кривые $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$ к $\mathcal{L}_\mu$, обходящие ручку только один раз. Это возможно, если $\dfrac{E(\mu)}{d} < 0$.

2) Гомоклинических кривых к $\mathcal{L}_\mu$, обходящих ручку только один раз, в U нет. Это будет иметь место, если $\dfrac{E(\mu)}{d} > 0$.

3) В U будет только одна гомоклиническая кривая Γ_μ к $\mathcal{L}_\mu$, обходящая ручку только один раз, что возможно, если $E(\mu) = 0$. Эта кривая будет негрубая с тем же характером касания интегральных многообразий $\mathfrak{M}_\mu^+$ и $\mathfrak{M}_\mu^-$ вдоль Γ_μ, как и в случае $\mu = 0$. Системы такого типа в пространстве динамических систем образуют бифуркационную пленку H^1 коразмерности 1.

Для установления структуры множества N существенна следующая

Лемма [5]. *Пусть* $\Pi_0 : \{M(x_0, y_0), |x_0 - x^+| \le \varepsilon_0, |y_0| \le \varepsilon_0\}$ *и* $\Pi_1 : \{M(x_1, y_1), |x_1| \le \varepsilon_1, |y_1 - y^-| \le \varepsilon_1\}$ *– достаточно малые окрестности точек* M^+ *и* M^- *на* S. *Тогда отображение* $T' : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_1$ *по траекториям системы в окрестности* $\mathcal{L}_\mu$ *определено на* $\sigma^0 \subset \Pi_0$, *где* σ^0 *состоит из счетного объединения непересекающихся "прямоугольников"* σ_k^0 *и* $\bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty} T_0^k \sigma_k^0 = T'\sigma^0$, *где* $\bar{k} \to \infty$ *при* $\varepsilon_0\varepsilon_1 \to 0$.

Используя эту лемму, легко получаем, что каждой траектории из N будет соответствовать последовательность отображений

$$(..., T_{i_j}, T_{i_{j+1}}, ...),$$

где i_α равно либо 0, либо 1, такая, что за отображением T_1 обязательно следует отрезок $[T_0, ..., T_0]$, длина которого k_α не меньше $\bar{k}$.[1] Теперь легко видеть, что траектории из N может быть поставлена в соответствие последовательность

$$(..., q_j, q_{j+1}), \tag{1.4}$$

где q_j суть символы либо 0, либо 1, причем за символом 1 следует полный отрезок из символов 0, длина которого $p_\alpha = k_\alpha - \bar{k} + 1$. Из последнего описания получаем, что траектории множества N, не являющейся асимптотической к $\mathcal{L}_\mu$, будет соответствовать бесконечная в обе стороны последовательность

$$(..., p_j, p_{j+1}, ...),$$

составленная из счетного множества символов 1, 2,...; траектории, являющейся асимптотической к $\mathcal{L}_\mu$, только при $t \to \infty$ или $t \to \infty$, будет соответствовать бесконечная в одну сторону последовательность

$$(..., p_{-1}, p_0, p_1, ...p_k) \quad \text{или} \quad (p_{-s}, ..., p_{-1}, p_0, p_1, ...),$$

а гомоклинической кривой к $\mathcal{L}_\mu$, исключая однообходные – отрезок

$$[p_1, ..., p_l]$$

В случае грубой гомоклинической кривой установлено [5], что множество N находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех последовательностей (1.4) или, что

[1] В частности, длина его может быть бесконечной.

то же самое, с множеством всех траекторий схемы Бернулли из двух символов 0 и $\hat{1} = [1, 0]$. В рассматриваемом случае описание значительно сложнее.

Введем в рассмотрение подсистему $\Omega(\lambda, \gamma, c, d, E(\mu), \nu_1^*, \nu_2^*, \bar{k})$ топологической схемы Бернулли из трех символов 0, 1, 2, выделяемую следующими условиями:

1. Ω содержит периодическую траекторию $L = \{..., 0, 0, 0, ...\}$.

2. Ω не содержит траектории, у которой есть отрезки длины, большей единицы, составленные из символов, отличных от 0.

В силу этого условия траектории Γ из Ω, не являющейся асимптотической к L, может быть поставлена в соответствие бесконечная в обе стороны последовательность

$$(..., p_i^{\alpha_i}, p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, ...),$$

составленная из символов $p_i^{\alpha_i}$, где через $p_i^{\alpha_i}$ обозначена длина полного отрезка из нулей, стоящего за символом α_i, равного либо 1, либо 2. В случае, если Γ является асимптотической в L только при $i \to -\infty$ или $i \to +\infty$ – последовательность

$$[p_0(\infty), p_1^{\alpha_1}, ..., p_i^{\alpha_i}, ...) \quad \text{или} \quad (..., p_{-i}^{\alpha_{-i}}, ..., p_{-1}^{\alpha_{-1}}, p_0^{\alpha_0}(\infty)],$$

а если двоякоасимптотической к L – отрезок

$$[p_0^{\alpha_0}(\infty), p_1^{\alpha_1}, ..., p_m^{\alpha_m}, ..., p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}(\infty)],$$

где $p_0(\infty)$, $p_0^{\alpha_0}(\infty)$, $p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}(\infty)$ – несобственные символы, равные ∞.

3. Длина $p_i^{\alpha_i}(p_{i-1}^{\alpha_{i-1}})$ отрезка из нулей, следующего за символом α_i (стоящего перед символом α_i), отличным от нулевого, не менее $\bar{k}$. В частности, $p_i^{\alpha_i}(p_{i-1}^{\alpha_{i-1}})$ может быть равным ∞.

4. Для траекторий из Ω, отличных от L, выполняется условие

$$\frac{\nu_1^* \gamma^{-p_i^{\alpha_i}} - c\nu_2^* \lambda^{p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}} - E(\mu)}{d} > 0,$$

где ν_1^* и ν_2^* – положительные константы.

5. При $E(\mu) = 0$ две двоякоасимптотические траектории к L

$$\Gamma_1 : \{..., 0, ..., 0, 1, 0, ...0, ...\} \text{ и } \Gamma_2 : \{..., 0, ..., 0, 2, 0, ...0, ...\},$$

склеены в одну Γ_0.

Основным утверждением этой части работы является следующая

Основная теорема. *Для любой достаточно малой расширенной окрестности U периодического движения $\mathcal{L}_\mu$. существуют такое достаточно большое $\bar{k}$, константы ν_1^* и ν_2^* и малое $\bar{\mu}$, что при всех $|\mu| < \bar{\mu}$ в N можно указать подсистему $N' \subset N$, траектории которой имеют седловой тип (за исключением Γ_0 при $E(\mu) = 0$) и находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями системы Ω.*

Эта теорема не дает полного описания траекторий множества N, поскольку не всегда $N' = N$. Но даже и тогда, когда эти множества не совпадают, знание свойств N' позволяет делать нетривиальные заключения о свойствах системы в целом. Так, из свойств системы

Ω следует, что во всех случаях, исключая случай $\gamma > 0$, $d < 0$, когда описание N' довольно простое

$$N' = \begin{cases} \mathcal{L}_\mu & \text{при } E(\mu) < 0, \\ \mathcal{L}_0 \cup \Gamma_0 & \text{при } \mu = 0, \end{cases}$$

множество N' содержит континуум траекторий и в нем всюду плотны периодические движения. В частности, здесь можно указать следующее интересное

Следствие 1. В случае $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$, $d > 0$ при сближении сепаратрис при $\mu \to 0$ еще до их первого пересечения у системы будет существовать сложная структура.

Этот случай может быть реализован для C^3 – диффеоморфизма T плоскости в плоскость (рис. 2). Напомним, что это будет иметь место, если "седловая" величина $|\lambda(\mu)\gamma(\mu)| < 1$. В случае же, когда седловая величина для диффеоморфизма T больше единицы, описание N'до касания сепаратрис является тривиальным: $N' = \mathcal{L}_\mu$, так как для T^{-1} будут выполняться условия $\gamma > 0$, $d < 0$, $E(\mu) < O$.

Выяснению условий, при которых $N = N'$, будет посвящена вторая часть работы. Решение этой задачи позволит дать ответ на вопрос, при каких условиях возможен переход от сравнительно простых систем Морса – Смейла к системам со счетным множеством периодических движений. В тех случаях, когда мы не можем установить совпадение N' с N, структура фазового пространства является достаточно сложной. Это связано с тем, что при стремлении μ к нулю будет происходить бесчисленное множество бифуркаций и, следовательно, бифуркационная пленка H^1, соответствующая касанию инвариантных многообразий периодического движения $\mathcal{L}_\mu$, будет недостижимой.

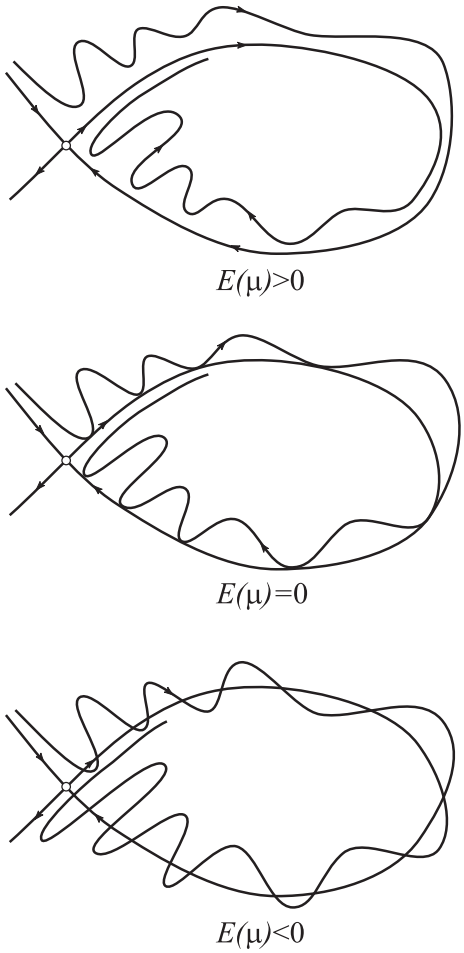


Рис. 2

Авторы пользуются случаем принести благодарность В.М.Алексееву, советы и замечания которого были использованы при написании работы.

§ 2. **Некоторые свойства отображений T_0 и T_1.**

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} x_i &= \lambda^l x_0 + \sum_{j=0}^{l} \lambda^{l-j} f(x_j, y_j, \mu), \\ y_i &= \gamma^{l-k} y_k - \sum_{j=k-l}^{k} \gamma^{l-j} g(x_j, y_j, \mu), \quad l = 0, 1, 2, ..., k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где положено $\lambda^0 f \equiv 0$, $\gamma^{l-k} g \equiv 0$, $\lambda = \lambda(\mu)$, $\gamma = \gamma(\mu)$.

Как следует из работы [6], справедливы следующие леммы.

Лемма 2.1. *Существует такое $r > 0$, что при $|x_0| \le r, |y_k| \le r$ и достаточно малых μ система (2.1) для любого $k > \bar{k}$ имеет единственное решение*

$$x_l = \xi(x_0, y_k, l, \mu), \quad y_i = \eta(x_0, y_k, l, \mu), \quad l = 0, 1, 2, ..., k. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. *При $x_0 \ne 0, y_k \ne 0$ справедливы, оценки*

$$\delta_2 \lambda^k < x_k < \delta_1 \lambda^k, \tag{2.3}$$

$$\delta_4 \gamma^{-k} < y_0 < \delta_3 \gamma^{-k}, \tag{2.4}$$

$$\left| \frac{\partial x_k}{\partial x_0} \right| + \left| \frac{\partial x_k}{\partial y_k} \right| < \delta_5 |\lambda|^k, \tag{2.5}$$

$$\left| \frac{\partial y_0}{\partial x_0} \right| + \left| \frac{\partial y_0}{\partial y_k} \right| < \delta_6 |\gamma|^{-k}, \tag{2.6}$$

где $\delta_1, ..., \delta_6$ – некоторые положительные постоянные. Если λ или γ отрицательны, то δ_1, δ_2 или δ_3, δ_4 зависят от четности k, точнее,

$$\delta_\alpha = \delta'_\alpha + [(\operatorname{sign} \lambda)^k - 1] \frac{\delta'_\alpha - \delta''_\alpha}{2}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\delta_\alpha = \delta'_\alpha + [(\operatorname{sign} \gamma)^k - 1] \frac{\delta'_\alpha - \delta''_\alpha}{2}, \quad \alpha = 3, 4.$$

Легко видеть, что решение (2.2) системы (2.1) обладает следующим свойством:

$$(x_0, y_0) \xrightarrow{T_0} (x_1, y_1) \xrightarrow{T_0} ... \xrightarrow{T_0} (x_k, y_k).$$

Непрерывный аналог такого рассмотрения был изложен в [5].

Предположим, что прямоугольники

$$\begin{aligned} \Pi_0 &: M(x_0, y_0), |x_0 - x^+| \le \varepsilon_0, |y_0| \le \varepsilon_0, \\ \Pi_1 &: M(x_1, y_1), |x_1| \le \varepsilon_1, |y_1 - y^-| \le \varepsilon_1 \end{aligned}$$

таковы, что они лежат в r – окрестности $(0, 0)$ и удовлетворяют условиям: $T_0 \Pi_0 \cap \Pi_0 = \emptyset, T_0^{-1} \Pi_1 \cap \Pi_1 = \emptyset$, что достигается выбором подходящих ε_0 и ε_1.

Используя оценки (2.3) и (2.4), легко доказать следующую лемму.

Лемма 2.3. *Для любого k, большего некоторого $\bar{k}$, отображение $T_0^k : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_1$ определено.*

Используя вид (2.2) и положив $x_k = x_1, y_k = y_1)$ на Π_1, получаем, что $T_0^k : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_1$ можно записать в виде

$$x_1 = \xi(x_0, y_1, k, \mu), \quad y_0 = \eta(x_0, y_1, k, \mu). \tag{2.7}$$

Очевидно, σ_k^0 – область определения $T_0^k : \Pi_0 \longrightarrow \Pi_1$ есть образ шара $\Pi : |x_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, |y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1$ при действии отображения τ:

$$x_0 = x_0, \quad y_0 = \eta(x_0, y_1, k, \mu),$$

а $\sigma_k^1 = T_0^k \sigma_k^0$ – образ Π при действии отображения τ_1:

$$x_1 = \xi(x_0, y_1, k, \mu), \quad y_1 = y_1.$$

Заметим, что $\sigma_{k_1}^\alpha \cap \sigma_{k_2}^\alpha = \emptyset$ при $k_1 \neq k_2, \alpha = 0, 1$. Из такого описания σ_k^0 следует, что σ_k^0 расслаивается на однопараметрическое семейство кривых

$$y_0 = \eta(x_0, y_1, k, \mu) = \eta_{y_1}(x_0, k, \mu), \tag{2.8}$$

а σ_k^1 – на однопараметрическое семейство кривых

$$x_1 = \xi(x_0, y_1, k, \mu) = \xi_{x_0}(y_1, k, \mu). \tag{2.9}$$

В силу оценок (2.3) – (2.6) кривые (2.8) при $k \to \infty$ будут гладко стремиться к $y_0 = 0$, а кривые (2.9) – гладко к $x_1 = 0$.

Очевидно, можно считать, что $x^+ > 0, y^- > 0$. Тогда в зависимости от знаков λ и γ возможны четыре случая расположения σ_k^0 и σ_k^1, указанные на рис. 3.

Рассмотрим множество

$$\Pi_0^j = \bigcup_{\substack{|x_0 - x^+| \leq \varepsilon_0 \\ |y_1| \leq r}} (x_0, \eta(x_0, y_1, j, \mu)). \tag{2.10}$$

При всех $j \geq \bar{k}$, где $\bar{k} > 0$ – некоторое достаточно большое целое число, Π_0^j будет лежать в Π_0. Нетрудно видеть, что Π_0^j гомеоморфно квадрату и точки устойчивого инвариантного множества $\mathfrak{M}^- \cap S \cap \Pi_0(|x_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, y_0 = 0)$ содержит в качестве внутренних.

Следовательно, справедлива

Лемма 2.4. *Для каждого $j \geq \bar{k}$ определено отображение $T_0^j : \Pi_0^j \to \Pi$, где $\Pi : (|x| \leq r, |y| \leq r)$*

Аналогично устанавливается

Лемма 2.5. *Для каждого $i \geq \bar{k}$ определено отображение $T_0^i : \Pi_1^i \to \Pi$, где*

$$\Pi_1^i = \bigcup_{\substack{|y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1 \\ |x_0| \leq r}} (\xi(x_0, y_1, i, \mu), y_1) \in \Pi_1. \tag{2.11}$$

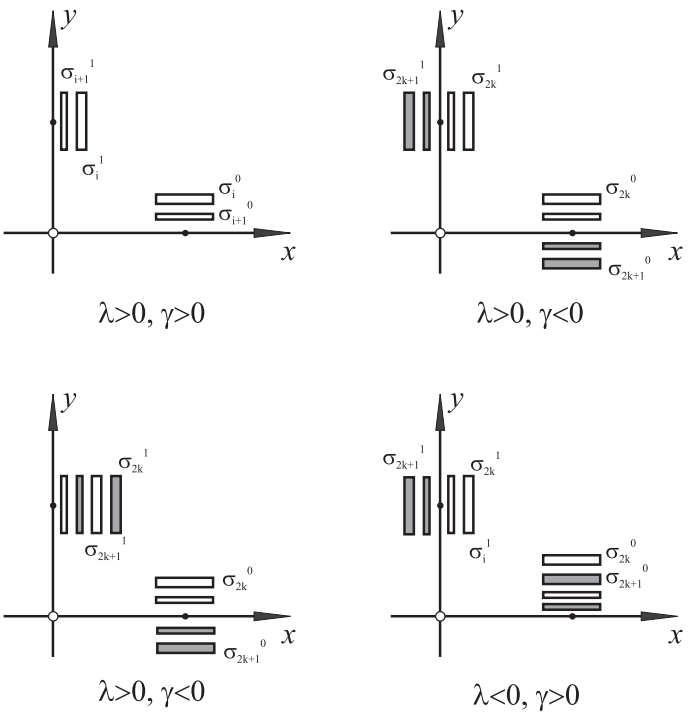


Рис. 3

Из формы записи T_0^{-i} в виде (2.7) следует, что

$$\Pi^i = T_0^{-i}\Pi_1^i = \bigcup_{\substack{|y_1-y^-|\le\varepsilon_1\\ |x_0|\le r}} (x_0, \eta(x_0, y_1, i, \mu)). \tag{2.12}$$

Как указывалось в §1, отображение T_1 записывается в виде

$$\bar{x}_0 - x^+ = F(x_1, y_1 - y^-, \mu), \quad \bar{y}_0 = G(, x_1, y_1 - y^-, \mu), \tag{2.13}$$

где F и G определены на Π_1 и удовлетворяют условиям

$$F(0,0,0) = G(0,0,0) = G_y(0,0,0) = 0,\ c = G_{x_1}(0,0,0) \ne 0,\ d = G_{y_1^2}(0,00) \ne 0.$$

При этом можно считать это достигается выбором ε_1), что

$$\max_{\substack{(x_1,y_1)\in\Pi_1\\ |\mu|\le\bar{\mu}}} |F| \le \varepsilon_0. \tag{2.14}$$

Введем в рассмотрение кривую φ, уравнение которой $G_{y_1}(x_1, y_1 - y^-, \mu) = 0$ или в явном виде

$$y_1 - y^- = \varphi(x_1, \mu), \quad \varphi(0,0) = 0. \tag{2.15}$$

При подходящем ε_1 и μ достаточно малых φ будет разбивать Π_1 на два множества Π_1^1 и Π_1^2:

$$\Pi_1^\alpha = \{M(x_1, y_1) \in \Pi_1, (-1)^{\alpha+1}(y_1 - y^- - \varphi(x, \mu)) > 0\}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Функцию G, используя тождество $G_{y_1}(0,0,0) \equiv 0$, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} &G(x_1, y_1 - y^-, \mu) = G(x_1, \varphi(x_1,\mu), \mu) - D(x_1, y_1, \mu)(y_1 - y^- - \varphi(x,\mu))^2 = \\ &= E(\mu) + C(x_1,\mu)x_1 + D(x_1, y_1, \mu)(y_1 - y^- - \varphi(x,\mu))^2, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $E(\mu) = G(0, \varphi(0,\mu), \mu), C(0,0) = c, 2D(0, y^-, \mu) = d$ и производные D_{x_1} и D_{y_1}, ограничены.

Обозначим через T_{11} и T_{12} сужения T_1 на Π_1^1 и Π_1^2. Используя выражение (2.16) для G, $T_{1\alpha}(\alpha = 1,2)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\bar{x} - x^+ = F(x_1, y_1 - y^-, \mu), \\ &y_1 - y^- = \varphi(x_1,\mu) + (-1)^{\alpha+1}\sqrt{D^{-1}(x_1, y_1, \mu)(\bar{y}_0 - G(x_1, \varphi, \mu))}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Очевидно, φ будет трансверсально пересекать кривые $x_1 = \xi_{x_0}(y_1, k, \mu)$, на которые расслаивается σ_k^1. Обозначим через $\rho_{x_0}(k,\mu)$ корень уравнения

$$y_1 - y^- = \varphi(\xi_{x_0}(y_1, k, \mu), \mu) \tag{2.18}$$

относительно $y_1 - y^-$. Легко видеть, что $\rho_{x_0}(k,\mu) = \omega_1(\mu) + \omega_2(k,\mu)$, где $\omega_1(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$, а $|\omega_2| < L|\lambda|^k|$, где L – некоторая постоянная.

Положим

$$\varepsilon_k^\alpha(\mu) = \rho_\alpha(k,\mu) + (-1)^{\alpha+1}|\lambda|^k, \tag{2.19}$$

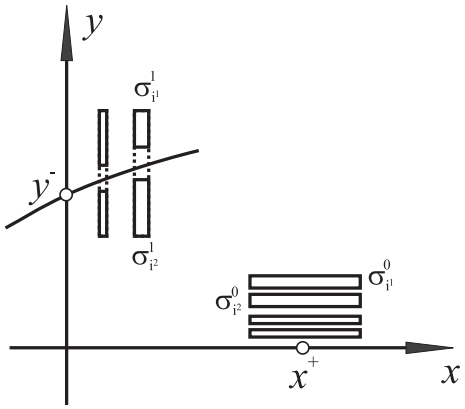


Рис. 4

где

$$\begin{aligned} \rho_1(k,\mu) &= \max_{|x_0 - x^+| \le \varepsilon_0} \rho_{x_0}(k,\mu), \\ \rho_2(k,\mu) &= \min_{|x_0 - x^+| \le \varepsilon_0} \rho_{x_0}(k,\mu). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Очевидно, замкнутые области

$$\sigma_{k^1}^1 = \{M(x_1, y_1) \in \sigma_k^1, y_1 \in Y_{k^1} = [\varepsilon_k^1 \le y_1 - y^- \le \varepsilon_1]\},$$

$$\sigma_{k^2}^1 = \{M(x_1, y_1) \in \sigma_k^1, y_1 \in Y_{k^2} = [-\varepsilon_1 \le y_1 - y^- \le \varepsilon_k^2]\}$$

не имеют общих точек с φ. Прообраз σ_k^1 на Π_0 обозначим через $\sigma_{k^\alpha}^0$. Геометрически это просто означает, что от областей σ_k^1 мы отрезаем точки, примыкающие к кривой φ (см. рис. 4).

Аналогично вводим замкнутые области

$$\begin{aligned} \Pi_{11}^i &= \{M(x_1, y_1) \in \Pi_1^i, y_1 \in Y_i^1 = [\varepsilon_i^1 \le y_1 - y^- \le \varepsilon_1]\}, \\ \Pi_{12}^i &= \{M(x_1, y_1) \in \Pi_1^i, y_1 \in Y_i^2 = [-\varepsilon_1 \le y_1 - y^- \le \varepsilon_i^2]\}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

где

$$\varepsilon_i^\alpha(\mu) = \rho_\alpha(i,\mu) + (-1)^{\alpha+1}|\lambda|^i, \rho_1(i,\mu) = \max_{|x_0| \le r} \rho_{x_0}(i,\mu) = \rho_{x_0^1}(i,\mu),$$

$$\rho_2(i,\mu) = \min_{|x_0| \le r} \rho_{x_0}(i,\mu) = \rho_{x_0^2}(i,\mu),$$

а $\rho_{x_0}(i,\mu)$ – корень уравнения $y_1 - y^- = \varphi(\xi(x_0, y_1, i, \mu), \mu)$ относительно $y_1 - y^-$ при достаточно больших $i \geq i^*$.

§ 3. **Леммы о пересечении.**

Выведем условия, при которых $T_{1\alpha}\sigma^1_{i^\alpha} \cap \sigma^0_j \neq \emptyset$. Очевидно, для этого достаточно показать, что кривые $x_1 = \xi_{x'_0}(y_1, i, \mu)$, где $y_1 \in Y_{i_\alpha}$, на которые расслаивается $\sigma^1_{i^\alpha}$, при отображении $T_{1\alpha}$ переходят в кривые, пересекающиеся с кривыми $y_0 = \eta_{y'_1}(x_0, j, \mu)$, на которые расслаивается область σ^0_j, или что система

$$x_0 - x^+ = F(\xi_{x'_0}(y_1, i, \mu), y_1 - y^-, \mu), \quad \eta_{y'_1}(x_0, j, \mu) = G(\xi_{x'_0}(y_1, i, \mu), y_1 - y^-, \mu) \tag{3.1}$$

при всех $|x'_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, |y'_1 - y^-| \leq \varepsilon_1$ имеет решение x^*_0, y^*_1 такое, что $|x^*_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, y^*_1 \in Y_{i_\alpha}$. Подставив во второе уравнение вместо x_0 его выражение из первого уравнения, получим следующее уравнение относительно y_1:

$$\begin{aligned} &\eta_{y'_1}(x^+ + F(\xi_{x'_0}, y_1 - y^-, \mu), j, \mu) = G(\xi_{x'_0}, \varphi(\xi, \mu), \mu) + \\ &+ D(\xi_{x'_0}, y_1, \mu)[y_1 - y^- - \varphi(\xi_{x'_0}, \mu)]^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

или

$$y_1 - y^- = \varphi(\xi_{x'_0}, \mu) + (-1)^{\alpha+1}\sqrt{D^{-1}(\eta_{y'_1} - G(\xi_{x'_0}, \varphi, \mu))}. \tag{3.3}$$

Из вида уравнения (3.3) следует, что если оно имеет решение, то при этом значении y_1 будет выполняться следующее неравенство:

$$\frac{\eta_{y'_1} - G(\xi_{x'_0}, \varphi(\xi_{x'_0}, \mu), \mu)}{D(\xi_{x'_0}, y_1, \mu)} \geq 0. \tag{3.4}$$

Выражение, стоящее в левой части неравенства (3.4), используя (2.3) и (2.4), можно оценить следующим образом:

$$\frac{\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu)}{d} \leq \frac{\eta_{y'_1} - G}{D} \leq \frac{S_1(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}{|d|} \tag{3.5}$$

при всех $|x'_0| \leq r, |y'_1| \leq r, |y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1$, где ν_1, ν_2, S_1 – некоторые положительные постоянные.

Пусть i и j таковы, что

$$\frac{\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu)}{d} > 0. \tag{3.6}$$

Рассмотрим отображение τ_α:

$$\bar{y}_1 - y^- = \varphi(\xi_{x'_0}(y_1, i, \mu), \mu) + (-1)^{\alpha+1}\sqrt{\frac{\eta_{y'_1} - G(\xi_{x'_0}, \varphi, \mu)}{D(\xi_{x'_0}, y_1, \mu)}}.$$

Оно определено при всех $|y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1, |x'_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, |y'_1 - y^-| \leq \varepsilon_1$.

Из оценки

$$|\bar{y}_1 - y^-| \leq |\varphi| + \sqrt{\frac{\eta - G}{D}} \leq \delta_1|\lambda|^i + \sqrt{S_1(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}$$

следует, что при достаточно больших i, j и малых μ, удовлетворяющих неравенству

$$\delta_1|\lambda|^i + \omega_1(\mu) + \sqrt{S_1(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)} \le \varepsilon_1, \tag{3.7}$$

τ_α переводит отрезок $|y_1 - y^-| \le \varepsilon_1$ в себя.

Выведем условия, при которых τ_α будет сжимающим. Имеем

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial y_1}\right| \le \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right| \left|\frac{\partial \xi}{\partial y_1}\right| + \frac{\left|\dfrac{d}{dy_1}\left(\dfrac{\eta - G}{D}\right)\right|}{2\sqrt{D^{-1}(\eta - G)}} \le \\ \le \nu_3|\lambda|^i + \frac{S_2(|\lambda|^i + |\gamma|^{-j} + |E|)}{\sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu))}} \le \frac{S_3(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}{\sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu))}},\end{gathered} \tag{3.8}$$

где S_3 – некоторая положительная константа.

Очевидно, что τ_α будет сжимающим, если последнее неравенство в (3.8) будет меньше величины $q < 1$, т. е. если будет выполняться неравенство

$$0 < \frac{\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu)}{d} - \frac{S_3^2}{q^2}(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)^2. \tag{3.9}$$

Найдем условие, при котором решение $y^*_{1\alpha}(x'_0, y'_1, i, j, \mu)$ уравнения (3.8) будет принадлежать Y_{i_α}. Для этого воспользуемся двумя тождествами

$$(-1)^{\alpha+1}(y^*_{1\alpha} - y^-) = (-1)^{\alpha+1}\varphi(\xi_{x'_0}, \mu) + \sqrt{\frac{\eta - G}{D}},$$

$$(-1)^{\alpha+1}\varepsilon^\alpha_i(\mu) = (-1)^{\alpha+1}\varphi(\xi_{x_0^{\alpha+1}}, \mu) + |\lambda|^i.$$

Покажем, что $(-1)^{\alpha+1}(y^*_{1\alpha} - y^- - \varepsilon^\alpha_1(\mu)) > 0$. Для этого из первого равенства вычтем второе. Получим

$$(-1)^{\alpha+1}[y^*_{1\alpha} - y^- - \varepsilon^\alpha_i(\mu)] = \sqrt{\frac{\eta - G}{D}} + (-1)^{\alpha+1}[\varphi(\xi_{x'_0}, \mu) + \varphi(\xi_{x_0^{\alpha+1}}, \mu)] - |\lambda|^i. \tag{3.10}$$

Из (3.10) легко следует неравенство

$$(-1)^{\alpha+1}[y^*_{1\alpha} - y^- - \varepsilon^\alpha_i(\mu)] \ge \sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E)} - \nu_4|\lambda|^i - |\lambda|^i, \tag{3.11}$$

где ν_4 – некоторая константа.

Легко видеть, что при выполнении неравенства

$$\frac{(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E)}{d} > (1 + \nu_4)^2|\lambda|^{2i}, \tag{3.12}$$

неподвижная точка $y^*_{1\alpha}$ принадлежит $Y_{i_\alpha} : |x^*_0 - x^+| \le \varepsilon_0$ в силу неравенства $|F| \le \varepsilon_0$.

Лемма 3.1. *При выполнении неравенств (3.6), (3.7), (3.9) и (3.12) пересечение $T_{1\alpha}\sigma^1_{i^\alpha}$ с σ^0_j не пусто.*

Следствие 2. $T_{1\alpha}\sigma^1_{i^\alpha} \cap \sigma^0_j = T_{1\alpha}T^i_0\sigma^0_{i^\alpha} \cap \sigma^0_j$ гомеоморфно квадрату $|x'_0 - x^+| \le \varepsilon_0, |y'_1 - y^-| \le \varepsilon_1$.

Пусть i и j удовлетворяют условиям леммы 3.1. Тогда образом точки $\bar{M}_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0) \in T_{1\alpha}T_0^i\sigma_{i^\alpha}^0 \cap \sigma_j^0$ при действии T_0^j будет точка $\bar{M}_1(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$. Поэтому отображение $T_{1\alpha}T_0^i : \sigma_{i^\alpha}^0 \to \sigma_j^0$ в переменных x_0, y_1 можно записать в виде.

$$\begin{aligned}&\bar{x}_0 - x^+ = F(\xi(x_0, y_1, i, \mu), y_1 - y^-, \mu), \quad y_1 - y^- = \varphi(\xi(x_0, y_1, i, \mu), \mu) + \\ &+(-1)^{\alpha+1}\sqrt{D^{-1}(\xi, y_1, \mu)[\eta(\bar{x}_0, \bar{y}_0, j, \mu) - G(\xi, \varphi(\xi, \mu), \mu)]}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

На уравнения (3.13) можно смотреть как на некоторые соотношения, связывающие $(\bar{x}_0, y_1)$ с $(x_0, \bar{y}_1)$. Используя оценки, аналогичные приведенным в лемме 3.1, можно получить, что для якобиана

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\bar{x}_0, y_1)}, \text{ где } \Phi_1 \equiv \bar{x}_0 - x^+ - F = 0, \;\; \Phi_2 \equiv y_1 - y^- - \varphi - (-1)^{\alpha+1}\sqrt{D^{-1}(\eta - G)}.$$

имеет место следующая оценка:

$$\frac{\partial(\Phi_1, \Phi_2)}{\partial(\bar{x}_0, y_1)} \geq 1 - \frac{S_4(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}{\sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E)}}, \tag{3.14}$$

где $S4$ – некоторая константа.

Очевидно, для того чтобы $\bar{x}_0, y_1$ можно было выразить через $x_0, \bar{y}_1$ достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{S_4(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}{\sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E)}} < \delta_1 < 1. \tag{3.15}$$

При выполнении условия (3.13) мы получаем новую форму представления отображения $T_{1\alpha}T_0^i$:

$$\bar{x}_0 - x^+ = \tilde{F}(x_0, \bar{y}_1, i^\alpha, j, \mu), \quad y_1 - y^- = \tilde{G}(x_0, \bar{y}_1, i^\alpha, j, \mu), \tag{3.16}$$

где для производных $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$, как нетрудно видеть, имеет место неравенство

$$\left|\frac{\partial\tilde{F}}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\bar{y}_1}\right| + \left|\frac{\partial\tilde{G}}{\partial x_0}\right| + \left|\frac{\partial\tilde{G}}{\partial\bar{y}_1}\right| \leq \frac{S_5(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}{(1-\delta_1)\sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E)}}, \tag{3.17}$$

где S_5 – некоторая положительная постоянная.

Таким образом, имеет место следующая

Лемма 3.2. *При выполнении условий леммы 3.1 и условия (3.15) отображение $T_{1\alpha}T_0^i : \sigma_{j^\alpha}^0 \to \sigma_j^0$ будет представимо в виде (3.16), где для первых производных функций $\tilde{F}\Gamma$ и $\tilde{G}$ имеет место оценка (3.17).*

Замечание. Условия лемм 3.1 и 3.2 дают нечто большее, чем просто не пустоту пересечений $T_{1\alpha}\sigma_{i^\alpha}^1$ с σ_j^0. Это пересечение будет не пусто, если $\sigma_{i^\alpha}^1$ отображается на σ_j^0 и как на рис. 5а). Однако такой случай остается вне нашего рассмотрения. Мы же требуем, чтобы $\sigma_{i^\alpha}^1$ отображалось на σ_j^0 как на рис.5б) и чтобы в точках образа пересечения отображение было представимо в виде (3.16).

С рассматриваемым отображением $T_{1\alpha}T_0^i$ удобно связать отображение $T_{i_\alpha j} : (x_0, \bar{y}_1) \to (\bar{x}_0, y_1)$, которое в явном виде задается формулами (3.16). Из леммы 3.1 следует, что оно определено на квадрате $|x_0 - x^+| \leq \varepsilon_0, |\bar{y}_1 - y^-| \leq \varepsilon_1$ и отображает его в себя. При условии, что

$$\frac{S_5(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)}{(1-\delta_1)\sqrt{d^{-1}(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E)}} < \tilde{q} < \frac{1}{2}, \tag{3.18}$$

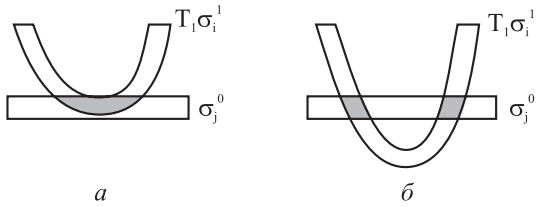


Рис. 5

$T_{i_\alpha j}$ будет сжимающим и, следовательно, будет иметь единственную неподвижную точку $M^*_{i_\alpha}$. Легко видеть, что эта неподвижная точка будет неподвижной точкой отображения $T_{1\alpha}T_0^i$ при $i = j$. Таким образом, приходим к следующей лемме.

Лемма 3.3. *При выполнении условий (3.15) и (3.18) отображение $T_1T_0^i : \sigma_i^0 \to \sigma_i^0$ имеет две неподвижных точки гиперболического типа.*

Найдем условие, при котором $T_{1\alpha}\sigma^1_{i^\alpha}$ имеет непустое пересечение с устойчивым многообразием, уравнение которого $y_0 = 0$. Очевидно, это будет иметь место, если система

$$\begin{aligned} &x_0 - x^+ = F(\xi_{x_0'}(y_1, i, \mu), y_1 - y^-, \mu),\\ &y_1 - y^- = \varphi(\xi_{x_0'}, \mu) + (-1)^{\alpha+1}\sqrt{-D^{-1}G(\xi_{x_0'}, \varphi, \mu)} \end{aligned} \tag{3.19}$$

при $|x_0' - x^+| \le \varepsilon_0$ имеет решение x_0^*, y_1^* такое, что $|x_0^* - x^+| \le \varepsilon_0|, y_1^* \in Y_{i_\alpha}$. Система (3.19) является предельным случаем системы (3.1) при $j = \infty$. Поэтому точно так же можно показать, что при выполнении условий леммы 3.1 с $j = \infty$ система (3.19) будет иметь единственное решение. Более того, справедлива следующая лемма, аналогичная лемме 3.1.

Лемма 3.4. *Пусть выполнены условия леммы 3.1 при $j = \infty$. Тогда существует такое достаточно большое $j(t, \mu)$, что пересечение $T_{1\alpha}\sigma^1_{i^\alpha} \cap \Pi_0^j$ будет гомеоморфно квадрату $|x_0' - x^+| \le \varepsilon_0|, |y_1'| \le r$.*

При достаточно большом $j(t, \mu)$ отображение $T_{1\alpha}T_0^i : \sigma^0_{i^\alpha} \to \Pi_0^j$ записывается в виде

$$x_0 - x^+ = F(\xi_(x_0, y_1, i, \mu), y_1 - y^-, \mu),$$

$$y_1 - y^- = \varphi(\xi, \mu) + (-1)^{\alpha+1}\sqrt{-D^{-1}(\xi, y_1, \mu)[\eta(\bar{x}_0, \bar{y}_1, j, \mu) - G(\xi, \varphi, \mu)]}$$

или при выполнении условия (3.16) с $j = j(i, \mu)$ в виде

$$\bar{x}_0 - x^+ = \tilde{F}(x_0, \bar{y}_1, i^\alpha, j(i^\alpha, \mu), \mu), \quad y_1 - y^- = \tilde{G}(x_0, \bar{y}_1, i^\alpha, j(i^\alpha, \mu), \mu). \tag{3.20}$$

Как и выше, введем отображение $T_{i^\alpha j} : (x_0, \bar{y}_1) \to (\bar{x}_0, y_1)$, определяемое формулами (3.20). Оно будет определено на квадрате $|x_0 - x^+| \le \varepsilon_0, |\bar{y}_1| \le r$ и будет сжимающим на нем при выполнении условия (3.18).

Найдем условия, при которых $T_{1\alpha}\Pi^i_{1\alpha}$ пересекается с σ_j^0. Очевидно, это будет иметь место, если система

$$x_0 - x^+ = F(\xi_{x_0'}, y_1 - y^-, \mu), \quad y_1 - y^- = \varphi(\xi, \mu) + (-1)^{\alpha+1}\sqrt{-D^{-1}(\eta_{y_1'} - G)} \tag{3.21}$$

при любых $|x_0'| \le r$ и $|y_1' - y^-| \le \varepsilon_1$ имеет решение x_0^*, y_1^* такое, что $|x_0^* - x^+| \le \varepsilon_0, y_1^* \in Y_{i_\alpha}$.

Ясно, что если условия леммы 3.1 выполнены при $i = \infty$, то найдется такое достаточно большое $i(j, \mu)$, что эта система с таким i будет иметь единственное решение. Следовательно, будет иметь место следующая

Лемма 3.5. *При выполнении условий леммы 3.1 с $i = \infty$ найдется такое $i = i(j, \mu)$, что $T_{1\alpha}\Pi^i_{1\alpha} \cap \sigma^0_j$ будет гомеоморфно квадрату $|x'_0| \le r$, $|y'_1 - y^-| \le \varepsilon_1$.*

При достаточно большом $i = i(j, \mu)$ при выполнении условия (3.15) отображение $T_{1\alpha}T^i_0 : (T^{-i}_0\Pi^i_{1\alpha}) \to \sigma^0_j$ можно записать в виде, аналогичном (3.20). Здесь также с этим отображением можно связать отображение $T_{i^{\alpha_i}} : (x_0, \bar{y}_1) \to (\bar{x}_0, y_1)$. Оно будет определено на квадрате $|x_0| \le r$, $|\bar{y}_1 - y^-| \le \varepsilon_1$ и будет сжимающим на нем при выполнении условий (3.18) с $i = i(j, \mu)$.

Выпишем неравенства (3.9), (3.12), (3.14), (3.18) в следующем виде:

$$0 < \frac{\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu)}{d} - \frac{S_3^2}{q}(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)^2,$$

$$0 < \frac{(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu))}{d} - (1 + \nu_4)^2|\lambda|^{2i},$$

$$0 < \frac{(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu))}{d} - \frac{S_4^2}{\delta_1^2}(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)^2,$$

$$0 < \frac{(\nu_1\gamma^{-j} - c\nu_2\lambda^i - E(\mu))}{d} - \frac{S_5^2(|\gamma|^{-j} + |\lambda|^i + |E|)^2}{(1 - \delta_1)^2\tilde{q}_1^2},$$

где $0 < q < 1$, $0 < \delta_1 < 1$, $0 < \tilde{q} < \dfrac{1}{2}$.

Легко видеть, что существуют такие достаточно большое $\bar{k}$, достаточно малое $\bar{\mu} > 0$ и положительные константы ν_1^* и ν_2^*, что при $i, j > \bar{k}$ и $|\mu| < \bar{\mu}$ выражения в правых частях выписанных неравенств будут мажорировать следующее выражение:

$$d^{-1}(\nu_1^*\gamma^{-j} - c\nu_2^*\lambda^i - E(\mu))$$

и будет иметь место неравенство (3.7). Поэтому, если будут существовать такие i, j (в частности, принимающие значения, равные бесконечности), что для них будет выполнено неравенство

$$0 < \frac{\nu_1^*\gamma^{-j} - c\nu_2^*\lambda^i - E(\mu)}{d}, \tag{3.22}$$

то при этих значениях i, j будут иметь место все леммы этого параграфа.

§ 4. **Окончание доказательства основной теоремы.**

Пусть Γ – траектория рассматриваемой системы, целиком лежащая в достаточно малой расширенной окрестности U периодического движения $\mathcal{L}_\mu$. Из построения отображения T_{0^i} следует, что если Γ не является асимптотической к $\mathcal{L}_\mu$, то она будет пересекать секущую S только в точках σ^0. Пусть

$$(\dots, M_0^{-i}, \dots, M_0^0, \dots, M_0^i, \dots) \tag{4.1}$$

– точки пересечения Γ с $\sigma^0 = \bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty}$, расположенные в порядке возрастания времени. Так как $\sigma^0_m \cap \sigma^0_l = \emptyset$ для $m \ne l$, то получаем, что Γ будет соответствовать бесконечная в обе стороны последовательность

$$(\dots, j_{-i}, \dots, j_0, \dots, j_i, \dots), \tag{4.2}$$

составленная из символов $j_i > \bar{k}$. Здесь предполагается, что $M_0^i \in \sigma^0_{j^i}$. Предположим, что Γ пересекает σ^0 только в точках $\bigcup\limits_{\alpha=1,2}\bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty}\sigma^0_{k^\alpha}$. В этом случае Γ поставим в соответствие последовательность

$$(\dots,(j_{-i},\alpha_{-i}),\ \dots,(j_0,\alpha_0),\ \dots,(j_i,\alpha_i),\ \dots), \tag{4.3}$$

которую будем записывать также и в следующем виде:

$$(\dots,j_{-i}^{\alpha_{-i}},\ \dots,j_0^{\alpha_0},\ \dots,j_i^{\alpha_i},\ \dots). \tag{4.4}$$

Пусть (x_1^i, y_1^i) – координаты точки $M_1^i = T_0^j M_0^i \in \sigma^1_{j_i^{\alpha_i}}$. Выпишем связь между координатами точек M_0^i и M_0^{i+1}:

$$\begin{aligned} &x_0^{i+1} - x^+ = F(\xi_(x_0^i, y_1^i, j_i^{\alpha_i}, \mu), y_1^i - y^-, \mu),\\ &y_1^i - y^- = \varphi(\xi(x_0^i, y_1^i, j_i^{\alpha_i}, \mu), y_1^i - y^-, \mu) +\\ &+(-1)^{\alpha_{i+1}+1}\sqrt{-D^{-1}(\xi, y_1^i, \mu)[\eta(x_0^{i+1}, y_1^{i+1}, j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, \mu) - G(\xi, \varphi, \mu)]}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Таким образом для указанной траектории Γ мы получим счетное число соотношений. При условии, что для каждой пары $j_i^{\alpha_i}, j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}$ последовательности (4.4) выполняется условие

$$0 < \frac{\nu_1^* \gamma^{-j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} - c\nu_2^* \lambda^{j_i^{\alpha_i}} - E(\mu)}{d}, \qquad j_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \geq \bar{k},\ \ j_i^{\alpha_i} \geq \bar{k}, \tag{4.6}$$

(4.5) можно записать, согласно результатам предыдущего параграфа, в виде

$$x_0^{i+1} - x^+ = \tilde{F}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, j_i^{\alpha_i}, \mu), \quad y_1^i - y^- = \tilde{G}(x_0^i, y_1^{i+1}, j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, j_i^{\alpha_i}, \mu). \tag{4.7}$$

Покажем, что имеет место и обратное утверждение, т. е. что каждой последовательности (4.4), символы которой удовлетворяют условиям (4.6), соответствует траектория Γ и при этом единственная. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма о седловой неподвижной точке в прямом произведении пространств, [5].

Пусть полные метрические пространства Y_i и X_i и операторы A_i и B_i, $i = 0, \pm 1, \dots,$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $\sup\limits_{x_i', x_i'' \in X_i} \rho_{X_i}(x_i', x_i'') < d, \quad \sup\limits_{y_i', y_i'' \in Y_i} \rho_{Y_i}(y_i', y_i'') < d,$

2) $A_i(X_i \times Y_{i+1}) \in X_{i+1}, \quad B_{i+1}(X_i \times Y_{i+1}) \in Y_i,$

3) $$\rho_{X_{i+1}}(\bar{x}_{i+1}', \bar{x}_{i+1}'') < \frac{q}{2}(\rho_{X_i}(x_i', x_i'') + \rho_{Y_{i+1}}(y_{i+1}', y_{i+1}'')),$$
$$\rho_{Y_i}(\bar{y}_i', \bar{y}_i'') < \frac{q}{2}(\rho_{X_i}(x_i', x_i'') + \rho_{Y_{i+1}}(y_{i+1}', y_{i+1}'')),$$

где $0 < q < 1$ *и*

$$\bar{x}_{i+1} = A_i(x_i, y_{i+1}), \quad \bar{y}_i = B_{i+1}(x_i, y_{i+1}).$$

Тогда существует единственная последовательность

$$(\dots,(x_{i-1}^*, y_{i-1}^*), (x_i^*, y_i^*), \dots),$$

удовлетворяющая условиям

$$x^*_{i+1} = A_i(x^*_i, y^*_{i+1}), \quad y^*_i = B_{i+1}(x^*_i, y^*_{i+1}).$$

В нашем случае в качестве X_i, возьмем сегмент $|x^i_0 - x^+| \le \varepsilon_0$, в качестве Y_i – сегмент $|y'_1 - y^-| \le \varepsilon_1$, операторы A_i и B_i имеют вид

$$A_i : \bar{x}^{i+1}_0 - x^+ = \tilde{F}(x^i_0, y^{i+1}_1, j^{\alpha_{i+1}}_{i+1}, j^{\alpha_i}_i, \mu), \quad B_i : \bar{y}^i_1 - y^- = \tilde{G}(x^i_0, y^{i+1}_1, j^{\alpha_{i+1}}_{i+1}, j^{\alpha_i}_i, \mu).$$

Как следует из свойств функций $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$, операторы A_i и B_{i+1} будут удовлетворять условиям леммы. Поэтому будет существовать только одна траектория Γ, пересекающая последовательно множества $\sigma^0_{j^{\alpha_i}_i}$.

Пусть Γ – асимптотическая траектория к периодическому движению $\mathcal{L}_\mu$ только при $t \to -\infty$. Обозначим через $M^1_0, \ldots, M^i_0, \ldots$ точки ее пересечения с σ^0 в порядке возрастания времени. Через M^i_1 обозначим ее точки, принадлежащие окрестности неподвижной точки $(0,0)$ и такие, что $M^i_1 = T^{j^*_i}_0 T^{-1}_1 M^1_0$. Здесь j^* – некоторое целое положительное число, а $i = 0, -1, -2, \ldots$. Координаты точек M^i_1 будем обозначать через (x^i, y^i). Из того, что Γ – асимптотическая к $\mathcal{L}_\mu$, следует, что M^i_1 принадлежат неустойчивому многообразию, т.е. $x^i = 0$, и стремится к $(0,0)$ при $t \to -\infty$. Здесь Γ, при условии, что Γ пересекает σ^0 в точках $\bigcup\limits_{\alpha=1,2} \bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty} \sigma^0_{k^\alpha}$, мы поставим в соответствие бесконечную в одну сторону последовательность

$$[j_0(\infty), \ldots, (j_1, \alpha_1), \ldots, (j_i, \alpha_i), \ldots), \tag{4.8}$$

которую будем также записывать в виде

$$[j_0(\infty), j^{\alpha_1}_1, \ldots, j^{\alpha_i}_i, \ldots). \tag{4.9}$$

Если символы последовательности (4.9) удовлетворяют условию (4.6), то связи между координатами указанных точек траектории можно записать в виде

$$\begin{array}{l} x^i_0 - x^+ = \tilde{F}(x^{i-1}_0, y^i_1, j^{\alpha_i}_i, j^{\alpha_{i-1}}_{i-1}, \mu), \quad i = 2, 3, \ldots, \\ y^i_1 - y^- = \tilde{G}(x^i_0, y^{i+1}_1, j^{\alpha_{i+1}}_{i+1}, j^{\alpha_i}_i, \mu), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ x^1_0 - x^+ = \tilde{F}(x^0_0, y^1_1, j^{\alpha_1}_1, j_0(j^{\alpha_1}_1, \mu), \mu), \\ y^0_1 - y^- = \tilde{G}(x^0_0, y^1_1, j^{\alpha_1}_1, j_0(j^{\alpha_1}_1, \mu), \mu), \\ x^i = \xi(x^{i-1}, y^i, j^*, \mu), \quad y^{i-1} = \eta(x^{i-1}, y^i, j^*, \mu), \quad i = 0, -1, -2, \ldots. \end{array} \tag{4.10}$$

Покажем, что каждой последовательности (4.9), удовлетворяющей условию (4.6), соответствует только одна траектория, асимптотическая к $\mathcal{L}_\mu$ при $t \to -\infty$. Для этого по последовательности (4.9) составим следующую последовательность операторов:

$$\begin{array}{l} A_{i-1} : \bar{x}^i_0 - x^+ = \tilde{F}(x^{i-1}_0, y^i_1, j^{\alpha_i}_i, j^{\alpha_{i-1}}_{i-1}, \mu), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ B_i : \bar{y}^i_1 - y^- = \tilde{G}(x^i_0, y^{i+1}_1, j^{\alpha_{i+1}}_{i+1}, j^{\alpha_i}_i, \mu), \quad i = 0, 1, \ldots, \\ A_{i-1} : \bar{x}^i = \xi(x^{i-1}, y^i, j^*, \mu), \quad i = 0, -1, -2, \ldots, \\ B_i : \bar{y}^i = \eta(x^i, y^{i+1}, j^*, \mu), \quad i = -1, -2, \ldots \end{array} \tag{4.11}$$

где j_0 и j^* – достаточно большие целые числа, а X_i есть $|x^i_0 - x^+| \le \varepsilon_0$ для $i = 1, 2, \ldots, |x^i| \le r$ для $i = 0, -1, -2, \ldots$ и $Y_i : |y'_1 - y^-| \le \varepsilon_1$ для $i = 0, 1, \ldots$ и $|y^i| \le r$ для $i = -1, -2, \ldots$. Из

свойств функций $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, ξ, η следует, что к последовательности (4.11) применима лемма о неподвижной точке. Поэтому неподвижная точка последовательности (4.11) будет удовлетворять системе соотношений (4.10). Из того, что $(x^i, y^i) \in \Pi : (|x^i| \leq r, |y^i| \leq r)$ при отрицательных i, следует, что соответствующая траектория будет асимптотической к $\mathcal{L}_\mu$ при $t \to -\infty$.

Аналогично доказывается, что каждой последовательности

$$(\ldots, j_{-i}^{\alpha_{-i}}, \ldots, j_{-1}^{\alpha_{-1}}, j_0^{\alpha_0}(\infty)], \tag{4.12}$$

символы которой удовлетворяют неравенству (4.6), будет соответствовать только одна асимптотическая траектория к $\mathcal{L}_\mu$ при $t \to +\infty$, последовательно пересекающая $\sigma^0_{j_{-i}^{\alpha_{-i}}}$, а конечному отрезку

$$[j_0(\infty), j_1^{\alpha_1}, \ldots, j_p^{\alpha_p}, j_{p+1}^{\alpha_{p+1}}, j_{p+1}^{\alpha_{p+1}}(\infty)]$$

– гомоклиническая кривая.

Основная теорема доказана.

(Поступила в редакцию 3/III 1971 г.)

Литература

1. А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, И. И. Гордон, И. Г. Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Москва, изд-во <Наука>, 1967.

2. Е. А. Леонтович, О рождении предельных циклов из сепаратрисы, ДАН СССР, 28, № 4 (1951), 641-644.

3. Л. П. Шильников, О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло, Матем. сб., 77 (119) (1968), 461-472.

4. Л. П. Шильников, К вопросу о структуре расширенной окрестности состояния равновесия типа седло-фокус, Матем. сб., 81 (123) (1970), 92-103.

5. Л. П. Шильников, Об одной задаче Пуанкаре - Биркгофа, Матем. сб., 74 (116) (1967), 378-397.

6. Л. П. Шильников, К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора, ДАН СССР, 180, № 2 (1968), 286-289.

1973 Математический Сборник 90(132): 1, с. 139-156

О трёхмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. II

Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников (Горький)

§ 1. **Введение**

Как известно, в основе построения теории бифуркаций двумерных динамических систем лежат понятия грубости и степеней негрубости, введённые в работах А.А.Андронова, Л.С.Понтрягина и Е. А. Леонтович. Эти понятия позволили указать условия грубости двумерных систем и показать, что грубые системы в пространстве всех динамических систем с достаточно гладкой топологией всюду плотны и заполняют области, границы которых состоят из бифуркационных поверхностей коразмерности 1, на которых сосредоточены системы первой степени негрубости. При этом особо важно отметить, что знание систем первой степени негрубости позволило указать и рассмотреть все основные типы бифуркаций состояний равновесия и периодических движений двумерных систем.

Значительно сложнее ситуация в многомерном случае. Здесь во всех работах по теории бифуркации многомерных динамических систем в силу отсутствия необходимых и достаточных условий грубости использовалось то интуитивно-естественное предположение, что грубыми системами, по крайней мере, являются те системы, у которых грубые состояния равновесия, периодические движения и инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально. Основные же бифуркации состояний равновесия и периодических движений связывались с рассмотрением тех негрубых систем, которые в пространстве динамических систем с достаточно гладкой топологией заполняли "пленки" коразмерности 1.

В настоящее время все основные типы бифуркаций состояний равновесия и периодических движений систем Морса – Смейла в определенном смысле изучены. Во всех рассмотренных случаях соответствующие бифуркационные пленки коразмерности 1 являлись достижимыми с обеих сторон (определение достижимости см. ниже). Исключение составила бифуркация, связанная с рождением инвариантного тора от негрубого периодического движения с двумя комплексно-сопряженными мультипликаторами, лежащими на единичной окружности.

Настоящая работа посвящена изучению бифуркационных явлений, связанных с существованием в системе негрубой гомоклинической кривой. Так как наличие гомоклинической кривой в системе является тем принципиально новым фактом, который отличает системы с конечным числом периодических движений от систем со счётным множеством периодических движений, то рассматриваемая бифуркация представляет также интерес в связи с возможностью перехода от систем Морса – Смейла к системам с гомоклинической структурой. При этом отметим, что задача, связанная с установлением условий появления гомоклинических структур, представляет непосредственный интерес в связи с нахождением условий возникновения "стохастичности" в реальных физических объектах. Здесь также системы с негрубой гомоклинической кривой Γ_0, по которой устойчивое и неустойчивое многообразия седлового периодического движения $\mathcal{L}_0$ имеют касание первого порядка, образуют

связную бифуркационную поверхность H^1 коразмерности 1. В качестве близких систем к рассматриваемой системе (X_0, M^3) берется непрерывное однопараметрическое семейство систем (X_μ, M^3), не имеющее пересечений с H^1 при $\mu \neq 0$, где $X_{\mu=0} \equiv X_0$, X_μ – C^3-гладкое векторное поле.

Как было установлено в первой части работы, задача о структуре множества N всех траекторий, целиком лежащих в расширенной окрестности периодического движения, т. е. в некоторой окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$ гомоклинической кривой Γ_0, для каждого μ (но достаточно малого) сводится к изучению отображений, определенных в окрестности некоторой негрубой гомоклинической точки и строящихся с помощью отображений T_0 и T_1. Напомним, что на секущей S к периодическому движению $\mathcal{L}_\mu$ отображение T_0 при достаточно малых μ записывалось в виде

$$\bar{x} = \lambda(\mu)x + f(x, y, \mu)x, \qquad \bar{y} = \gamma(\mu)y + g(x, y, \mu)y, \tag{1.1}$$

где $M^*(0, 0)$ – неподвижная точка, соответствующая $\mathcal{L}_\mu$, $|\lambda(0)| < 1$, $|\gamma(0)| > 1$. Через $M^-(0, y^-)$ $(y^- > 0)$ и $M^+(x^+, 0)$ $(x^+ > 0)$ обозначались точки пересечения гомоклинической кривой Γ_0 с S, а через Π_0 и Π_1 их некоторые достаточно малые прямоугольные окрестности. Отображение T_1, определенное на Π_1, записывалось в виде

$$\begin{gathered} \bar{x} - x^+ = F(x, y - y^-, \mu), \\ \bar{y} = G(x, y - y^-, \mu) = E(\mu) + C(x, y, \mu) + D(x, y, \mu)(y - y^- - \varphi(x, \mu))^2, \end{gathered} \tag{1.2}$$

где $E(\mu) = G(0, \varphi(0, \mu), \mu)$, $C(0, 0, 0) = G_x(0, 0, 0)$, $d = 2D(0, y^-, 0) = G_{yy}(0, 0, 0) \neq 0$, а $\varphi(x, \mu)$ – решение уравнения $G_y(x, y - y^-, \mu) = 0$. Как показано в первой части работы, при $E/d > 0$ в расширенной окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$ нет однообходных гомоклинических кривых, а при $E/d < 0$ существует две грубые однообходные гомоклинические кривые.

Рассмотрим функционал $l : (X, M^3) \to E$ для систем (X, M^3), близких к (X_0, M^3). Нетрудно видеть, и это отмечалось в [1], что множество H^1 систем, которые под действием l отображаются в 0, образуют пленку коразмерности 1. Обозначим через V окрестность точки (X_0, M^3). Выберем V так, чтобы $V \cap H^1$ было локально связным. Тогда поверхность H^1 будет разбивать V на две области H^+ и H^-. Пусть H^- состоит из систем, для которых $E/d < 0$, т. е. тех систем, у которых в достаточно малой расширенной окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$ есть две однообходные гомоклинические кривые Γ_1 и Γ_2, и причем грубых, а H^+ – из систем, для которых $E/d > 0$, т.е. таких систем, у которых в $U(\bar{\Gamma}_0)$ однообходные гомоклинические кривые отсутствуют.

Определение 1. *Бифуркационную поверхность (пленку) $H_0^1 = H^1 \cap V$ будем называть* достижимой в точке X_0 из области H^+ (H^-), *если найдется такая окрестность V, что для любого пути X_μ, $0 \leq \mu \leq \mu_0$, где $X_{\mu=0} \equiv X_0$, удовлетворяющего условию $X_\mu \in H^+ \cap V$ $(H^- \cap V)$ системы X_μ, $0 < \mu \leq \mu_0$, топологически эквивалентны и сопрягающий гомеоморфизм $\eta_{\mu_1\mu_2} : X_{\mu_1} \to X_{\mu_2}$ стремится к тождественному при $\mu_1 \to \mu_2$. Бифуркационную поверхность H^1 будем называть* достижимой из области $H^+(H^-)$, *если она достижима из $H^+(H^-)$ для любой точки $X_0 \in H_0^1$.*

В противном случае буфуркационную поверхность H^1 будем называть недостижимой в точке X_0 из области $H^+(H^-)$. Аналогично определяется понятие недостижимой поверхности H^1, либо из H^+, либо из H^-.

Из определения следует, что если поверхность H^1 недостижима из $H^+(H^-)$, то для любой точки $X_0' \in H^1$ найдется путь X_μ, $0 \le \mu \le \mu_0$, $X_{\mu=0} \equiv X_0$ такой, что при стремлении к X_0 вдоль пути X_μ из области $H^+(H^-)$ найдётся бесконечное множество бифуркационных значений параметра $\mu_\alpha \in [0, \mu_0]$, имеющее предельную точку $\mu = 0$.

Обычно задача установления недостижимости H^1 является более простой задачей, так как недостижимость H^1 устанавливается путем обнаружения в любой окрестности H^1 негрубых систем. Примером такого случая может служить задача о структуре расширенной окрестности седло-фокуса [2]. Достижимость же бифуркационных поверхностей коразмерности 1 фактически была доказана лишь для двухмерных систем. Для многомерных систем эта задача значительно сложнее.[1]

Как известно, необходимые и достаточные условия структурной устойчивости диффеоморфизмов были сформулированы С.Смейлом. Для C^1-диффеоморфизмов Морса – Смейла достаточность этих условий была доказана Пэли и Смейлом [8], а для общих C^2-гладких – Роббином [12]. В этом свете интересной представляется работа Фрэнкса [14], в которой установлено, что если диффеоморфизм f удовлетворяет условию "дифференциальной" Ω-устойчивости, то на неблуждающем множестве имеет место аксиома A + отсутствие циклов. С другой стороны, диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A и условию отсутствия циклов, является дифференциально Ω-устойчивым. Работы перечисленных авторов впервые указали необходимые и достаточные условия Ω-сопряженности для достаточно широкого класса диффеоморфизмов.

В связи с этим мы введём более слабое понятие достижимости бифуркационной пленки H^1, которое, на наш взгляд, является более удобным для задач теории бифуркаций предельных множеств.

Определение 2. *Бифуркационную поверхность $H_0^1 = H^1 \cap V$ назовем* Ω-достижимой в точке $X_0 \in H_0^1$ из области $H^+(H^-)$, *если найдется такая окрестность V, что для любого пути $X_\mu, 0 \le \mu \le \mu_0$, где $X_{\mu=0} \equiv X_0$, удовлетворяющего условию $X_\mu \in H^+ \cap V(H^- \cap V), 0 < \mu \le \mu_0$, системы $X_\mu, 0 < \mu \le \mu_0$, топологически эквивалентны на неблуждающем множестве и сопрягающий гомеоморфизм $\eta^\Omega_{\mu_1\mu_2}$ стремится к тождественному при $\mu_1 \to \mu_2$.*

В противном случае H_0^1 будем называть Ω-недостижимой в точке $X_0 \in H_0^1$ из $H^+(H^-)$. Легко видеть, что из Ω-недостижимости H_0^1 следует недостижимость в смысле определения 1.1.

В первой части работы было установлено, что в достаточно малой расширенной окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$ периодического движения $\mathcal{L}_\mu$ существует подсистема N', траектории которой являются седловыми (исключая Γ_0 при $\mu = 0$) и находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями некоторой подсистемы $\Omega(\lambda, \gamma, c, d, E, \bar{k})$ схемы Бернулли из трех символов. Множество N' не пусто, так как при достаточно малых μ периодическое движение $\mathcal{L}_\mu \in N'$. Однако N', вообще говоря, не исчерпывает всех траекторий, целиком лежащих в $U(\bar{\Gamma}_0)$ (множество всех траекторий обозначим через N), т. е. в [1] было доказано лишь, что $N' \subset N$.

В этой части работы мы укажем те случаи, когда $N' = N$, и, как следствие, выясним возможность перехода через H^1 от систем Морса – Смейла к системам со счетным множеством периодических движений. Обсудим также те случаи, когда множества N' и N не совпадают,

[1] В связи с этим см. работу [3], в которой рассмотрен переход через достижимую с обеих сторон пленку коразмерности 1 от систем Морса – Смейла к системам с грубой гомоклинической структурой.

и установим, что в этих случаях пленка H^1 является недостижимой, по крайней мере, с одной стороны.

Качественный характер поведения траекторий, целиком лежащих в достаточно малой расширенной окрестности периодического движения при $\mu = 0$, зависит существенным образом только от параметров λ, γ, c, d. В зависимости от знаков этих параметров возможны 16 комбинаций. На самом деле число комбинаций можно уменьшить. Это связано с тем обстоятельством, что роль преобразования T_1 может играть отображение $T_1' = T_0 T_1$, а роль гомоклинической точки M^+ – точка $M_0^+ = T_0 M^+$. При этом знаки параметров c' и d' отображения T_1' будут связаны со знаками параметров λ, γ, c, d следующим образом:

Таблица 1

	λ	γ	c	d
1	+	+	+	−
2	+	+	−	−
3	−	+	−	−
4	+	+	−	+
5	−	−	+	+
6	−	−	+	+
7	+	−	+	+
8	+	−	−	+
9	−	+	+	+
10	+	+	+	+

$$\mathrm{sign} c' = \mathrm{sign} \frac{c}{\lambda\gamma}, \qquad \mathrm{sign} d' = \mathrm{sign} \frac{d}{\gamma}. \tag{1.3}$$

Ясно, что все выводы относительно N не будут зависеть от того, рассматриваем ли мы преобразование T_1 или T_1'.
Используя (1.3), число комбинаций знаков можно уменьшить до следующих 10:

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что седловая величина $|\lambda(\mu)\gamma(\mu)|$ меньше единицы. Случай, когда $|\lambda(\mu)\gamma(\mu)| > 1$ сводится к рассматриваемому заменой t на $-t$. При этом параметры отображений $\tilde{T}_0 = T_0^{-1}$ и $\tilde{T}_1 = T_1^{-1}$ будут выражаться через исходные следующим образом:

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{\gamma}, \qquad \tilde{\gamma} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \tilde{c} = \frac{1}{c}, \qquad \tilde{d} = -\frac{d}{cb^2}, \qquad \tilde{E} = -\frac{E}{c}. \tag{1.4}$$

Для предварительного рассмотрения возможных типов поведения траекторий мы выскажем ряд общих утверждений, в основу которых удобно положить вопрос о существовании и числе "подков" Смейла. Дело в том, что согласно основной теореме первой части для каждого $j \geq \bar{k}$, удовлетворяющего неравенству

$$\frac{\gamma^{-j}(\nu_1^* - c\nu_2^*(\lambda\gamma)^j) - E(\mu)}{d} > 0, \tag{1.5}$$

отображение $T_1 T_0^j : \sigma_j^0 \to \sigma_j^0$ действует аналогично диффеоморфизму "подковы" (о диффеоморфизме "подковы" Смейла см., например, [4], [5]. Напомним, что σ_j^0 есть область определения отображения $T_1 T_0^j$, лежащая в окрестности гомоклинической точки M^+. Из неравенства (1.5) легко вытекает, что при $\mu = 0$, за исключением случая $\gamma > 0, d < 0$, в достаточно малой расширенной окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$ периодического движения $\mathcal{L}$, существует счетное множество "подков Смейла". "Подковы" будут отсутствовать в случае $\gamma > 0, d < 0$

и $E(\mu) \leq 0$. Как отмечалось в [1], в последнем случае для N' имело место следующее описание:

$$N' = \begin{cases} \mathcal{L}_\mu & \text{при } E(\mu) < 0, \\ \mathcal{L}_0 \cup \Gamma_0 & \text{при } \mu = 0, \end{cases}$$

Ниже в §2 будет установлено, что при $\gamma > 0, d < 0$ и $E(\mu) \leq 0$ множество N' совпадает с N, т. е. N' дает полное описание всех траекторий, лежащих в $U(\bar{\Gamma}_0)$. Другими словами, пленка H^1 в этом случае является Ω-достижимой из H^+ в $U(\bar{\Gamma}_0)$. С другой стороны пленки H^1 системы X_μ имеют всегда две грубые гомоклинические кривые $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$, при этом "подков Смейла" будет бесконечно. Поэтому характерной особенностью этого случая является взрывной характер возникновения "подков" при переходе через H^1. При этом заметим, что со стороны H^- пленка H^1 является недостижимой.

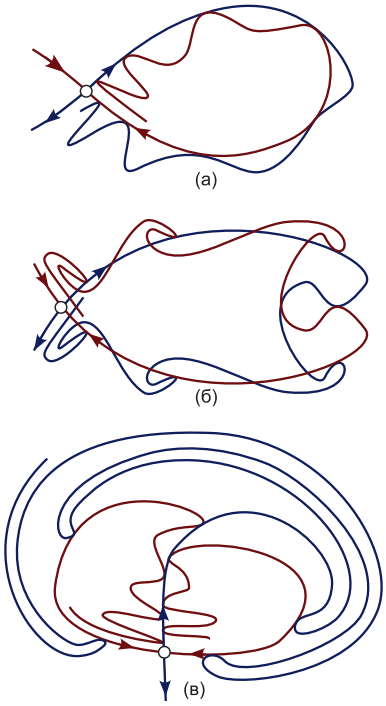


Рис. 1

Условиям $\gamma > 0, d < 0$ в таблице 1 соответствуют три первых случая. Соответствующие системы для всех трех случаев могут быть реализованы как диффеоморфизмы плоскости (см. рис. 1). При этом, если в первом случае вплоть до возникновения негрубой гомоклинической кривой Γ_0 другие гомоклинические кривые для соответствующего периодического движения $\mathcal{L}_0$ могут отсутствовать, то во втором – всегда обязаны быть другие гомоклинические кривые.

Из этого можно заключить, что в случае $\gamma > 0, d < 0$ возможен переход от систем Морса – Смейла к системам со счетным множеством периодических движений.[2]

Кроме указанных случаев Ω-достижимой в $U(\bar{\Gamma}_0)$ с одной стороны является пленка H^1, соответствующая системам четвертого случая таблицы: $\lambda > 0, \gamma > 0, c < 0, d > 0$. Однако здесь Ω-достижимость пленки H^1 имеет место из области H^- – области с двумя гомоклиническими кривыми $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$. В §3 будет установлено, что при $E(\mu) \leq 0$ множество N' будет совпадать с N в $U(\bar{\Gamma}_0)$. Здесь для N будет иметь место следующее простое описание: все траектории N находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями схемы Бернулли из трех символов. Выход же на H^1 из H^- сопровождается простой бифуркацией, связанной со слиянием однообходных гомоклинических кривых $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$ в негрубую кривую Γ_0.

С другой стороны, т. е. из области H^+, пленка H^1 является недостижимой. В частности, из (1.5) видно, что "подков Смейла" при $E(\mu) < 0$ – конечное число, которое, однако, стремится к бесконечности при стремлении μ к нулю.

[2]Таким образом, утверждение, высказанное в [6], что при подходе к H^1 со стороны систем Морса – Смейла происходит постепенное возрастание числа периодических движений до бесконечности, неверно.

Во всех остальных случаях пленка H^1 является недостижимой с обеих сторон. В случаях 5 – 8 таблицы, т. е. когда неустойчивое многообразие $\mathfrak{M}_0^-$ периодического движения $\mathcal{L}_\mu$ является листом Мебиуса, это легко устанавливается с помощью изучения бифуркаций неподвижных точек отображения $T_j(\mu) = T_1 T_0^j : \sigma_j^0 \to \sigma_j^0$. В случаях 9 – 10 доказательство недостижимости будет состоять в изучении свойств сквозных отображений $T_{ij}(\mu) : \sigma_j^0 \to \sigma_i^0 \to \sigma_j^0$ и бифуркации двухобходных периодических движений.

Для изучения моментов бифуркации периодических движений мы для простоты изложения пользуемся модельными отображениями, которые сохраняют все основные черты полных отображений. С нашей точки зрения эти отображения являются представителями версального семейства отображений, согласно терминологии В. И. Арнольда [7]. Однако версальность этого семейства мы не доказываем.

Тот факт, что пленка H^1 в этих случаях является недостижимой с обеих сторон, существенно сказывается на структуре систем на H^1. На H^1 всюду плотны системы, имеющие негрубые периодические движения.

Настоящая часть состоит из трех параграфов. Она в существенной мере использует результаты, терминологию и определения первой части.

§ 2. Случаи Ω-достижимости бифуркационной пленки H^1 из области H^+

Как следует из первой части, во всех случаях, исключая $\gamma > 0, d < 0$ и $E(\mu) \leq 0$, в N' содержится континуум седловых траекторий. Поэтому естественно ожидать, что только в этом исключительном случае бифуркационные пленки могут отделять системы Морса – Смейла от систем со счетным множеством периодических движений.

Теорема 2.1 *Бифуркационные пленки H^1, соответствующие случаю $\gamma > 0, d < 0$, являются Ω-достижимыми в достаточно малой расширенной окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$ со стороны H^+, при этом $N = N' = \mathcal{L}_\mu$, при $E(\mu) < 0$.*

Так как $\gamma > 0$, то расположение областей σ_i^0 и σ_i^1 будет как на рис. 2. Поэтому, если траектория $\Gamma \in N$, то все точки пересечения Γ с $\sigma^0 = \bigcup\limits_{i=\bar{k}}^{\infty} \sigma_i^0$ имеют неотрицательную ординату.

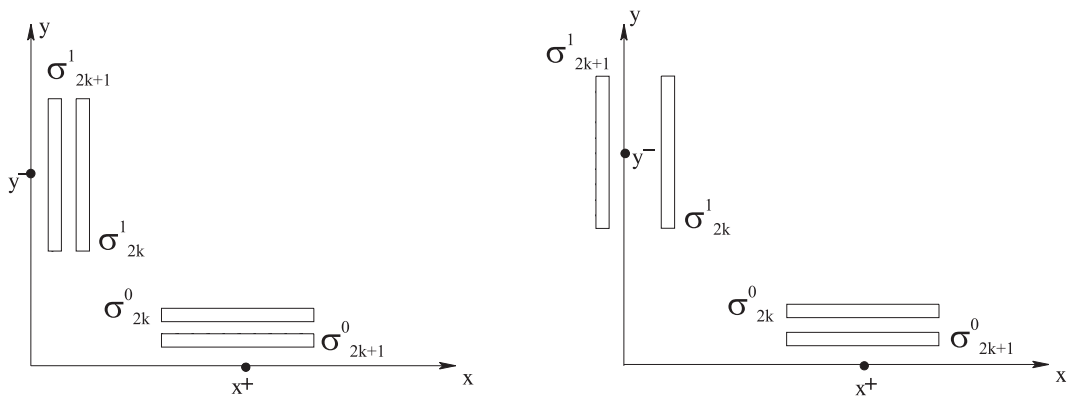
Предположим, что траектория $\Gamma \in N$ – асимптотическая к $\mathcal{L}_\mu$ при $t \to -\infty$, следовательно, найдется такая точка $M(y_1, 0) \in \mathfrak{M}_0^- \cap S \cap \Pi_1$ (где $\Pi_1 = \{M(x_1, y_1), |x_1| \leq \varepsilon_1, |y_1 - y^-| \leq \varepsilon_1\}$), что $T_1 M \in \sigma^0$. Точка $M(y_1, 0)$ при отображении T_1 переходит в точку

$$x_0 - x^+ = F(0, y_1 - y^-, \mu),$$

$$y_0 = G(0, y_1 - y^-, \mu) = E(\mu) + D(0, y_1, \mu)(y_1 - y^- - \varphi(0, \mu))^2.$$

Выберем $U(\bar{\Gamma}_0)$ такой малой, чтобы $\operatorname{sign} D = \operatorname{sign} d$. По предположению теоремы $E(\mu) \leq 0$ и $d < 0$. Поэтому $y_0 \leq 0$, и, следовательно, $T_1 M \cap \sigma^0 = \emptyset$. Из полученного противоречия вытекает, что $\Gamma \in N$ не может быть асимптотической к $\mathcal{L}_\mu$ при $t \to -\infty$.

Предположим теперь, что существует такая малая окрестность $U(\bar{\Gamma}_0)$ (следовательно, $\bar{k}$ достаточно велико), что N содержит траекторию Γ, отличную от $\mathcal{L}_\mu$. Тогда, как следует из §3 первой части работы, Γ можно поставить в соответствие последовательность точек $M_0^i(x_0^i, y_0^i) \in \sigma_{j_i}^0$, где $j_i \geq \bar{k}$, а i принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ в случае, когда Γ не является



а) λ>0, γ>0 б) λ<0, γ>0

Рис. 2

асимптотической к $\mathcal{L}_\mu$, и значения $-1, -2, \ldots$, когда Γ – асимптотическая к $\mathcal{L}_\mu$ при $t \to \infty$. Образом точки $M_0^i(x_0^i, y_0^i) \in \sigma_{j_i}^1$ при действии отображения $T_0^{j_i}$ будет точка $M_1^i(x_1^i, y_1^i) \in \sigma_{j_i}^1$, координаты которой, используя представление (2.7) для $T_0^{j_i}$ из [1], можно записать в виде:

$$x_1^i = \xi(x_0^i, y_1^i, j_i, \mu), \qquad y_0^i = \eta(x_0^i, y_1^i, j_i, \mu).$$

Образом точки $M_1^i(x_1^i, y_1^i) \in \sigma_{j_i}^1$ при действии T_1 будет точка $M_0^{i+1}(x_0^{i+1}, y_0^{i+1}) \in \sigma_{j_{i+1}}^0$, координаты которой будут

$$x_0^{i+1} - x^+ = F(x_1^i, y_1^i - y^-, \mu), \qquad y_0^{i+1} = G(x_1^i, y_1^i - y^-, \mu).$$

Поэтому для точек $M_0^i \in \sigma_{j_i}^0$, $M_1^i \in \sigma_{j_i}^1$, $M_0^{i+1} \in \sigma_{j_{i+1}}^0$ будут иметь место следующие соотношения (подробности см. в [1]):

$$x_0^{i+1} - x^+ = F(\xi(x_0^i, y_1^i, j_i, \mu), y_1^i - y^-, \mu),$$

$$\eta(x_0^{i+1}, y_1^{i+1}, j_{i+1}, \mu) = G(\xi(x_0^i, y_1^i, j_i, \mu), y_1^i - y^-, \mu),$$

которые с учетом представления (1.2) для G, в виде

$$\begin{aligned} &x_0^{i+1} - x^+ = F(\xi(x_0^i, y_1^i, j_i, \mu), y_1^i - y^-, \mu), \\ &\frac{\eta(x_0^{i+1}, y_1^{i+1}, j_{i+1}, \mu) - E(\mu) - C(\xi, \mu)\xi}{D(\xi, y_1^i, \mu)} = (y_1^i - y^- - \varphi(\xi, \mu))^2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Из (2.1) и условия $d < 0$ вытекает, что

$$\eta(x_0^{i+1}, y_1^{i+1}, j_{i+1}, \mu) - E(\mu) - C(\xi, \mu)\xi \le 0 \tag{2.2}$$

для любых пар j_i, j_{i+1}.

Для функций ξ и η справедливы оценки (2.3), (2.4) первой части: $\eta > \delta_1 \gamma^{-j_{i+1}}$ и $|\xi| < \delta_2 |\lambda|^{j_i}$, где δ_1 и δ_2 – некоторые положительные постоянные. Поэтому выражение $\eta - E(\mu) - C(\xi, \mu)\xi$ можно оценить снизу:

$$\eta - E(\mu) - C(\xi, \mu)\xi > \delta_1 \gamma^{-j_{i+1}} - K\delta_2 |c||\lambda|^{j_i}$$

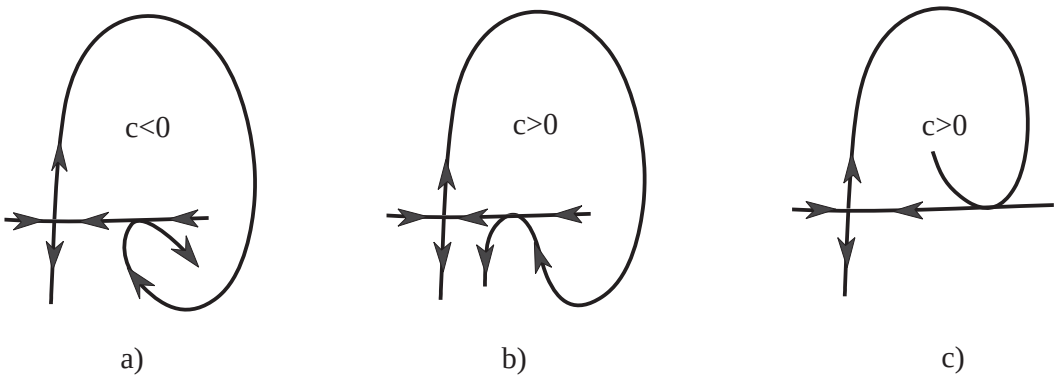


Рис. 3

где K – положительная постоянная. Из (2.2) следует, что

$$\delta_1\gamma^{-j_{i+1}} - K\delta_2|c||\lambda|^{j_i} < 0,$$

поэтому для j_i и j_{i+1} имеет место следующее неравенство:

$$j_{i+1} > \Theta_{j_i} - S,$$

где

$$\Theta = -\frac{\ln|\lambda|}{\ln\gamma}, \qquad S = \frac{\ln K\delta_2|c| - \ln\delta_1}{\ln\gamma}.$$

Из условия $|\lambda|\cdot\gamma < 1$ следует, что $\Theta > 1$, поэтому найдется такое $n > 0$, что $j_{i-n} < \bar{k}$. А это противоречит тому, что все $j_i > \bar{k}$. Теорема доказана.

Точно так же устанавливается, что $N = \mathcal{L}_0 \cup \Gamma_0$ при $\mu = 0$. Теперь легко видеть, что пленка H^1 Ω-достижима из H^+.

Таким образом, по структуре множества N первые три случая таблицы одинаковы. Первый случай касания может быть реализован для диффеоморфизма плоскости в плоскость без других гомоклинических точек (рис. 1а). Случай касания с $c < 0, \lambda > 0$ без наличия других гомоклинических точек на плоскости не реализуется. Это связано с тем обстоятельством, что неустойчивая сепаратриса после касания входит внутрь петли (рис. 3а). Но с другими гомоклиническими точками этот случай касания для диффеоморфизма плоскости в плоскость возможен (рис. 3б).

Приведем также теорему для случая, когда седловая величина $|\lambda\gamma| > 1$. Она является следствием теоремы 2.1 и соотношений (1.4).

Теорема 2.2 *При выполнении условий $|\lambda\gamma| > 1$, $1 > \lambda > 0$ и $c/d > 0$ существует такая достаточно малая окрестность $U(\bar{\Gamma}_0)$, что при всех малых μ, при которых $E(\mu)/d > 0$, $N = N' = \mathcal{L}_\mu$, а при $E(\mu) = 0$ $N = \mathcal{L}_0 \cup \Gamma_0$.*

Следствие *При $|\lambda\gamma| < 1$, $\gamma > 0, d < 0$ или при $|\lambda\gamma| > 1$, $\lambda > 0$, $c/d > 0$ бифуркационная поверхность H^1 может служить границей, отделяющей системы "Морса – Смейла" от систем со счетным множеством периодических движений. Переход через пленку H^1 в этом случае носит взрывной характер.*

Замечание. Указанные теоремы позволяют проследить возникновение гомоклинических структур у диффеоморфизмов плоскости в плоскость, порожденного системой

$$\frac{\mathbf{dx}}{d\mathbf{t}} = X(x,t,\mu), \qquad x \in R^2, \tag{2.3}$$

где $X \in C^3$ периодична по t с периодом 2π и не зависит от t при $\mu = 0$, т.е. $X(t,x,0) \equiv X_0(x)$. Соответствующий диффеоморфизм плоскости $t = 0$ в $t = 2\pi$ обозначим через T_μ.

Предположим, что система

$$\frac{dx}{dt} = X_0(x) \tag{2.4}$$

груба в области D, граница которой не имеет контактов с траекториями. Тогда при условии, что система (2.4) не имеет периодических движений, нетрудно получить, используя результаты работы Пэли и Смейла [8], что T_0 будет грубым.[3]

Пусть при $\mu = 0$ система (2.4) имеет состояние равновесия типа седло. Тогда система (2.3) при малых μ имеет грубое периодическое движение $\mathcal{L}_\mu$ седлового типа. Предположим, что при всех $0 \le \mu \le 1$ у системы (2.3) существует периодическое движение седлового типа, совпадающее с указанным $\mathcal{L}_\mu$ при достаточно малых μ. Пусть при $\mu = \mu^* < 1$ устойчивое $\mathfrak{M}^+$ и неустойчивое $\mathfrak{M}^-$ многообразия $\mathcal{L}_\mu$ первый раз касаются друг друга. Обозначим через $0 < \lambda(\mu^*) < 1$ и $\gamma(\mu^*) > 1$ корни характеристического уравнения этого периодического движения. Тогда может быть два следующих качественно различных случая возникновения гомоклинических структур.

1. Если седловая величина $\lambda(\mu^*)\gamma(\mu^*) < 1$ ($\lambda(\mu^*)\gamma(\mu^*) > 1$) и $\mathfrak{M}^-$ касается $\mathfrak{M}^+$ изнутри (рис. 3в)) (извне рис. 3б)), то еще до момента касания у системы есть счетное число периодических движений. Ясно, что в этом случае переход к системам со счетным числом периодических движений произошел при значении $\mu = \mu^{**} < \mu^*$.

2. Если седловая величина $\lambda(\mu^*)\gamma(\mu^*) < 1$ ($\lambda(\mu^*)\gamma(\mu^*) > 1$) и $\mathfrak{M}^-$ касается $\mathfrak{M}^+$ извне (изнутри), то при всех $\mu < \mu^*$ траекторий, целиком лежащих в расширенной окрестности седлового периодического движения, нет, кроме негрубой гомоклинической кривой при $\mu = \mu^*$, а переход через μ^* носит взрывной характер: при переходе через μ^* сразу возникает счетное множество периодических движений.

§ 3. Случай Ω-достижимости бифуркационной пленки H^1 из области H^-, заполненной системами со счетным множеством периодических движений

Рассматриваемая ситуация относится к четвертому случаю таблицы: $\lambda > 0$, $\gamma > 0$, $c < 0$, $d > 0$. Здесь при $E(\mu) < 0$ в силу того, что неравенство (3.22) работы [1]

$$\frac{\nu_1^* \gamma^{-j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} - c\nu_2^* \lambda^{j_i^{\alpha_i}} - E(\mu)}{d} \ge 0 \tag{3.1}$$

записывается в виде

$$\nu_1^* \gamma^{-j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}} + |c|\nu_2^* |\lambda|^{j_i^{\alpha_i}} + |E(\mu)| > 0, \tag{3.2}$$

(3.2) будет выполняться для любых $j_i^{\alpha_i} \ge \bar{k}$. Получаем, что траектории N', как следует из основной теоремы, находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями

[3]Если система (2.4) груба и имеет периодические движения, то T_0 не является грубым.

подсистемы $\Omega(\lambda, \gamma, c, d, E)$ схемы Бернулли из трёх символов 0, 1, 2, в которых на длины отрезков $j_i^{\alpha_i}$, состоящих из нулей и следующих за ненулевым символом α_i (либо 1, либо 2), нет никаких ограничений. Это позволяет при $E(\mu) < 0$ сделать следующую перекодировку:

$$\hat{\alpha} = \{\alpha_i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{\bar{k}}\}.$$

Теперь легко видеть, что в этом случае при $E(\mu) < 0$ траектории множества N' находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями схемы Бернулли из трех символов $0, \hat{1}, \hat{2}$. При этом заметим, что однообходным гомоклиническим кривым $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$ будут соответствовать в схеме Бернулли символические траектории

$$\Gamma_{1\mu} : (\ldots, 0, \ldots, 0, \hat{1}, 0, \ldots, 0, \ldots), \qquad \Gamma_{2\mu} : (\ldots, 0, \ldots, 0, \hat{2}, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Аналогично показывается, что при $\mu = 0$ траектории N' описываются с помощью схемы Бернулли из трех символов $0, \hat{1}, \hat{2}$, в которой траектории $(\Gamma_{1\mu})$ и $(\Gamma_{2\mu})$ склеены в одну.

Описанный случай характерен тем, что здесь $N' = N$. Точнее, здесь имеет место следующая

Теорема 3.1 *При сделанных условиях пленка H^1 является Ω-достижимой из H^- в достаточно малой расширенной окрестности $U(\bar{\Gamma}_0)$.*

Из построения отображений T_0^i и T_1 следует, что в множество N (за исключением $\mathcal{L}_\mu$ и однообходных гомоклинических кривых) входят те и только те траектории, которые хотя бы один раз пересекают множество $\bigcup\limits_{j=\bar{k}}^{\infty} \sigma_j^1$. Согласно основной теореме первой части работы, в множество N', исключая $\mathcal{L}_\mu$ и однообходные гомоклинические кривые, входят те и только те траектории из N, которые удовлетворяют двум условиям:

1. Все точки пересечения $\Gamma \in N'$ с Π_1 лежат в $\bigcup\limits_{j=\bar{k}}^{\infty} \bigcup\limits_{\alpha=1,2} \sigma_{j_i^{\alpha_i}}^1$.

2. Для любых последовательных точек пересечения Γ с Π_1 $M_1^i \in \sigma_{j_i^{\alpha_i}}^1$ и $M_1^{i+1} \in \sigma_{j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}^1$ выполняется неравенство (3.1).

Поэтому в множество $N \setminus N'$, если оно не пусто, входят траектории двух типов:

1. Траектории, точки пересечения которых с Π_1 лежат в $\bigcup\limits_{j=\bar{k}}^{\infty} \bigcup\limits_{\alpha=1,2} \sigma_{j_i^{\alpha_i}}^1$, но такие, что для некоторых двух последовательных точек пересечения Γ с Π_1 $M_1^i \in \sigma_{j_i^{\alpha_i}}^1$ и $M_1^{i+1} \in \sigma_{j_{i+1}^{\alpha_{i+1}}}^1$ неравенство (3.1) не выполняется.

2. Траектории, точки пересечения которых с Π_1 лежат в $\bigcup\limits_{j=\bar{k}}^{\infty} \sigma_j^1 \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1,2} \sigma_{j_i^{\alpha_i}}^1$,т.е. в тех точках, которые мы отрезали от областей σ_j^1 при доказательстве основной теоремы.

В условиях теоремы 3.1 множество траекторий первого типа пусто, так как неравенство (3.1) принимает вид (3.2) и выполняется при любых $j_i^{\alpha_i} \geq \bar{k}$.

Предположим, что существует траектория Γ из $N \setminus N'$ второго типа. Так как $\lambda > 0, \gamma > 0$, то расположение областей σ_j^1 и σ_j^0 будет как на рис. 2а), поэтому точки пересечения Γ с Π_0 имеют положительную ординату. Как показано в первой части работы, множество

$\sigma_j^1 \setminus \bigcup\limits_{\alpha=1,2} \sigma_{j_i^{\alpha_i}}^1$ состоит из точек $M(x_1, y_1)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|y - y^- - \varphi(x_1, \mu)| < L|\lambda|^j.$$

Покажем, что при действии T_1 образы этих точек имеют отрицательную ординату (см. рис. 4), т. е.

$$T_1(\sigma_j^1 \setminus \bigcup_{\alpha=1,2} \sigma_{j^\alpha}^1) \cap \sigma^0 = \emptyset.$$

Действительно, из представления (1.2) и оценок (2.3), (2.4) из [1] следует, что

$$y_0 = G(\xi(x_0, y_1, j, \mu), y - y^-, \mu) = E(\mu) + C(\xi, \mu)\xi + D(\xi, y_1, \mu)(y - y^- - \varphi(\xi, \mu))^2 <$$

$$< E(\mu) + \frac{c}{2}\xi + 2d(y - y^- - \varphi(\xi, \mu))^2 < E(\mu) + \frac{c}{2}\delta_1'\lambda^j + 2dL^2\lambda^{2j} =$$

$$= E(\mu) + c\lambda^j \left(\frac{\delta_1'}{2} + \frac{2dL^2}{c}\lambda^j\right),$$

где $\delta_1' > 0$. Так как $E \geq 0$ и $c < 0$, то y_0 будет отрицательным при всех $j \geq \bar{k}$, где $\bar{k}$ удовлетворяет условию $\frac{1}{2}\delta_1' + 2DL^2c^{-1}\lambda^{\bar{k}} > 0$. Последнее имеет место, если $U(\bar{\Gamma}_0)$ выбрать достаточно малой. Из полученного противоречия получаем, что $N = N'$. Ниже мы будем различать подсистему N при различных μ, обозначая ее через $N(\mu)$.

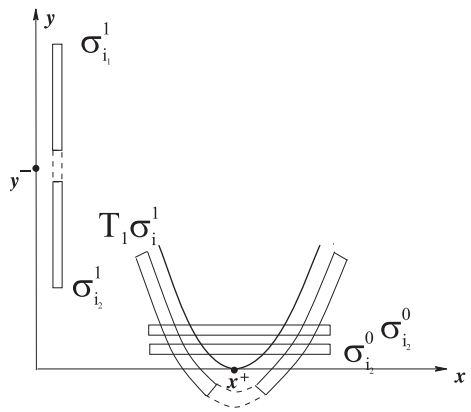


Рис. 4

Доказательство Ω-сопряженности систем N при различных μ будет состоять из нескольких этапов. Прежде всего легко видеть, что в нашем случае все $\Omega(\lambda, \gamma, c, d, E, \bar{k})$ при различных μ сопряжены с помощью тождественного отображения. Поэтому мы введем обозначения $\Omega(\lambda, \gamma, c, d, E, \bar{k}) = \Omega$. Стандартный поток – надстройку над Ω обозначим через Ω_t. Процедурой, аналогичной приводимой в [9], [10], показывается, что существуют гомеоморфизмы $\eta_\mu : N(\mu) \to \Omega_t$. Затем аналогично доказательству грубости системы Биркгофа – Морса, данному в работе [11] для случая грубой гомоклинической кривой, устанавливается взаимно однозначное соответствие траекторий систем $N(\mu_1)$ и $N(\mu_2)$ и их близость при μ_1 и μ_2, близких друг к другу. Поэтому можно найти такие гомеоморфизмы η_{μ_1} и η_{μ_2}, что системы $N(\mu_1)$ и $N(\mu_2)$ будут топологически эквивалентны с помощью $\eta_{\mu_1\mu_2} = \eta_{\mu_1}\eta_{\mu_2}^{-1}$, такого, что $\eta_{\mu_1\mu_2} \to \mathrm{id}$ при $\mu_1 \to \mu_2$.

Следствие. *Выход на пленку H^1 из области H^- в этом случае* (случай 4 таблицы) *сопровождается простой бифуркацией, связанной со слиянием однообходных гомоклинических кривых $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{2\mu}$ в Γ_0.*

Замечание. Этот случай при $\mu = 0$ представляет интерес в следующем плане. Так как $N = N'$, то согласно основной теореме первой части работы, все траектории, исключая

Γ_0, являются седловыми или, что то же самое, гиперболическими. Поэтому для каждой траектории $\Gamma \in N \setminus \Gamma_0$ для решений системы уравнений в вариациях имеют мести оценки:

$$|\xi(t,\xi_0)| < C_\Gamma e^{-\nu_\Gamma t}\|\xi_0\| \qquad \text{вдоль устойчивого многообразия при } \ t>0,$$

$$|\eta(t,\eta_0)| < C_\Gamma^{-1} e^{\nu_\Gamma t}\|\eta_0\| \qquad \text{вдоль неустойчивого многообразия при } \ t<0,$$

где C_Γ и ν_Γ – положительные константы, зависящие от Γ. Из доказательства основной теоремы следует, что для всех траекторий множества $N \setminus \Gamma_0$ имеет место следующая оценка: $\nu_\Gamma > \nu > 0$. Однако из того, что система негрубая, вытекает, что множество $\{C_\Gamma, C_\Gamma^{-1}\}$ не отделено от нуля, ибо в противном случае множество N было бы гиперболическим. По этой причине найдется по крайней мере счетное множество значений μ, при которых в расширенной окрестности $U(\bar\Gamma_0)$ существует негрубое периодическое движение с характеристическим показателем, равным нулю (см. далее §4).[4]

§ 4. Установление недостижимости пленки H^1

В этом параграфе будет установлено, что бифуркационная поверхность H^1, соответствующая системам с негрубой гомоклинической кривой, будет недостижимой хотя бы с одной стороны. Для этого мы укажем счетную последовательность бифуркационных значений μ, накапливающихся к $\mu = 0$, при которых динамическая система имеет негрубое периодическое движение. Для установления недостижимости этого достаточно. Чтобы не загромождать рассмотрение чисто техническими деталями, рассмотрение будет проводиться для случая укороченных отображений, которые, однако, сохраняют основные черты общих T_0 и T_1.

Пусть система (X_μ, M^3) такова, что отображение $T_0 : S \to S$ по траекториям системы вблизи $\mathcal{L}_\mu$ имеет вид

$$\bar x = \lambda x, \qquad \bar y = \gamma y, \qquad |\lambda| < 1, \quad |\gamma| > 1, \quad |\lambda\gamma| < 1. \tag{4.1}$$

Точки $M^+(x^+, 0)$ $(x^+ > 0)$ и $M^-(0, y^-)$ $(y^- > 0)$ – гомоклинические при $\mu = 0$, а отображение T_1, действующее из малой окрестности $\Pi_1 : \{|x_1| \ge \varepsilon_1, |y_1 - y^-| \ge \varepsilon_1\}$ точки M^- в окрестность $\Pi_0 : \{|x_0 - x^+| \ge \varepsilon_0, |y_0| \ge \varepsilon_0\}$ точки M^+ имеет вид

$$x_0 - x^+ = b(y_1 - y^-), \qquad y_0 = cx_1 + d(y_1 - y^-)^2 + \mu. \tag{4.2}$$

Отображение $T_i(\mu) = T_1 T_0^i : \sigma_i^0 \to \Pi_0$ определено на

$$\sigma_i^0 : \{M(x_0, y_0), |x_0 - x^+| \ge \varepsilon_0, |y_0\gamma^i - y^-| \ge \varepsilon_1\}$$

и в переменных (x_0, y_0) записывается в виде

$$x_0 - x^+ = b(y_0\gamma^i - y^-), \qquad y_0 = c\lambda^i x_0 + d(y_0\gamma^i - y^-)^2 + \mu. \tag{4.3}$$

Проследим, как меняется структура неподвижных точек отображения $T_i(\mu)$ при изменении параметра μ.

[4]В связи с обсуждением необходимых условий грубости см. недавнюю работу Фрэнкса [13]

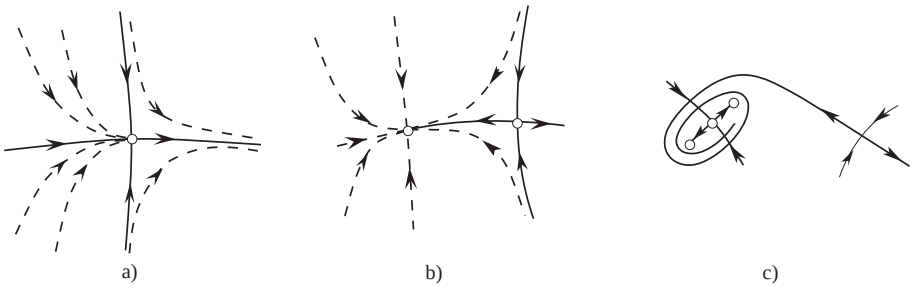


Рис. 5

Если $d\mu > d(y^-\gamma^{-i} - c\lambda^i x^+) + \dfrac{(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4}$, то неподвижных точек нет. При $d\mu = d(y^-\gamma^{-i} - c\lambda^i x^+) + \dfrac{(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4}$ на σ_i^0 существует одна сложная неподвижная точка типа седло-узел (рис. 5а)). Таким образом,

$$\mu_i^1 = y^-\gamma^{-i} - c\lambda^i x^+ + \frac{(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4d} \tag{4.4}$$

– бифуркационное значение параметра μ. При дальнейшем изменении параметра эта сложная неподвижная точка распадается на две: узловую устойчивую и седло-плюс [5] (рис. 5б)). При всем дальнейшем изменении параметра седловая неподвижная точка не бифурцирует, оставаясь все время седлом-плюс. Узловая неподвижная точка остается устойчивой до значения параметра

$$\mu_i^2 = y^-\gamma^{-i} - c\lambda^i x^+ - \frac{3(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4d} \tag{4.5}$$

При этом значении параметра у нее появляется мультипликатор, равный -1. Таким образом, μ_i^2 также бифуркационное значение параметра μ. При дальнейшем изменении параметра устойчивая неподвижная точка делается неустойчивой – седлом-минус [6], и от нее рождается двукратная устойчивая периодическая точка (рис. 5в)).

Таким образом, получаем, что у каждого отображения $T_i(\mu) : \sigma_i^0 \to \Pi_0$ существует два бифуркационных значения параметра μ_i^1 и μ_i^2, при которых отображение $T_i(\mu_i^\alpha)$ имеет негрубую неподвижную точку. Так как неподвижным точкам отображения $T_i = T_1 T_1^i$ соответствуют периодические движения динамической системы, обходящие один раз расширенную окрестность $U(\bar{\Gamma}_0)$ периодического движения $\mathcal{L}_\mu$, то из проведенного рассмотрения следует

Лемма 4.1. *Существует счетное множество значений $\mu_i^\alpha \to 0$ при $i \to \infty$, при которых динамическая система $(X_{\mu=\mu\alpha_i}, M^3)$ имеет негрубое однообходное периодическое движение.*

Из (4.4), (4.5) следует, что при $\gamma < 0$ эти значения μ_i^α лежат по обе стороны от $\mu = 0$. Поэтому справедливо

[5] Седло-полюс – это такая неподвижная точка типа седло, у которой мультипликаторы положительны.
[6] Седло-минус – это такая неподвижная точка типа.седло, у которой мультипликаторы отрицательны.

Утверждение 4.1. *В случаях 5 – 8 таблицы* ($\gamma < 0$) *бифуркационная поверхность* H^1 *недостижима с двух сторон.*

Если $\gamma > 0$, то все $\mu_i^\alpha > 0$, т. е. для всех случаев таблицы с $\gamma > 0$ пленка H^1 будет недостижима. Достижимость H^1 из области H^+ для случаев 1 – 3 ($\gamma > 0, d < 0$) следует из теоремы 2.1, а достижимость H^1 из области H^- в случае 4 таблицы – из теоремы 3.1. Поэтому справедливо

Утверждение 4.2. *При* $\gamma > 0, d < 0 (\lambda > 0, \gamma > 0, d > 0, c < 0)$ H^1 *недостижима со стороны* $H^-(H^+)$.

Недостижимость H^1 из области H^+ при $d > 0, \gamma > 0, c > 0$ следует из леммы 4.1.

Покажем недостижимость H^1 из области H^- ($\mu < 0$) при $d > 0, \gamma > 0, c > 0$ (случаи 9, 10 таблицы 1).

Лемма 4.2. *Если* $d > 0, \gamma > 0, c > 0$, *то существует счетное множество значений* $\mu_{ij} \to 0$ *при* $i, j \to \infty$, *при которых система* (X_μ, M^3) *имеет негрубое двухобходное периодическое движение.*

Рассмотрим отображение $T_{ij}(\mu) = T_1 T_0^j T_1 T_0^i : \sigma_i^0 \to \sigma_j^0 \to \sigma_i^0$, которое в переменных $(x_0^i, y_0^i), (x_0^j, y_0^j)$ запишется в виде

$$x_0^j - x^+ = b(y_0^i \gamma^i - y^-), \qquad y_0^j = c x_0^i \lambda^i + d(y_0^i \gamma^i - y^-)^2 + \mu,$$

$$\bar{x}_0^i - x^+ = b(y_0^j \gamma^j - y^-), \qquad \bar{y}_0^i = c x_0^j \lambda^j + d(y_0^j \gamma^j - y^-)^2 + \mu.$$

Координаты неподвижных точек этого отображения находятся из уравнений

$$\begin{aligned} d\xi^2 - \eta(\gamma^{-j} - bc\lambda^i) - y^-\gamma^{-j} + cx^+\lambda^i + \mu = 0, \\ d\eta^2 - \xi(\gamma^{-i} - bc\lambda^j) - y^-\gamma^{-i} + cx^+\lambda^j + \mu = 0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\xi = y_0^i \gamma^i - y^-, \eta = y_0^j \gamma^j - y^-$. Очевидно, существуют такие $\bar{k}, \bar{\mu}$, что при всех $i, j > \bar{k}$, $|\mu| < \bar{\mu}$ решения системы (4.6), если они существуют лежат в некоторой фиксированной ε-окрестности точки $\xi = 0, \eta = 0$. Выберем те пары i, j, которые удовлетворяют условию

$$\gamma^{-j}(y^- + \varepsilon) - \lambda^i(cx^+ - bc\varepsilon) < 0. \tag{4.7}$$

При $c > 0$ таких пар счетное множество. Из условия $\lambda\gamma < 1$ следует, что для таких пар $j > i$, поэтому $cx^+\lambda^j - y^-\gamma^{-i} < 0$. При $\mu = 0$ система (4.6) для i, j, удовлетворяющих (4.7), не имеет решений, так как первое уравнение положительно при всех $|\xi| < \varepsilon, |\eta| < \varepsilon$. При $\mu = y^-\gamma^{-j} - cx^+\lambda^i < 0$ система имеет два решения. Так как система (4.6) зависит от μ непрерывно, то найдется такое значение μ_{ij}, удовлетворяющее условию

$$y^-\gamma^{-j} - cx^+\lambda^i < \mu_{ij} < 0, \tag{4.8}$$

что система уравнения (4.6) при $\mu = \mu_{ij}$ имеет двойной корень (рис. 6). Тогда отображение $T_{ij}(\mu)$ с таким μ_{ij} будет иметь негрубую неподвижную точку. Из (4.8) следует, что $\mu_{ij} \to -0$ при $i, j \to \infty$, поэтому из лемм 4.1 и 4.2 вытекает

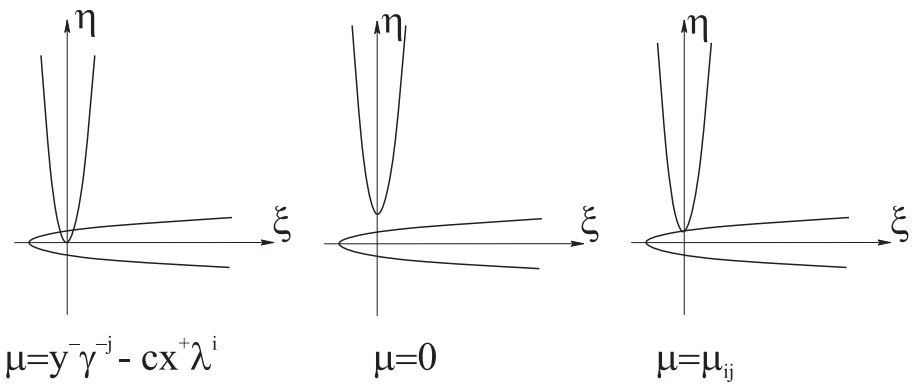


Рис. 6

Утверждение 4.3. *При $\gamma > 0, d > 0, c > 0$ (случаи 9, 10 таблицы) бифуркационная поверхность H^1 недостижима с двух сторон.*

Замечание. Полученные бифуркационные значения μ, конечно, не исчерпывают всех бифуркационных значений μ. Таким же образом, как при доказательстве леммы 4.2, можно показать, что существует счетная последовательность $\mu_{i_1,i_2,\ldots,i_s} \to 0$ при $i_1, i_2, \ldots, i_s \to \infty$, при которых система имеет негрубое s-обходное периодическое движение, и счетная последовательность $\mu_{j_1,j_2,\ldots,j_k}$, при которых система имеет негрубую k-обходную гомоклиническую кривую к периодическому движению $\mathcal{L}_\mu$.

Множество систем, принадлежащих H^1, в случаях, когда H^1 недостижима с двух сторон, устроено весьма сложно.

Утверждение 4.4. *В множестве систем, принадлежащих H^1, в случаях, когда H^1 недостижима с двух сторон, всюду плотны системы, имеющие негрубые периодические движения.*

Рассмотрим систему уравнений (4.6) при $\mu = 0$

$$\begin{aligned} d\xi^2 - \eta(\gamma^{-j} - bc\lambda^i) - y^-\gamma^{-j} + cx^+\lambda^i = 0, \\ d\eta^2 - \xi(\gamma^{-i} - bc\lambda^j) - y^-\gamma^{-i} + cx^+\lambda^j = 0, \end{aligned} \tag{4.9}$$

Так как H^1 недостижима с двух сторон, то можно считать $d > 0$. Мы рассмотрим только случай $\lambda > 0, \gamma > 0$ (остальные случаи рассматриваются аналогично).

Лемма 4.3. *Каковы бы ни были λ_0 и $\delta > 0$, существуют такие $i^* \to \infty$, $j^* \to \infty$ при $\delta \to 0$ и $\lambda^*(i^*, j^*)$, $\lambda_0 - \delta < \lambda^* < \lambda_0$, что при $\lambda = \lambda^*, i = i^*, j = j^*$ система (4.9) имеет двойной корень.*

Будем предполагать, что $j > i$. Тогда из условия $|\lambda\gamma| < 1$ получаем, что

$$cx^+\lambda^j - y^-\gamma^{-i} < 0 \tag{4.10}$$

при достаточно больших i, j. Положим $\lambda = \lambda_0 - \delta$ и выберем те пары i, j, которые удовлетворяют неравенству

$$cx^+\lambda^i - \delta - y^-\gamma^{-j} < 0 \tag{4.11}$$

Ясно, что множество таких пар счетно. При так выбранных i, j и $\lambda = \lambda_0 - \delta$ система (4.9) имеет по крайней мере два разных корня. Положим $\lambda = \lambda_0$ и выберем те пары i, j, которые удовлетворяют неравенству

$$c\lambda_0^i(x^+ - |b|\varepsilon) - y^-\gamma^{-j}(y^- + \varepsilon) > 0. \tag{4.12}$$

Множество таких пар счетно при всех c, λ, γ и достаточно малых ε, исключая случай $c < 0, \lambda > 0, \gamma > 0$ (в этом случае пленка H^1 достижима с одной стороны).

При так выбранных i, j и $\lambda = \lambda_0$ система (4.9) не имеет решений, так как первое уравнение для таких i, j положительно при всех $|\xi| < \varepsilon, |\eta| < \varepsilon$. Выберем из пар i, j те, которые удовлетворяют условиям (4.11) и (4.12) одновременно. Таких пар – счетное множество, в частности, им удовлетворяют те пары i, j, для которых справедливо неравенство

$$k_1 + \Theta_0 i < j < \Theta_1 i - k_2, \tag{4.13}$$

где k_1, k_2 – некоторые положительные постоянные, а $\Theta_0 = -\dfrac{\ln \lambda_0}{\ln \gamma}$, $\Theta_1 = -\dfrac{\ln(\lambda_0 - \delta)}{\ln \gamma}$, $0 < \Theta_0 < \Theta_1$. Из (4.13) видно, что пары i, j, удовлетворяющие этому условию, стремятся к бесконечности при $\sigma \to 0$, но при любом фиксированном δ таких пар – счетное множество. Выберем из них какую нибудь пару i^*, j^*. Тогда система (4.9) с $i = i^*, j = j^*$ будет иметь два разных решения при $\lambda = \lambda_0 - \delta$ и не будет иметь решений при $\lambda = \lambda_0$. Так как система уравнений (4.9) зависит от λ непрерывно, а все ее решения при достаточно больших i, j лежат в фиксированной ε-окрестности точки $\xi = 0, \eta = 0$, то существует такое $\lambda^*(i^*, j^*)$, что система (4.9) имеет кратный корень. Лемма доказана.

Рассмотрим однопараметрическое семейство систем $(X_0(\lambda), M^3) \in H^1$ для которых отображения T_0 и T_1 имеют вид (4.1) и (4.2). Так как решениям системы уравнений (4.9) соответствуют периодические решения динамической системы, то получаем, что в любой окрестности динамической системы $(X_0(\lambda_0), M^3)$ найдется система $(X_0(\lambda^*), M^3) \in H^1$, имеющая негрубое периодическое движение.

(Поступила в редакцию 28/VII 1972 г.)

Литература

1. Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников, О трехмерных динамических системах, близких к системе с негрубой гомоклинической кривой. I, Матем. сб. **88(130)** (1972), No.4, с.475-492.
2. Л.П.Шильников, К вопросу о структуре расширенной окрестности состояния равновесия типа седло-фокус., Матем. сб., **81(123)** (1970), 92-103.
3. Л.П.Шильников, Об одном новом типе бифуркации многомерных динамических систем, ДАН СССР, 189, № 1 (1969), 59–62.
4. S. Smale, A structurally stable diffeomorphism with an infinite number of periodic points, Труды междунар. симпозиума по нелинейным колебаниям, Киев, т. 2, 1963, 365–366.
5. В.М. Алексеев, Квазислучайные динамические системы. I, Квазислучайные диффеоморфизмы, Матем. сб., 76 (118) (1968), 72–134.
6. Ю.И.Неймарк, Об одном классе динамических систем, Труды V международной конференции по нелинейным колебаниям, Киев, т. 2, 1970, 363–376.
7. В.И. Арнольд, О матрицах, зависящих от параметров, Успехи матем. наук, XXV, вып. 2

(152) (1971), 101–114. 8. Дж. Пали, С. Смейл, Теоремы структурной устойчивости, Математика, 13: 2 (1969), 145–155.
9. В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, Об особых траекториях динамических систем, Успехи матем. наук, XXVII, вып. 3 (165) (1972), 189–190.
10. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Об особых множествах систем Морса Смейла // Тр. Моск. мат. о-ва.- 1973.- 28.- С. 181-214. 11. Л.П.Шильников, Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа, Матем. сб., 74 (116) (1967), 378-397.
12. I. W. Robbin, A structural stability theorem, Ann. Math., 94, № 3 (1971), 447–493.
13. J. Franks, Necessary conditions for stability of diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc., 158, № 2 (1971), 301–309.
14. J. Franks, Differentiably Ω-stable diffeomorphisms, Topology, 11, № 2 (1972), 107–113.

Л. П. Шильников

Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре

Труды 7 Международной конференции по нелинейным колебаниям, Берлин, 1977, 279-293.

1. Введение

Как известно, основы теории бифуркаций были заложены в трудах основоположников качественной теории А. Пуанкаре и А. М. Ляпунова. Здесь следует отметить прежде всего знаменитую задачу о фигурах равновесия, мемуары "О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями" и "Общая задача устойчивости движения". Однако точная математическая постановка задачи теории бифуркаций стала возможной лишь на основе понятий грубости и степеней негрубости, введённых А. А. Андроновым, Л. С. Понтрягиным и Е. А. Леонтович.[1] Доказанные ими теоремы о необходимых и достаточных условиях грубости и 1-ой степени негрубости гладких динамических систем на плоскости позволили полностью выделить и исследовать основные случаи бифуркаций состояний равновесия и периодических движений. Результаты этих исследований подытожены в хорошо известной монографии А. А. Андронова, Е. Леонтович и др. "Теория бифуркаций динамических систем на плоскости", 1967.

Благодаря этим исследованиям большой ряд физических явлений получил адекватное описание в терминах теории бифуркаций (мягкий и жёсткий режим возникновения колебаний, явления захватывания и затягивания и т. д.[2]).

Современный прогресс в изучении грубых многомерных динамических систем в первую очередь связан с именами С. Смейла и Д.В. Аносова.

Настоящая работа посвящена теории бифуркаций динамических систем. Отметим, что в основе этого рассмотрения лежит также понятие грубости. Бифуркации таких систем можно условно разделить на три типа:

1. Бифуркации не выводящие из класса систем Морса-Смейла.
2. Бифуркации в классе систем с нетривиальными гиперболическими множествами.
3. Бифуркации, связанные с переходом от систем Морса-Смейла к системам с нетривиальными гиперболическими множествами.

Бифуркации 1-го типа (Н.Н. Баутин, Э. Хопф, Р.М. Минц, Ю.И. Неймарк, Р. Сакер, Л.П. Шильников) были достаточно подробно освещены в докладе Е. А. Леонтович-Андроновой и автора [14] "Современное состояние теории бифуркаций динамических систем" на 5-ой международной конференции по нелинейным колебаниям в Киеве (см. также [6]). Ниже будет приведён ещё один новый случай бифуркации 1-го типа.

Бифуркации 2-го типа в основном изучались в связи с результатом, полученным С. Смейлом [22]: негрубые многомерные системы в банаховом пространстве динамических систем могут образовывать открытые области.

---

[1] Идеи грубости послужили основой для построения качественной теории грубых неавтономных систем (см. [15]).

[2] Из работ последних лет следует отметить заметку [16], в которой для уравнений 2-го порядка вида $\ddot{x} + G(x) = \mu[F(x, \dot{x})] + f(t)]$, где μ – малый параметр, $G(x)$ – нелинейная функция, а $f(t)$ – периодическая по t, при предположении, что в отсутствии внешнего возмущения система является автоколебательной, на основе теории бифуркаций периодических движений дано объяснение явления прохождения (при изменении параметров) устойчивого инвариантного тора через резонансные уровни.

Здесь мы будем рассматривать бифуркации 3-го типа. Напомним, что динамической системой Морса-Смейла называется система с компактным фазовым пространством, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Предельными движениями являются только грубые состояния равновесия и периодические движения, и их конечное число.

2) Инвариантные многообразия состояний равновесия и периодических движений пересекаются трансверсально.

Эти системы наиболее близки к двумерным системам.

Структурная устойчивость систем Морса-Смейла была доказана Пэлисом и Смейлом, а недавно другим методом также Робинсоном. Однако, если для системы двух дифференциальных уравнений наличие сепаратрисы, идущей из седла в седло означает негрубость системы, то для многомерных динамических систем это не так – устойчивые и неустойчивые многообразия периодических движений и седел в системе Морса-Смейла могут пересекаться.

Изучение гладких систем, имеющих глобальную секущую, удобно сводить к изучению диффеоморфизма, построенного по траекториям. В случае, когда система трёхмерна и имеет глобальную секущую, устойчивым и неустойчивым многообразиям седловых периодических движений на секущей будут соответствовать одномерные инвариантные многообразия неподвижных и периодических точек. Здесь, как легко видеть, грубому пересечению многообразий седловых периодических движений будет соответствовать обычное пересечение инвариантных кривых, но уже по дискретной траектории. В этом случае, если пересекаются инвариантные многообразия или сепаратрисы различных периодических точек, то точки пересечения сепаратрис носят название гетероклинических точек. Если же пересекаются сепаратрисы одного периодического движения, то точки пересечения носят название гомоклинических точек. Эта терминология восходит ещё к Пуанкаре, который первый обнаружил возможность таких пересечений в знаменитой задаче трёх тел. Наличие гетероклинических движений в системах Морса-Смейла является типичным.[3] Напротив, как следует из [28, 31], гомоклинических движений в системах Морса-Смейла быть не может. К тому же заметим, что существование гомоклинических движений, как установлено Смейлом [23] и автором [31, 32, 38], приводит к наличию нетривиальных гиперболических множеств. Из этого следует, что изучение бифуркаций, связанных с переходом от систем Морса-Смейла к системам с нетривиальными гиперболическими множествами, есть прежде всего задача, связанная с изучением появления гомоклинической структуры Пуанкаре. Вопросы, связанные с изучением бифуркаций третьего типа имеют на наш взгляд и большое прикладное значение поскольку они связаны с задачами возникновения “турбулентности” в динамических системах неконсервативного типа и, следовательно, позволяют указать ряд критериев возникновения стохастичности.

2. Выделение основных бифуркаций 3-го типа. Понятия достижимых и недостижимых бифуркационных границ коразмерности 1

Будем рассматривать n-мерные $\mathcal{C}^k$-гладкие ($k \geq 3$) динамические системы, заданные на $\mathcal{M}^n$, где $\mathcal{M}^n$ есть либо $\mathcal{C}^\infty$-гладкое компактное риманово многообразие, либо замкнутая компактная область евклидова пространства, на границе которой поле векторов (для

[3] В работе [4] показано, что связные компоненты особых движений, включающие и гетероклинические кривые систем Морса-Смейла, описываются надстройками над топологическими цепями Маркова.

простоты) направлено внутрь. Множество таких систем после введения $\mathcal{C}^k$-топологии будет банаховым пространством, которое обозначим через $\mathcal{H}$. Предположим, что динамическая система X имеет предельное движение Γ_X, которое есть либо грубое состояние равновесия, либо грубое периодической движение. Тогда, как известно, любая система Y, достаточно близкая к X, будет также иметь движение такого же типа, близкое к Γ_X. Две системы X и Y будут Γ-*эквивалентными*, если в $\mathcal{H}$ существует путь X_μ, $0 \leq \mu \leq 1$, такой, что $X_{\mu=0} = X$, $X_{\mu=1} = Y$, и при каждом μ система X_μ имеет грубое движение $\Gamma_{X_\mu} = \Gamma$, непрерывно зависящее от μ. Множество Γ-эквивалентных систем образует область в $\mathcal{H}$, которую будем обозначать через $\mathcal{D}_\Gamma$ и называть *областью устойчивости движения* Γ [37].

Современное состояние теории бифуркаций позволяет полностью решить задачу, связанную с выделением основных типов границ H^1 коразмерности 1 области устойчивости $\mathcal{D}_\Gamma$ систем Морса-Смейла. Для изучения бифуркаций 3-го типа здесь нам потребуется только бифуркационные поверхности H^1 на которых системы имеют либо простейшее негрубое состояние равновесия типа седло-седло[4], либо простейшее негрубое периодическое движение. В этих случаях, как показано в [6, 7], поверхности H^1 являются нулевыми невырожденными уровнями гладких функционалов.

Переходы 3-го типа возможны также и при нарушении трансверсальности пересечения инвариантных многообразий седловых периодических движений и состояний равновесия. Это будет иметь место при образовании контура, составленного из цепочки траекторий. Простейший случай возникновения контура будет иметь место, когда у системы, имеющей грубое состояние равновесия, будет существовать траектория, двоякоасимптотическая к седлу. Однако, как показано в работах [24-27, 30, 34-35], системы подобного типа не могут отделять системы Морса-Смейла от систем с гомоклиническими кривыми, поскольку в одном случае малые изменения системы не выведут из класса систем Морса-Смейла[5], а во втором (когда характеристические корни с действительной частью наименьшей по абсолютной величине являются комплексными) система будет лежать в классе систем с нетривиальными гиперболическими множествами.

Напротив, динамические системы, имеющие негрубую гомоклиническую кривую, по которой касаются инвариантные многообразия, и это касание простейшее, при некоторых предположениях на характеристические корни седлового периодического движения будут образовывать гладкую бифуркационную плёнку коразмерности 1, отделяющую системы Морса-Смейла от систем с гомоклинической структурой.

В общем случае в состав контура будут входить только грубые периодические движения, инвариантные многообразия которых пересекаются трансверсально, исключая только одно негрубое пересечение.

Для того, чтобы бифуркационная, плёнка, соответствующая контуру из сёдел и периодических движений, имела коразмерность 1, необходимо, чтобы в состав контура входило только одно состояние равновесия типа седло.

При изучении бифуркаций третьего типа важную роль играет понятие достижимых и

[4]Основные бифуркации, связанные с рождением периодических движений из сложного фокуса, а также бифуркации, связанные с исчезновением сложного состояния равновесия типа седло-узел не выводят из класса систем Морса-Смейла (См. [14]). В связи с этим см. [8], где рассматривается задача о рождении периодического движения с гомоклиническими кривыми.

[5]В первом случае (когда в седле характеристический корень с наименьшей по абсолютной величине действительной частью является действительным) за состоянием равновесия сохраняется название седла, во втором такое состояние равновесия мы называем седло-фокусом.

недостижимых бифуркационных границ H^1 коразмерности 1 [11,6]. Пусть $X_0 \in H^1$, и U – шар с центром в X_0, который разбивается H^1 на две области $\mathcal{D}^+$ и $\mathcal{D}^-$. Бифуркационная поверхность H^1 называется *достижимой в точке* $X_0 \in H^1$ из области $\mathcal{D}^\alpha$, если у X_0 существует такая окрестность $U_0 \subset U$, что для любого пути X_μ, $0 \le \mu \le \mu_0$, такого, что $X_{\mu=0} = X_0$ и $X_\mu \in U_0 \cap \mathcal{D}^\alpha$ при $\mu \ne 0$, системы X_μ, $0 \le \mu \le \mu_0$, топологически эквивалентны, и сопрягающий гомеоморфизм $\eta_{\mu_1\mu_2} : X_{\mu_1} \to X_{\mu_2}$ стремится к тождественному при $\mu_1 \to \mu_2$.

Бифуркационная поверхность H^1 называется *недостижимой в точке* $X_0 \in H^1$ из области $\mathcal{D}^\alpha$, если для любой окрестности $U_0 \subset U$ системы X_0 на любом пути X_μ, $0 \le \mu \le \mu_0$, где $X_{\mu=0} = X_0$ и $X_\mu \in U_0 \cap \mathcal{D}^\alpha$ при $\mu \ne 0$, при $\mu > 0$ найдутся неэквивалентные системы.

Из определения недостижимости следует, что на множестве $(0, \mu_0]$ будет существовать бесконечное множество бифуркационных значений параметра.

Бифуркационные поверхности коразмерности 1, отделяющие системы Морса-Смейла от систем с гомоклиническими структурами Пуанкаре, на которых системы имеют либо состояние равновесия типа седло-седло, либо негрубые периодические движения, являются достижимыми со стороны систем Морса-Смейла. Поверхности 3-го типа, которые связаны с нарушением трансверсальности, со стороны систем Морса-Смейла могут быть как достижимыми, так и недостижимыми. В последнем случае недостижимость будет обусловлена существованием счётного множества негрубых гетероклинических движений. Вопрос же о существовании недостижимых поверхностей H^1 3-го типа, при подходе к которым со стороны систем Морса-Смейла число периодических движений неограниченно нарастает, остаётся открытым. Некоторые соображения по этому поводу мы выскажем ниже в п. 6.

3. Бифуркации третьего типа при исчезновении сложного состояния равновесия типа седло-седло

Единственный тип бифуркаций от систем Морса-Смейла к системам со многими периодическими движениями, полностью изученный к настоящему времени, есть переход в пространстве динамических систем через поверхность коразмерности один, соответствующую системам с простейшим состоянием равновесия типа седло-седло.

Рассмотрим систему $n = m_1 + m_2 + 1$ уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + P(x,y,z) + \mu p(x,y,z,\mu), \\ \dot{y} &= By + Q(x,y,z) + \mu q(x,y,z,\mu), \\ \dot{z} &= R(x,y,z) + \mu r(x,y,z,\mu), \end{aligned} \qquad (*)$$

где A – m_1-мерная матрица, характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части, B – m_2-мерная матрица, характеристические корни которой имеют положительные реальные части, P, Q, R, p, q, r – достаточно гладкие функции x, y и z, непрерывно зависящие от μ, причём P, Q и R обращаются в нуль в начале координат вместе с первыми производными.

Предположим, что в разложении $R(u(z), v(z), z) = l_k z^k + ...$, где $x = u(z), y = v(z)$ – решение системы $Ax + P = 0, By + Q = 0$, первая неравная нулю величина l_k имеет четный номер. Такое состояние равновесия O системы при $\mu = 0$ нами названо *седло-седлом* в силу того, что оно образуется путём слияния грубых седел.

Считая, что $l_k > 0$, поведение траекторий в окрестности седло-седла можно описать следующим образом [17]:

1) существует $m_1 + m_2$-мерная интегральная поверхность W, близкая к плоскости x, y и разделяющая окрестность точки $O = 0$ на две области U_1 и U_2;

2) слева от W в области U_1 существует единственная интегральная m_1+1-мерная 0^+-полуповерхность W^+ (состоящая из 0^+-кривых), край которой лежит в W;

3) справа от W в области U_2 существует единственная интегральная m_2+1-мерная 0^--полуповерхность W^-, край которой лежит в W;

4) все остальные траектории проходят мимо седло-седла.

Имеет место следующий результат [33]:

Теорема: *Пусть у системы* $(*)$ *при* $\mu=0$ 1) *существует* $p\geq 2$ *траекторий* $\Gamma_1,...,\Gamma_p$, *двоякоасимптотических к* O; 2) $\Gamma_i\notin\partial W^+\cup\partial W^-$; 3) W^+ *и* W^- *пересекаются по* $\Gamma_1,...,\Gamma_p$ *трансверсально. Тогда можно указать такую* ε*-окрестность* U_ε *множества* $\Gamma_1,...,\Gamma_p$, *не содержащую ни одну целую траекторию, кроме* $\Gamma_1,...,\Gamma_p$ *и* O, *что при всех достаточно малых* μ, *при которых исчезает седло-седло, ограничение системы* $(*)$ *на множество траекторий, целиком лежащих в* U_ε, *топологически эквивалентно надстройке над топологической схемой Бернулли с* p *символами.*

Отметим, что если система $(*)$ при $\mu=0$ является граничной для систем Морса-Смейла и $W^+\cap W^-$ состоит лишь из траекторий $\Gamma_1,...,\Gamma_p$ и O, то рождающееся при изменении μ предельное множество исчерпывается описанным в теореме. В связи с этим возникла *задача о топологической классификации надстроек над топологическими схемами Бернулли.* В работе [4] была выдвинута гипотеза о том, что надстройки над топологическими схемами Бернулли с p и q символами эквивалентны только в том случае, когда $p=q$. В 1974 г. В. Пэрри и Л. Салливаном это утверждение было доказано.

Однако система $(*)$ может быть при $\mu=0$ граничной для систем Морса-Смейла, а пересечение $W^+\cap W^-$ кроме траекторий $\Gamma_1,...,\Gamma_p,O$ содержит счётное множество траекторий, по которым W^+ и W^- пересекаются трансверсально. Это имеет место, когда $\overline{W^+\cap W^-}$ содержит хотя бы одно периодическое движение L_1, устойчивое m_1+1-мерное многообразие W_1^+ которого трансверсально пересекается с W^-, а неустойчивое m_2+1-мерное многообразие W_1^- имеет трансверсальное пересечение с W^+. Сформулированная выше теорема, хотя и остаётся справедливой, но не даёт в этом случае полного описания топологической структуры рождающегося предельного множества. Такое описание было проведено в [6] на языке топологических марковских цепей, введённых В.М. Алексеевым [1, 2] и Я.Г. Синаем [21], и надстроек над ними. В частности, в ситуации, описанной в теореме, конфигурация из траекторий $\Gamma_1,...,\Gamma_p,O$ с учётом направления движения но ним и есть ориентируемый граф G топологической схемы Бернулли. В более общей ситуации [6] топологическая структура рождающегося множества полностью определяется топологической структурой множества, содержащегося в замыкании $W^+\cap W^-$ и состоящего из периодических движений и траекторий пересечения их устойчивых m_1+1-мерных и неустойчивых m_2+1-мерных многообразий. Последнее может содержать счётное множество траекторий, и для его конечного описания уже необходим аппарат надстроек над топологическими марковскими цепями (конечно, весьма частного вида, с треугольной матрицей переходов).

В заключение сформулируем следующую теорему, в которой даётся основная характеристика этого класса бифуркаций.

Теорема: *Бифуркационная поверхность, отделяющая системы Морса-Смейла от систем со счетным множеством периодических движений и состоящая из систем, имеющих простейшее седло-седло, достижима с обеих сторон в каждой своей* $\mathcal{C}^2$*-общей точке.*

(Общая точка на этой поверхности – это система, отличающаяся от систем Морса-Смейла только наличием седла-седла).

Отметим, что это единственный к настоящему времени известный тип бифуркации, име-

ющий подобное свойство.

4. Бифуркации 3-го типа, связанные с исчезновением устойчивого периодического движения

Настоящий параграф посвящён изучению предельных множеств, появляющихся при исчезновении двукратного периодического движения типа седло-узел, которое возникло при слиянии устойчивого и седлового периодических движений. Рассмотрение будем проводить для случая диффеоморфизма, так как решение сформулированной задачи для гладкого потока сводится к изучению диффеоморфизма на некоторой секущей.

Рассмотрим однопараметрическое семейство $\mathcal{C}^2$-диффеоморфизмов $T(\mu) : \mathcal{M}^{m+1} \mapsto \mathcal{M}^{m+1}$ $m+1$-мерного многообразия в себя непрерывное по μ в $\mathcal{C}^2$-топологии. Предположим, что отображение $T(0)$ имеет двукратную негрубую неподвижную точку O типа седло-узел. В некоторой локальной карте U, содержащей точку O, $T(\mu)$ можно записать в виде

$$\bar{x} = Ax + f(x, z, \mu)x, \quad \bar{z} = R(z, \mu) + g_1(x)z + g_2(x, z, \mu)z,$$

где $\|A\| < 1$, f, R, g_1 и g_2 – $\mathcal{C}^2$-гладкие функции по x и z, непрерывные по μ в $\mathcal{C}^2$-топологии, обращающиеся в нуль при $x = 0, z = \mu = 0$, причём $g_2(x, z, 0) \equiv 0$, а в разложении $R(z, 0) = lz^2 + ...$ ляпуновская величина $l > 0$.

Очевидно, *условие исчезновения седло-узла состоит в выполнении условия* $R(z, \mu) > 0$. Всюду ниже предполагается, что это условие выполнено при $\mu > 0$.

Пересечение инвариантного луча $\{x = 0, z \geq 0\}$ диффеоморфизма $T(0)$ с U обозначим через λ_u, а $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T(0)^k \lambda_u$ обозначим через λ. Ясно, что λ представляет собой образ стандартного луча $R^+ (0 \leq t < \infty)$ при отображении $\mathcal{H} : R^+ \to \mathcal{M}^{m+1}$, являющемся инъективной иммерсией. Через $\partial\lambda$ будем обозначать множество всех предельных точек последовательностей $\{\mathcal{H}(t_k)\}$, где $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Предположение 1 : $\partial\lambda = 0$.[6]

Из этого предположения следует, что существует гомеоморфизм $\psi : S^1 \to \lambda = \lambda \cup O$ такой, что ψ является гладким отображением всюду, кроме, может быть, прообраза точки O. Естественно выделить два основных случая:

A1) ψ является диффеоморфизмом и, следовательно, λ является гладким подмногообразием $\mathcal{M}^{m+1}$.

A2) ψ не является гладким отображением в точке O.

В первом случае имеет место следующая

Теорема 1 [7]: *Пусть λ диффеоморфно S^1. Тогда при достаточно малых $\mu > 0$ $T(\mu)$ будет иметь замкнутую кривую $\lambda(\mu) \to \lambda$ при $\mu \to 0$.*

При этом число вращения Пуанкаре $\omega(\mu)$ положительно и стремится к нулю при $\mu \to 0$. (Заметим, что это новая бифуркация 1-го типа).

В случае A2) ситуация, возникающая при исчезновении седло-узла, будет значительно сложнее. Здесь для широкого класса семейств диффеоморфизмов для положительных значений μ характерно наличие сложной структуры глобального предельного множества.

[6] В такой постановке эта задача ставилась в [14] (см. [7]).

В окрестности U рассмотрим множество $\mathcal{D}$ точек (x, z) таких, что $\|x\| \leq \varepsilon, z_1 - \alpha \leq z \leq z_2 + \alpha, z_1 < 0$, и $T(0)(0, z_1) = (0, z_2)$, где α – некоторая достаточно малая величина. По характеру пересечения λ с $\mathcal{D}$ можно выделить два следующих общих случая:

1) $\lambda \cap \mathcal{D}$ имеет одну компоненту связности, которая не записывается в виде $x = \varphi(z)$. Этот случай мы будем называть *случаем малой петли.*

2) Так называемый *случай большой петли*: $\lambda \cap \mathcal{D}$ имеет несколько компонент связности, записывающихся в виде $x = \varphi(z)$.

Теорема 2 [7]: *При выполнении условий большой петли существует последовательность непересекающихся интервалов $\Delta_i = (\mu_i', \mu_i^{"}) \subset (0, \mu_0]$, $\mu_i', \mu_i^{"} \to 0$ при $i \to \infty$, такая, что $T(\mu)$ при $\mu \in \bigcup_i \Delta_i$ будет иметь счетное множество периодических траекторий.*

При некоторых добавочных условиях на отображение $T(0)$ типа условий растяжения на некоторых участках кривой λ эту теорему можно усилить и указать и в случае большой петли, и в случае малой петли ту топологическую марковскую цепь и те значения $\mu > 0$, при которых возникает нетривиальное гиперболическое множество, топологически эквивалентное этой цепи [7|.

Предположение 2: $\partial\lambda \neq O$.

В этом случае, если система при $\mu = 0$ является граничной для систем Морса-Смейла и $\mathcal{C}^2$-общей, то в $\partial\lambda$, кроме O могут входить лишь седловые периодические движения и траектории пересечения их устойчивых и неустойчивых многообразий. Это множество, как уже говорилось в п.3, описывается топологической марковской цепью, граф которой обозначим через G_1. Множество вершин графа G_1 каждая из которых является началом лишь такого ребра, конец которого принадлежит ей же, обозначим через $\alpha_1, ..., \alpha_p$, а сами эти рёбра - через $A_1, ..., A_p$. Ребро A_i соответствует стоку топологической марковской цепи. Ребро, соответствующее периодическому движению L_0 типа седло-узел, обозначим через A_0, а вершину, содержащую начало и конец A_0 – через α_0. Предположим, что неустойчивые многообразия W_i^- периодических движений L_i, отвечающие рёбрам A_i, содержатся в области притяжения L_0. В.С. Афраймовичем доказана следующая

Теорема 3: *Если для каждого $i = 1, ..., p$ множество $W_i^- \cup O \cup \lambda$ является $\mathcal{C}^1$-гладким вложением в $\mathcal{M}^{m+1}$, то для любого достаточно малого положительного μ диффеоморфизм $T(\mu)$ имеет инвариантное гиперболическое множество, эквивалентное топологической марковской цепи, граф G_2 которой получается из G_1 следующей простой перестройкой: уничтожается ребро A_0, и каждая из вершин α_i соединяется с α_0 новым ребром с началом в α_i и концом в α_0.*

Если условия гладкости в теореме не выполнены, то хотя при любом положительном μ также будет существовать нетривиальное гиперболическое множество, но его описание будет зависеть от μ.

В заключение параграфа приведём следующий результат.

Теорема: *Если $\partial\lambda \supset O$, то бифуркационная поверхность, отвечающая системам, имеющим периодическое движение типа седло-узел, является достижимой со стороны систем Морса-Смейла и недостижимой с противоположной стороны в каждой своей $\mathcal{C}^2$-общей точке.*

В случае, когда до бифуркации диффеоморфизм Морса-Смейла имеет только одно притягивающее множество, являющееся устойчивым периодическим движением и $\partial\lambda \neq O$, то после исчезновения этого периодического движения можно указать устойчивую мно-

госвязную область, являющуюся окрестностью объединения неустойчивых многообразий седловых периодических движений, содержащихся в замыкании неустойчивой сепаратрисы седло-узла.[7]

5. Переходы 3-го типа, связанные с нарушением трансверсальности

Здесь для простоты изложения ограничимся трёхмерным случаем. Рассмотрим на $\mathcal{M}^3$ $\mathcal{C}^k$-гладкую динамическую систему X_μ, $k \geq 3$, зависящую от параметра μ. Предположим, что при достаточно малых μ система имеет грубое периодическое движение L_μ седлового типа, имеющее при $\mu = 0$ гомоклиническую траекторию Γ_0. Обозначим через W^+ и W^- соответственно устойчивое и неустойчивое многообразия периодического движения L_μ. Предположим, что W^+ касается W^- по Γ_0. Будем предполагать, что это касание первого порядка.

Пусть U – некоторая малая окрестность Γ_0. Очевидно, $L_\mu \subset U$ при μ достаточно малых. Поэтому U будем называть *расширенной окрестностью периодического движения* L_μ. Пусть S – секущая к L_μ. Отображение $T_0 : S \to S$ по траекториям, близким к L_μ, в некоторых локальных координатах может быть записано в виде:

$$\bar{x} = \lambda(\mu)x + f(x, y, \mu)x, \;\; \bar{y} = \gamma(\mu)y + g(x, y, \mu)y,$$

где $O(0, 0)$ – неподвижная точка, соответствующая L_μ, $|\lambda| < 1, |\gamma| > 1$. Уравнение $W^+ \cap S :$ $y = 0$, уравнение $W^- \cap S :\; x = 0$.

Пусть $M^-(0, y^-)$ и $M^+(x^+, 0)$ – точки пересечения Γ_0 с S. Без ограничения общности можно считать, что $x^+ > 0, y^- > 0$. Очевидно, существует такая окрестность Π_1 точки M^-, что отображение $T_1 : S \to S$ по траекториям, близким к глобальному куску Γ_0, определено при всех достаточно малых μ. В локальных координатах x, y отображение T_1 будет иметь вид:

$$\bar{x} = x^+ + F(x, y - y^-, \mu), \;\; \bar{y} = G(x, y - y^-, \mu),$$

где F и G определены на Π_1, и $F(0, 0, 0) = G(0, 0, 0) = 0$. В силу условия негрубого пересечения W^+ с W^-, $\;\; G_y(0, 0, 0) = 0$. Так как T_1 – диффеоморфизм, то $b = F_y(0, 0, 0) \neq 0$ и $c = G_x(0, 0, 0) \neq 0$.

Условие, что касание W^+ с W^- по Γ_0 первого порядка, эквивалентно выполнению неравенства

$$d = G_{yy}(0, 0, 0) \neq 0.$$

Пусть $y - y^- = \varphi(x, \mu)$ – уравнение кривой $G_y(x, y - y^-, \mu) = 0$. Тогда отображение T_1 можно переписать в виде:

$$\bar{x} = x^+ F(x, y - y^-, \mu), \;\; \bar{y} = E(\mu) + C(x, \mu)x + D(x, y, \mu)(y - y^- - \varphi)^2,$$

где $E(\mu) = G(0, \varphi(0, \mu), \mu)$, $E(0) = 0$, $C(0, 0) = c$, $2D(0, 0, 0) = d$. Для дальнейшего существенными будут следующие параметры: λ, γ, c, d, E. Будем предполагать, что “седловая величина” $|\lambda\gamma| < 1$.

Из построения T_0 и T_1 следует, что существует достаточно малая окрестность U, гомеоморфная внутренности тора с приклеенной ручкой, в которой L_0 лежит внутри тора, а

[7] В связи с этим результатом см. также [37].

внутри ручки лежит глобальный кусок Γ_0. Легко видеть, что при всех достаточно малых μ возможны следующие три случая:

1) В U будут только две гомоклинические кривые $\Gamma_{1\mu}$ и $\Gamma_{1\mu}$ к L_μ, обходящие ручку только один раз. Это возможно, если $E(\mu)d^{-1} < 0$.

2) Гомоклинических кривых к L_μ, обходящих ручку только один раз, в U нет. Это будет иметь место, если $E(\mu)d^{-1} > 0$.

3) В U будет только одна гомоклиническая кривая Γ_μ к L_μ , обходящая ручку только один раз, что возможно, если $E(\mu)d^{-1} = 0$. Эта кривая будет негрубой с тем же характером касания интегральных многообразий W^+ и W^- вдоль Γ_μ, как и в случае $\mu = 0$. Системы такого типа в пространстве динамических систем образуют бифуркационную плёнку H^1 коразмерности 1.

Для установления структуры множества N траекторий, целиком лежащих в U, существенна следующая

ЛЕММА [31, 38, 32]: *Пусть* $\Pi_0\{|x - x^+| \le \varepsilon_0, |y| \le \varepsilon_0\}$ *и* $\Pi_1\{|x| \le \varepsilon_1, |y - y^-| \le \varepsilon_1\}$ – *достаточно малые окрестности точек* M^+ *и* M^- *на* S. *Тогда отображение* $T' : \Pi_0 \to \Pi_1$ *по траекториям системы в окрестности* L_μ *определено на* $\sigma^0 \subset \Pi_0$, *где* σ^0 *состоит из счетного объединения непересекающихся "прямоугольников"* σ_k^0 *и* $\bigcup\limits_{k=\bar{k}}^{\infty} T_0^k \sigma_k^0 = T'\sigma^0 \subset \Pi_1$, *где* $\bar{k} \to \infty$ *при* $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \to 0$.

Используя эту лемму, получаем, что каждой траектории из N будет соответствовать последовательность отображений

$$\left(..., T_{i_j}, T_{i_{j+1}}, ...\right)$$

где i_j равно либо 0 , либо 1 , такая, что за отображением T_1 обязательно следует отрезок $[T_0, ..., T_0]$, длина которого k_α не меньше $\bar{k}$[8]. Теперь легко видеть, что траектории из N может быть поставлена в соответствие последовательность

$$(..., q_j, q_{j+1}, ...) \qquad (**)$$

где q_j суть символы либо 0, либо 1, причём за символом 1 следует полный отрезок из символов 0, длина которого $p_\alpha = k_\alpha - \bar{k} + 1$. Из последнего описания получаем, что траектории множества N, не являющейся асимптотической к L_μ, будет соответствовать бесконечная в обе стороны последовательность

$$(..., p_j, p_{j+1}, ...)$$

составленная из символов $1, 2, ...,$; траектории, являющейся асимптотической к L_μ только при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$) будет соответствовать бесконечная в одну сторону последовательность

$$(..., p_1, p_0, ..., p_k] \;\; ([p_{-s}, ..., p_{-1}, p_0, ...);$$

а гомоклинической кривой к L_μ , исключая однообходные, – отрезок

$$[p_1, ..., p_l].$$

В случае грубой гомоклинической кривой установлено [31, 38], что множество N находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех последовательностей $(**)$

[8]В частности, длина его может быть бесконечной.

или, что то же самое, с множеством всех траекторий схемы Бернулли из двух символов 0 и $\hat{1} = [1, 0]$. В рассматриваемом случае описание значительно сложнее.

Введём в рассмотрение подсистему $\Omega(\lambda, \gamma, c, d, E(\mu))$ топологической схемы Бернулли из трёх символов $0, 1, 2$, выделяемую следующими условиями:

1. Ω содержит периодическую траекторию $L = (..., 0, 0, 0, ...)$.

2. Ω не содержит траектории, у которой есть отрезки длины, большей единицы, составленные из символов, отличных от 0.

В силу этого условия траектории Γ из Ω, не являющейся асимптотической к L, может быть поставлена в соответствие бесконечная в обе стороны последовательность

$$\left(..., p_i^{\alpha_i}, p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}, ...\right)$$

составленная из символов $p_i^{\alpha_i}$, где через $p_i^{\alpha_i}$ обозначена длина полного отрезка из нулей, стоящего за символом α_i, равным либо 0, либо 1. В случае, если Γ является асимптотической к L, только при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$ – последовательность

$$[p_0(\infty), p_1^{\alpha_1}, ...) \text{ или } (..., p_{-1}^{\alpha_{-1}}, p_0^{\alpha_0}(\infty)]$$

а если двоякоасимптотической к L – отрезок

$$[p_0(\infty), p_1^{\alpha_1}, ..., p_m^{\alpha_m}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}(\infty)],$$

где $p_0(\infty), p_0^{\alpha_0}, p_{m+1}^{\alpha_{m+1}}(\infty)$ – несобственные символы, равные ∞.

3. Длина $p_i^{\alpha_i}(p_{i-1}^{\alpha_{i-1}})$ отрезка из нулей, стоящего за символом α_i (стоящего перед символом α_i), отличным от нулевого, не менее $\bar{k}$. В частности, $p_i^{\alpha_i}(p_{i-1}^{\alpha_{i-1}})$ может быть равным ∞.

4. Для траекторий из Ω, отличных от L, выполняется условие

$$\frac{\nu_1 \gamma^{-p_i^{\alpha_i}} - c\nu_2 \lambda^{p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}} - E(\mu)}{d} > 0,$$

где ν_1 и ν_2 – положительные константы.

5. При $E(\mu) = 0$ две двоякоасимптотические траектории к L $\Gamma_1(..., 0, 0, 1, 0, 0, ...)$ и $\Gamma_1(..., 0, 0, 2, 0, 0, ...)$ склеены в одну Γ_0.

Теорема [9]: *Для любой достаточно малой расширенной окрестности U периодического движения L_0 существуют такое достаточно большое $\bar{k}$, константы ν_1 и ν_2 и малое $\bar{\mu}$, что при всех $|\mu| < \bar{\mu}$ в N можно указать подсистему N', траектории которой имеют седловой характер (за исключением Γ_0 при $\mu = 0$) и находятся во взаимнооднозначном соответствии с траекториями системы Ω.*

Эта теорема не дает полного описания траекторий множества, поскольку не всегда $N' = N$. Но даже и тогда, когда эти множества не совпадают, знание свойств N' позволяет делать нетривиальные заключения о свойствах системы в целом. Так, из свойств системы Ω следует, что во всех случаях, исключая случай $\gamma > 0, d < 0$, когда описание довольно простое:

$$\begin{cases} L_\mu & \text{при } E(\mu) < 0, \\ L_0 \cup \Gamma_0 & \text{при } \mu = 0, \end{cases} \qquad (***)$$

множество N' содержит континуум траекторий, и в нем всюду плотны периодические движения. В частности, здесь можно указать следующее интересное

Следствие: *В случае $\lambda > 0, \gamma > 0, c > 0, d > 0$ при сближении сепаратрис при $\mu \to 0$ еще до их первого пересечения у системы будет существовать сложная структура.*

Этот случай может быть реализован для диффеоморфизма T плоскости в плоскость. Напомним, что это будет иметь место, если "седловая величина" $|\lambda(\mu)\gamma(\mu)| < 1$. В случае же, когда седловая величина для диффеоморфизма T больше единицы, описание N' до касания сепаратрис является тривиальным: $N' = L_\mu$, так как для T^{-1} будут выполняться условия $(***)$.

Теорема [10]: *При условии $\gamma > 0, d < 0$ бифуркационная поверхность H^1 является достижимой со стороны систем Морса-Смейла в $\overline{U(\bar{\Gamma}_0)}$.*

Обобщение на многомерный случай этих результатов содержится в работах [12, 20]. Случай контура, в состав которого входят два периодических движения, рассматривался в [11], где, в частности, были приведены примеры диффеоморфизмов с бесконечным множеством устойчивых периодических движений.

Аналогично может быть рассмотрен случай систем X_μ, когда при $\mu = 0$ имеется контур, составленный из седла, седлового периодического движения и двух траекторий, асимптотических к седлу и периодическому движению. Здесь при всех достаточно малых μ в окрестности контура можно выделить инвариантное множество траекторий, которые находятся во взаимно однозначном и непрерывном соответствии с траекториями некоторой подсистемы Ω топологической схемы Бернулли. Здесь возможна только одна бифуркация 3-го типа и при том достижимая со стороны систем Морса-Смейла.

6. Заключение

Как указывалось в предыдущем параграфе при условии, что седловая величина $|\lambda(\mu)\gamma(\mu)|$ меньше единицы, ещё до касания сепаратрис существует нетривиальное гиперболическое множество. Это связано с тем, что при уменьшении μ будут возникать "подковы Смейла", число которых при $\mu \to 0$ стремится к бесконечности. В работе [10] показано, что возникновению "подковы" предшествует следующая бифуркационная картина: с уменьшением μ из уплотнения траекторий при $\mu = \mu_1$ возникает сложная неподвижная точка типа седло-узел, которая затем разваливается на две грубых: гиперболическую и устойчивую. Затем из устойчивой точки при $\mu = \mu_2 < \mu_1$ родится устойчивый цикл из двух неподвижных точек, а сама она станет гиперболической.[9]

Естественно ожидать, что найдётся счётная последовательность $\mu_n \to \mu_\infty$ такая, что при $\mu = \mu_n$ устойчивый цикл периода 2^{n-1} становится негрубым, и из него при уменьшении μ рождается устойчивый цикл периода 2^n, а исходный же цикл становится гиперболическим: при $\mu = \mu_\infty$ у отображения будет существовать счётное множество гиперболических периодических точек периодов $1, 2, 2^2, ..., 2^n, ...$ – устойчивое "предельно-периодическое" множество. Возникает вопрос: *могут ли системы такого типа при $\mu = \mu_\infty$ образовывать бифуркационную поверхность коразмерности 1, отделяющую системы Морса-Смейла от систем с гомоклиническими структурами Пуанкаре?* Если это так, то из этого будет следовать, что такие поверхности будут недостижимыми со стороны систем Морса-Смейла.

[9] Бифуркация, связанная с рождением периодического движения удвоенного периода, была впервые указана в работе [18].

Заметим, что вопрос о существовании устойчивых неподвижных точек в аналогичном случае рассматривал также Ньюхаус [19].

Подобная ситуация возникает также и в задаче, посвященной исследованию влияния внешнего периодического возмущения на автоколебательную систему, у которой предельный цикл проходит вблизи седла [5]. Здесь при достаточно малых возмущениях будет существовать гладкий 2-мерный инвариантный тор. Затем при увеличении возмущения на нём возникнут седловое и устойчивое периодические движения. Дальше из устойчивого периодического движения родится периодическое движение удвоенного периода и т. д. Доказательство существования гиперболической структуры при достаточно больших возмущениях (порядка расстояния от предельного цикла до седла) проводится на основании следующего принципа кольца, имеющего и самостоятельный интерес.

Принцип кольца [5]: Рассмотрим диффеоморфизм

$$T : \bar{x} = f(x, \theta), \;\; \bar{\theta} = \theta + g_1(x, \theta) \pmod{2\pi}$$

кольца $K : |x| < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Здесь f и g_1 – периодические функции θ с периодом 2π.

Условие 1: $\max |f_x| \leq q < 1$.

Условие 2: (растяжение фаз): Существует такое $p > 1$ и k непересекающихся отрезков $I_i = [\theta_{2i}, \theta_{2i+1}]$, что $|g_\theta|^{-1} < p^{-1}$ для любого $\theta \in I_i, i = 1, ..., k$.

Условие 3: $\max |f_\theta||g_x| \leq (p-1)(1-q)$.

Рассмотрим семейство отображений T_x окружности на себя: $\bar{\theta} = g(x, \theta) \pmod{2\pi}$. Будем говорить, что I_i S_{ij}-кратно накрывает I_j, если для любого x каждая точка $\theta \in I_i$ при отображении T_x имеет ровно S_{ij} прообразов в I_j. Будем считать, что отрезки I_i таковы, что если $S_{ii} = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^{k} S_{ij} \neq 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{k} S_{ij} \neq 0$.

Условие 4: Наибольшее по модулю собственное значение матрицы $S = (S_{ij})$ больше 1.

С матрицей S свяжем ориентированный граф G, имеющий k вершин $a_1, ..., a_k$ таких, что число рёбер, соединяющих a_i с a_j, равно S_{ij}. По графу G построим топологическую марковскую цепь (G, Ω, σ), состояниями которой являются ребра графа G, а переходами – вершины, т. е. сдвиг σ в пространстве Ω допустимых относительно графа G символических последовательностей. Из условия 4 вытекает, что топологическая энтропия (G, Ω, σ) положительна, и множество периодических точек счётно. Обозначим через Σ максимальное инвариантное относительно T множество, целиком лежащее в множестве $A = \{(x, \theta), |x| < 1, \theta \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} I_1\}$.

Утверждение: *Ограничение T на Σ сопряжено с (G, Ω, σ).*

Автор надеется, что описанные результаты послужат математической основой для объяснения различных сложных физических явлений, связанных с возникновением “турбулентности”.

Литература

[1] Алексеев, В.М., Квазислучайиые динамические системы. I: Квазислучайные диффеоморфизмы, Матем. сборник 76 (118), № 1, 72-134 (1968)

[2] Алексеев, В.М., Перроновские множества и топологические цепи Маркова, Успехи мат. наук, 24: 5, 227-228 (1969)

[3] Афраймович, В.С.; Шильников, Л.П., Об особых траекториях динамических систем, Успехи мат. наук, 5: 3, 189-190 (1972)

[4] Афраймович, В.С.; Шильников, Л.П., Об особых множествах систем Морса-Смейла, Труды Москов. мат. общества 28, 181-214 (1973)

[5] Афраймович, В.С.; Шильников, Л.П., О малых периодических возмущениях автономных систем, Доклады АН СССР 24, № 4, 739-742 (1974)

[6] Афраймович, В.С.; Шильников, Л.П., О достижимых переходах от систем Морса- Смейла к системам со многими периодическими движениями, Известия АН СССР, сер. 38, № 6, 1248-1288 (1974)

[7] Афраймович, В. С.; Шильников, Л. П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел, Доклады АН СССР 219, № 6, 1281-1285 (1974)

[8] Беляков Л.А., Об одном случае рождения периодического движения с двумя гомоклиническими кривыми, Мат. заметки 15, № 4, 571-580 (1974)

[9] Гаврилов, Н.К.; Шильников, Л.П., О трёхмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, I, Мат. сборник 88 (13), № 8, 475-492 (1972)

[10] Гаврилов, Н.К.; Шильников, Л.П., О трёхмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, II, Мат. сборник 90 (132), № 1, 139-156 (1973)

[11] Гаврилов, Н.К., О трёхмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур, Мат. заметки 14, № 5, 687-696 (1973)

[12] Гаврилов, Н.К., О n-мерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, Доклады АН СССР 212, № 2, 276-279 (1973)

[13] Леонтович, Е.А.; Неймарк, Ю.И., Об одной особой бифуркации динамической системы в трёхмерном пространстве, связанной с исчезновением периодического решения, Ташкент, Сб. докл. Политехн. интитута, 132-139 (1964)

[14] Леонтович-Андронова, Е.А.; Шильников, Л.П., Современное состояние теории бифуркаций динамических систем, Труды 5-ой международной конференции по нелинейным колебаниям (ICNO), т. II, 282-290 (1970)

[15] Лерман, Л.М.; Шильников, Л.П., О классификации двумерных неавтономных систем с конечным числом ячеек, Доклады АН СССР 209, № 3, 543-547 (1973)

[16] Морозов, А.Д.; Шильников, Л. П., К математической теории синхронизации колебаний, ДАН СССР 223, № 6 (1975)

[17] Минц, Р.М., Характер некоторых типов сложных состояний равновесия в n-мерном пространстве, Доклады АН СССР 147, № 1 (1962)

[18] Неймарк, Ю.И., О некоторых случаях зависимости периодических движений от параметров, Доклады АН СССР 129, № 4, 736-737 (1959)

[19] Newhouse, S., Diffeomorphisms with infinitely many sinks, Topology 12, 9-18 (1974)

[20] Newhouse, S.; Palis, J., Bifurcations of MORSE-SMALE dynamical systems, Proc., Internat. Sympos. Dynamical Systems, Salvador, Brazil; 303-366, (1973)

[21] Синай, Я.Г., Марковские разбиения и Y-диффеоморфизмы, Функциональный анализ и его приложения 2, № 1, 64-85 (1968)

[22] Smale, S., Structurally stable systems are not dense, Amer. J. Math. 88, 491-496 (1966)

[23] Smale, S., Diffeomorphisms with many periodic points, Differential and Combinatorial Topology, Princeton, № 1 (1965)

[24] Шильников, Л. П., Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве, Доклады АН СССР 143, 289-292 (1962)

[25] Шильников, Л. П., О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий, Мат. сборник 61 (104), 433-466 (1963)

[26] Шильников, Л. П., Об одном случае существования счётного множества периодических движений, Тезисы докл. межвуз. симпоз. по качественной теории дифференциальных уравнений и её применению, 73-74 (1964)

[27] Шильников, Л. П., Об одном случае существования счётного множества периодических движений, Доклады АН СССР 160, № 3, 558-561 (1965)

[28] Шильников, Л. П., О существовании счётного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой, Тезисы трудов международного конгресса математиков, Москва, секция 6 (1966)

[29] Шильников, Л. П., О рождении периодического движения из траектории, идущей из состояния равновесия седло-седло в него же, Доклады АН СССР 170, № 1, 49-52 (1966)

[30] Шильников, Л. П., О существовании счётного множества периодических движений в расширенной окрестности седло-фокуса, Доклады АН СССР 172, № 1, 54-57 (1967)

[31] Шильников, Л. П., О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой, Доклады АН СССР 172, № 2, 298-301 (1967)

[32] Шильников, Л. П., К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора, Доклады АН СССР 180, 2, 286-289 (1968)

[33] Шильников, Л. П., Об одном новом типе бифуркации многомерных динамических систем, Доклады АН СССР 189, № 1, 59-62 (1969)

[34] Шильников, Л. П., О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло, Мат. сборник 77 (119), № 3, 461-472 (1968)

[35] Шильников, Л. П., К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус, Мат. Сборник 81 (123), № 1, 92-103 (1970)

[36] Шильников, Л. П., Некоторые вопросы теории бифуркаций динамических систем, НИРФИ, препринт 52 (1974)

[37] Шильников, Л. П., Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы, Доклады АН СССР (в печати)

[38] Шильников, Л. П., Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа , Мат. сборник 74 (116), № 3, 378-397 (1967)

Глава 4

Математическая теория синхронизации и хаос

В этой главе представлено семь работ Л.П. Шильникова [1-7] (в соавторстве с В.С. Афраймовичем, В.И. Лукьяновым и А.Д. Морозовым), которые составляют фундамент современной теории синхронизации, а также теории странных аттракторов, возникающих в результате разрушения инвариантных торов.

Основными объектами классической теории синхронизации являются задача о воздействии внешнего периодического сигнала на автоколебательную систему и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем. Цель, которая обычно здесь преследуется, состоит в выделении в пространстве параметров областей существования грубых устойчивых периодических движений – областей синхронизации, и описании динамических явлений, возникающих при переходе через границы этих областей.

Интерес к этой проблеме был продиктован прежде всего приложениями, начиная с работ Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [8], а также Андронова и Витта [9]. При этом математические модели, которые обычно рассматриваются в таких задачах, многомерны, и здесь может возникать весьма нетривиальная динамика, в частности, хаос, что было обнаружено еще в работах Картрайт и Литтлвуда [10,11,12]. Для изучения соответствующих динамических и бифуркационных явлений, которые и сейчас весьма актуальны (в частности, когда рассматриваются слабодиссипативные и близкие к консервативным модели), потребовало создания новой теории синхронизации, использующей широкий арсенал методов современной теории динамических систем. Фундаментальный вклад в эту теорию был сделан в работах Л.П. Шильникова, как представленных в этой главе, так и во многих других, см., например, [13-19]. В этих работах были также разработаны новые качественные и аналитические методы исследования многомерных систем со сложной хаотической динамикой.

Л.П. Шильников на лекции по математической теории синхронизации

Относительно просто задачи синхронизации решаются в случае малой внешней силы. Если амплитуда μ внешнего воздействия на диссипативную автоколебательную систему (или величина связи между двумя такими системами) мала, то исходному предельному циклу в расширенном фазовом пространстве будет соответствовать двумерный асимптотически устойчивый инвариантный тор τ. Поведение траекторий на нем может быть изучено с помощью отображения Пуанкаре $T_{\mu\omega}$ на некоторой секущей для траекторий, целиком лежащих на торе. При достаточно малых μ отображение $T_{\mu\omega}$ является диффеоморфизмом окружности, и оно может быть записано в виде

$$T_{\mu\omega}: \ \bar{\theta} = \theta + \omega + \mu f(\theta, \mu, \omega) \bmod 2\pi,$$

где $f(\theta, \mu, \omega)$ – некоторая гладкая 2π-периодическая по θ функция. Структура бифуркационного множества отображения $T_{\mu\omega}$ в самых общих деталях выглядит следующим образом. К каждой точке $(\omega = p/q, \mu = 0)$ оси $\mu = 0$ с рациональными координатами примыкают области синхронизации $A_{p/q}$, называе-

мые также языками Арнольда. Их схематичный вид приведен на рис. 4.1. При достаточно малых μ разные области синхронизации не пересекаются, и при $(\mu, \omega) \in A_{p/q}$ на инвариантном торе τ существуют как минимум два предельных цикла, устойчивый и седловой. Для простоты будем считать, что циклов всегда два – один устойчивый и один седловой, на инвариантной окружности этим циклам отвечают устойчивая p_s и неустойчивая p_u траектории периода q. При этом диффеоморфизм $T_{\mu\omega}$ имеет рациональное число вращения вращения $\nu = p/q$. Границам области $A_{p/q}$ отвечают бифуркационные кривые $L^{h1}_{p/q}$ и $L^{h2}_{p/q}$, при значениях параметров на которых отображение $T_{\mu\omega}$ имеет седло-узловую точку периода q, которая образуется в результате слияния периодических траекторий p_s и p_u.

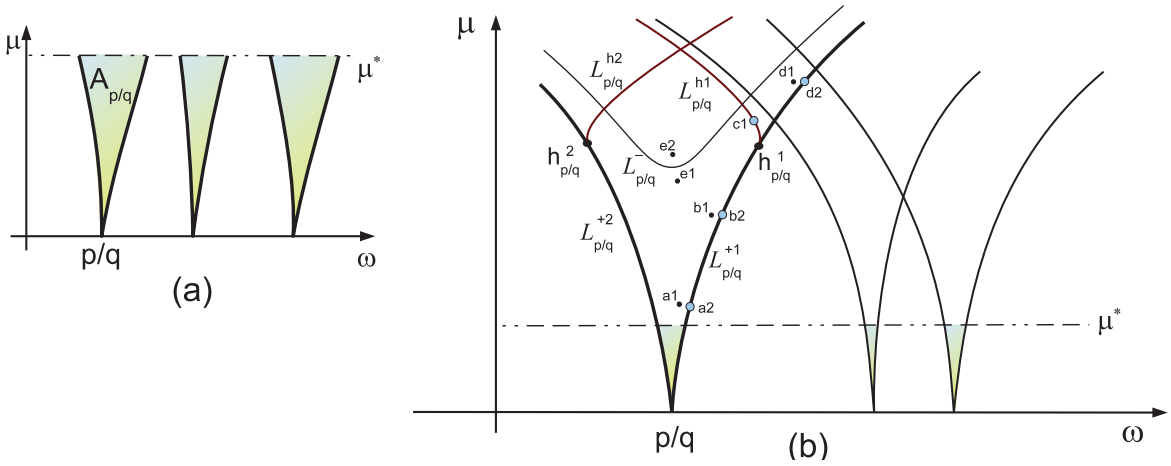


Рис. 4.1. Языки Арнольда на плоскости параметров (ω, μ).

При переходе через границы областей синхронизации структура множества траекторий на торе τ должна меняться. При этом, в силу непрерывной зависимости числа вращения Пуанкаре от параметров, должны появляться и иррациональные числа вращения, которым отвечает уже не режим синхронизации, а квазипериодический режим (биения). Заметим, что в прикладных исследованиях периодические режимы с большими периодами в языках Арнольда обычно не воспринимаются как режимы синхронизации, поскольку они практически не отличимы от квазипериодических. Поэтому здесь основной интерес представляют т.н. главные резонансы.[1]

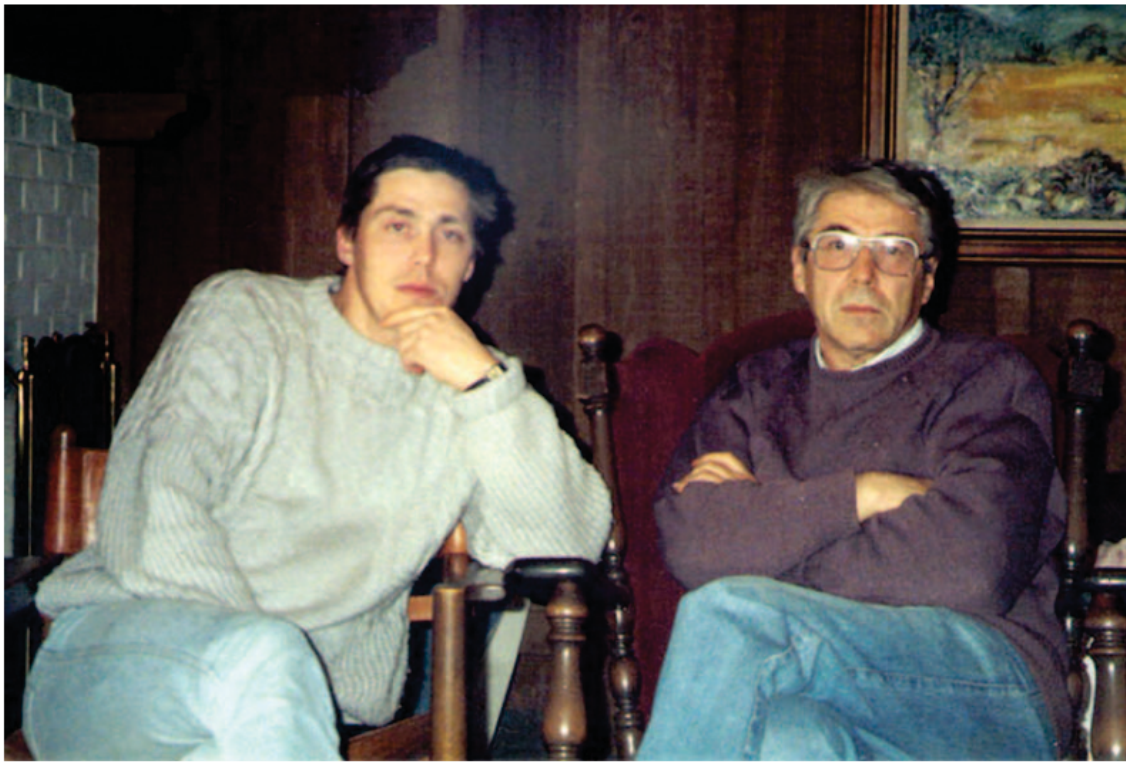
Подобная картина имеет место для многих автоколебательных систем в т.н.

[1]То, какой резонанс является главным или не главным, зависит от конкретной задачи. Обычно интересные значения q не превышают 10, но в ряде случаев это может быть даже 100 или 200, как, например, в экспериментах Ван-дер-Поля и Ван-дер-Марка [8].

квазилинейном случае. Например, в классическом уравнении Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = \mu \sin \omega t$$

при $\varepsilon \ll 1$ и $\mu^2 < \dfrac{4}{27}\varepsilon^2$. Рождение инвариантного тора в этой системе при резонансе 1:1 (т.е. $\omega = \omega_0$) было изучено еще в работе Андронова и Витта [9] (там же была открыта бифуркация рождения предельного цикла из гомоклинической петли седло-узлового состояния равновесия). Математически строго факт рождения гладкого инвариантного тора при пересечении границы резонанса 1:1 в уравнении Ван-дер-Поля при малых ε и μ выводится из работы [2], в которой приведены условия сохранения инвариантного тора при исчезновении седло-узлового периодического движения.



Л.П. Шильников с сыном Андреем (Беркли, США, 1993)

При не малых μ ситуация становится значительно более сложной. В работах [1,2] был обнаружен важнейший фундаментальный факт, что инвариантный тор может стать негладким при увеличении надкритичности μ. При этом было показано, что при переходе через границу области синхронизации такой негладкий тор может разрушиться, и тогда возникает странный аттрактор, который здесь обычно называется “тор-хаосом”. Впоследствии задача о переходе

к хаосу при разрушении инвариантного двумерного тора была исследована в работах Афраймовича и Шильникова [3,5], Аронсона и др. [20], Ньюхауса, Пэлиса и Такенса [21] а также Тураева и Шильникова [9]. Заметим, что статья Афраймовича и Шильникова [1], в которой была рассмотрена задача о периодическом воздействии на автономную систему с гомоклинической петлей седлового состояния равновесия, была по сути первой работой, где была поставлена и исследована задача глобального анализа динамики периодически возмущенной диссипативной системы. В этой работе было также построено так называемое "сепаратрисное отображение", определенное в некотором кольце, содержащем окрестность невозмущенной петли, и сформулирован "принцип кольца" – эффективно проверяемый критерий хаоса в автоколебательных системах. В работе [3] была, в частности, рассмотрена задача о взаимодействии двух автоколебательных систем и доказан "принцип кольца" из [1,2] в наиболее сложном и интересном случае (когда инвариантной кривой не существует, а имеется замкнутое инвариантное множество сложной природы – хаос). В работе [5] были суммированы результаты исследований по разрушению тора и даны основные сценарии перехода от режима синхронизации к "тор-хаосу".

Не вдаваясь в технические детали, можно дать геометрическую интерпретацию полученных в этих работах результатов, см. рис. 4.1(b) и 4.2. При достаточно малых μ в области синхронизации $A_{p/q}$ двумерный инвариантный тор τ гладкий, соответственно гладкой является и инвариантная окружность $l_\mu = \tau \cap S$, рис. 4.2(a1). В этом случае ее гладкость сохраняется как на границе области синхронизации, рис. 4.2(a2), так и при выходе из этой области. При увеличении надкритичности μ тор τ может потерять свою гладкость.

Для объяснения этого явления вместо одномерного отображения $T_{\mu\omega}$ окружности нужно уже рассматривать отображение $\hat{T}_{\mu\omega}$ некоторого кольца $\mathcal{K}$ в себя. Отображение $\hat{T}_{\mu\omega}$ можно представлять как отображение Пуанкаре секущей S по траекториям из некоторой фиксированной окрестности инвариантного тора τ, см. рис. 4.2(a1). Тогда в этом кольце точки p_u и p_s будут являться соответственно седловой и устойчивой точками периода q отображения $\hat{T}_{\mu\omega}$. Инвариантная кривая l_μ может быть представлена как замыкание неустойчивого многообразия точки p_u, т.е. $l_\mu = \overline{W^u(p_u)}$.

При малых μ обе неустойчивые сепаратрисы точки p_u входят в точку p_s гладко, касаясь неведущего направления. Однако при увеличении μ одна из сепаратрис точки p_u (это одномерное инвариантное многообразие, состоящее из континуума траекторий) может входить в точку p_s негладко, как, например, показано на рис. 4.2(b1). В этом случае, при выходе на границу области

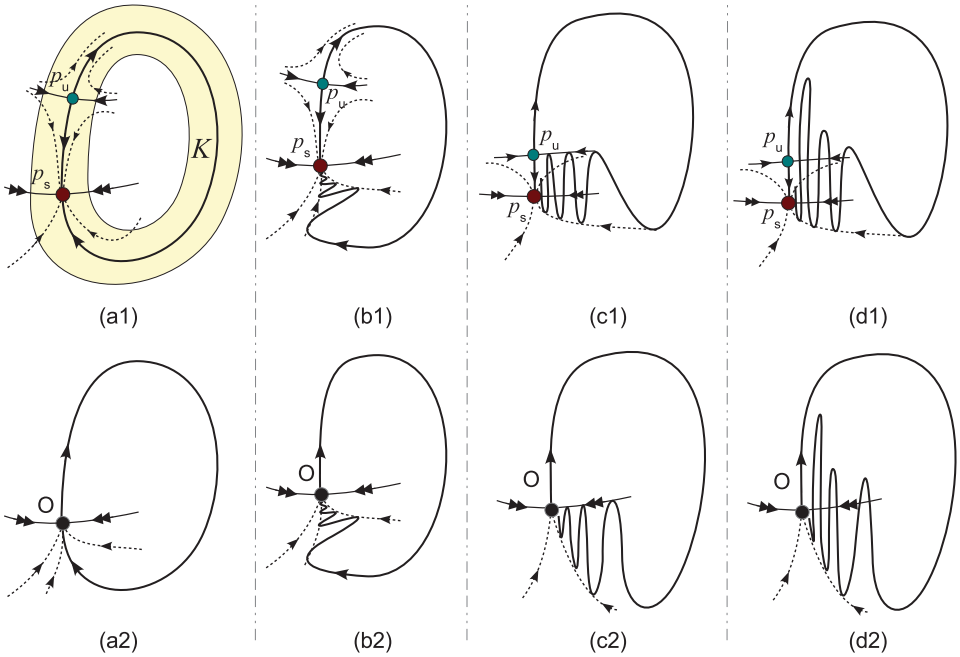


Рис. 4.2. Поведение неустойчивого инвариантного многообразия W^u в случае седловой точки p_u – верхний ряд рисунков, и седло-узла O – нижний ряд, соответственно внутри и на границе области синхронизации при различных значениях надкритичности μ. Нумерация рисунков соответствует также обозначениям на бифуркационной диаграмме рис. 4.1(b). Например, номер $(a1)$ соответствует фазовому портрету в точке $a1$ значений параметров рисунка 4.1(b), и т.д.

синхронизации точки p_s и p_u сливаются и образуется точка типа седло-узел, причем ее неустойчивое многообразие возвращается к ней негладким образом, см. рис. 4.2(b2). При выходе из области синхронизации инвариантная кривая l_μ может разрушиться и возникнуть хаос [2]. Заметим, что негладкая инвариантная кривая внутри области синхронизации сохраняется вплоть до момента первого (гомоклинического) касания инвариантных многообразий седловой периодической траектории p_u, т.е. до бифуркационной кривой $L^{h1}_{p/q}$ (симметрично – $L^{h2}_{p/q}$). На рис. 4.2(c1) и рис. 4.2(c2) для седло-узла момент такого касания показан, для простоты, в случае неподвижных точек. Для значений параметров выше кривой $L^{h1}_{p/q}$ (соответственно, $L^{h2}_{p/q}$) замкнутой инвариантной кривой уже нет – она разрушается. Здесь появляются грубые гомоклинические траектории либо у седловой точки, рис. 4.2(d1), либо у седло-узла, рис. 4.2(d2). В этом случае хаос существует уже в области синхронизации, а при исчезновении седло-узла наблюдается квазиаттрактор [5].[2] С тем обстоятельством,

[2]Термин “квазиаттрактор” был введен Афраймовичем и Шильниковым [22] для обозначения широко-

что у седла и седло-узла появляются гомоклинические касания, связано также то, что при не малых μ резонансные зоны $A_{p/q}$ при разных p и q могут пересекаться, см. рис. 4.1(b).[3]

Заметим, что инвариантный тор τ может разрушиться внутри области синхронизации еще до образования гомоклинических структур, например, в результате бифуркации удвоения периода устойчивого предельного цикла (при переходе через бифуркационную кривую $L^-_{p/q}$), как показано на рис. 4.3(e1) и (e2). При дальнейшем увеличении μ может наблюдаться, например, фейгенбаумовский каскад бифуркаций удвоения периода устойчивых периодических траекторий и соответствующий переход к хаосу.

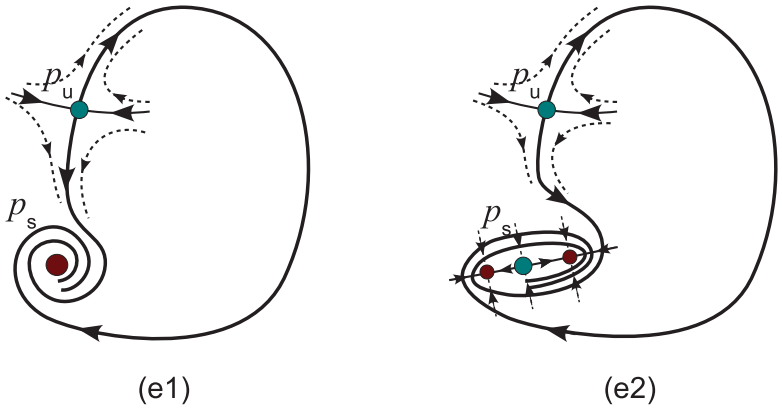


Рис. 4.2. (e1) Точка p_s является фокусом – негладкая замкнутая инвариантная кривая еще существует; (e1) после бифуркации удвоения периода замкнутой инвариантной кривой уже нет.

После работ [1-5] сценарии возникновения странных аттракторов в результате разрушения двумерных инвариантных торов стали рассматриваться как одни из основных сценариев возникновения хаоса в динамических системах. Заметим, что еще один известный сценарий возникновения хаоса, т.н. “переход к хаосу через перемежаемость”, получил свое математическое обоснование в

го класса нетривиальных притягивающих множеств, которые могут содержать устойчивые периодические траектории но только очень больших периодов. Соответственно, квазиаттракторы являются странными аттракторами на т.н. “физическом уровне”, т.к. неизбежные шумы в экспериментах или ошибки округления при численном счете часто не позволяют с уверенностью сказать, что наблюдается – хаос или очень длиннопериодический устойчивый режим.

[3]Это связано с тем, что к бифуркационной кривой $L^{h1}_{p/q}$ (соответственно, $L^{h2}_{p/q}$) первого гомоклинического касания накапливается (сверху) счетное множество бифуркационных кривых седло-узлов разных больших периодов, в частности, периодов $k_0q, (k_0+1)q, ...$ с некоторым целым k_0, [23,24,25,26]. В свою очередь, эти кривые являются границами соответствующих областей синхронизации.

работе Лукьянова и Шильникова [4] еще до того, как сам термин “перемежаемость” был введен в работе Помо и Манневиля [27]. Этот вид хаоса также можно отнести к разновидности “тор-хаоса”, когда исчезает седло-узел, который имеет гомоклиническую к нему траекторию, см. рис. 4.2(d2).

В то время как работы [1-5] имели дело, по существу, с периодическим возмущением классических автоколебательных систем (т.е. систем с простой динамикой), в статье Афраймовича и Шильникова [6] был поставлен принципиально новый вопрос о периодическом возмущении многомерных систем с хаотическим поведением и была исследована задача о переходе через бифуркационную границу от систем Морса-Смейла к системам со счетным множеством седловых инвариантных торов. Здесь у многомерной системы (размерности ≥ 4) на границе систем Морса-Смейла происходит слияние двух седловых периодических циклов соседних индексов устойчивости (размерности их устойчивых многообразий отличаются на единицу), имеющих гетероклинические траектории. Такая ситуация возникает, в частности, при периодическом возмущении открытой в работе Шильникова [28] глобальной бифуркации многомерной системы, имеющей состояние равновесия типа седло-седло с букетом гомоклинических петель. При малом периодическом возмущении невозмущенную трехмерную автономную систему правильно рассматривать как неавтономную периодическую (или как 4-мерную автономную), имеющую негрубое периодическое решение типа седло-седло (один из его мультипликаторов равен 1, а два других соответственно больше и меньше 1). Для автономной системы замыкания гомоклинических петель состояния равновесия типа седло-седло являются C^1-гладкими кривыми (при $t \to \pm\infty$ гомоклинические траектории стремятся к седло-седлу, касаясь центрального одномерного многообразия). Для неавтономной периодической системы они становятся букетом гладких инвариантных торов, решения на которых стремятся при $t \to \pm\infty$ к периодическому решению. Как показано в [6], исчезновение седло-седла в такой ситуации приводит к возникновению описанного в [28] инвариантного множества, содержащего бесконечно много седловых инвариантных торов и седловых инвариантных труб. Однако заметим, что в [6] рассматривается более общая ситуация, которую можно описать как возмущение многомерного (размерности ≥ 3) диффеоморфизма с неподвижной точкой типа седло-седло (один из ее мультипликаторов равен 1, а остальные лежат как вне, так и внутри единичной окружности). Предполагается также , что устойчивое и неустойчивое инвариантные множества этой неподвижной точки пересекаются трансверсально по конечному набору инвариантных кривых. В этом случае замыкания инвари-

антных кривых, как и в [2], могут образовывать как C^1-гладкие инвариантные кривые, так и негладкие. Тогда в случае гладких кривых возмущение приводит к рождению множества инвариантных кривых, аналогичного [28], а случай негладких кривых (при некоторых дополнительных условиях) – к рождению сложной хаотической динамики.

Задача о воздействии внешнего периодического возмущения на консервативную автоколебательную систему является одной из классических задач теории возмущений. В случае таких систем, близких к линейным консервативным, основные результаты были получены еще в известных работах А.А. Андронова, А.А. Витта, Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского и др. В работе Морозова и Шильникова [7] такая задача была впервые рассмотрена для систем, близких к нелинейным консервативным. При этом в качестве невозмущенных систем были рассмотрены двумерные модельные системы – уравнение Дюффинга и маятниковое уравнение. Были изучены структуры резонансных зон (основных и неосновных), исследованы бифуркации инвариантных торов в этих резонансных зонах и при прохождении через них, а также найдены условия существования т.н. гомоклинических зон (когда существуют гомоклинические траектории Пуанкаре и соответственно наблюдается хаотическая динамика). Эти исследования, см. также [13], заложили основы качественной теории многомерных систем, близким к нелинейным консервативным.

Литература к главе 4.

[1*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О малых периодических возмущениях автономных систем.// ДАН СССР, 1974, т.214, 4, 739-742.

[2*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.// ДАН СССР, 1974, т.219, 6, 1281-1284.

[3*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем.// ПММ, 1977, т.41, 4, 618-627.

[4*] Лукьянов В.И., Шильников Л.П., О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.// ДАН СССР, 1978, т.243, 1, 26-29.

[5*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.// Межвуз. сб. “Методы КТДУ”, Горький, 1983, 3-26.

[6*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях коразмерности один, приводящих к появлению счетного множества торов.// ДАН СССР, 1982, т.262, 4, 777-780.

[7*] Морозов А.Д., Шильников Л.П., К математической теории синхронизации колебаний.// ДАН СССР, 1975, т.223, 6, 1340-1343.

[8] Van der Pol, Van der Mark, Frequency demultiplication.// Nature, 1927, 120, 363-364.

[9] Andronov A.A., Vitt A.A., Zur Theorie des Mitmehmens von van der Pol.// Archiv fur Elektrotechnik, 1930, Bd. XXIV, 99.

[10] Cartwright M.L., Littlewood J.E., On nonlinear differential equations of the second order, I: The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = b\lambda k \cos(\lambda t + a)$, k large.// J. Lond. Math. Soc., 1945, 20, 180-189.

[11] Littlewood J.E., On non-linear differential equations of the second order. III. The equation $\ddot{y} + k(1 - y^2)\dot{y} + y = bk \cos(t + \alpha)$ for large k, and its generalizations.// Acta Math., 1957, 97, 267-308.

[12] Littlewood J.E., On non-linear differential equations of the second order. IV. The equation $\ddot{y} + kf(y)\dot{y} + g(y) = bkp(\phi)$, $\phi = t + \alpha$ .// Acta Math., 1957, 98, 1-110.

[13] Морозов А.Д., Шильников Л.П., О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым.// ПММ, 1983, т.47, 5, 385-394.

[14] Тураев Д.В., Шильников Л.П. Бифуркации квазиаттракторов тор-хаос. // В кн. “Матем. Механизмы турбулентности”, Киев, 1986,9 с.

[15] Тураев Д.В., Шильников Л.П., О катастрофах голубого неба.// Докл.РАН, т.342, вып.5 , 1995, 596-599.

[16] Shilnikov L.P., Turaev D.V., On Simple Bifurcations Leading to Hyperbolic Attractors. // Int. J. “Computers and Mathematics with Appl.”, 1997, v.34, N 2-4, 173 - 193.

[17] Shilnikov L.P., Turaev D.V., A new simple bifurcation of periodic orbit of “blue sky catastrophe” type. // AMS Translations, Ser.2, 2000, V. 200, 165-188.

[18] Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D., On some mathematical topics in classical synchronization. A tutorial.// Int.J.of Bifurcation and Chaos, 2004, v.14, No.7, 2143-2160.

[19] Тураев Д.В., Шильников А.Л., Шильников Л.П., Некоторые математические проблемы классической синхронизации.// Тр. школы “Нелинейные волны 2004”, 2005, 426-449.

[20] Aronson, D. G.; Chory, M. A.; Hall, G. R.; McGehee, R. P. Bifurcations from an invariant circle for two-parameter families of maps of the plane: a computer-assisted study. // Comm. Math. Phys., 1982, v.83, no. 3, 303–354.

[21] Newhouse S., Palis J., Takens F., Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms.// IHES Publ. Math., 57, 5-71.

[22] Aframovich V.S., Shilnikov L.P., Strange attractors and quasiattractors.// “Nonlinear Dynamics and Turbulence”.- Boston, Pitmen, 1983, 1-34.

[23*] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой I.// Мат. сб., 1972, т.88(130), 4, с.475-492.

[24*] Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой II.// Мат. сб., 1973, т.90(132), 1, с.139-156.

[25] Гонченко С.В., Гордеева О.В., Лукьянов В.И., Овсянников И.И., О бифуркациях двумерных диффеоморфизмов с гомоклиническим касанием к седло-узловой неподвижной точке.// Вестник ННГУ, 2014, № 2(1), 198-209.

[26] Gonchenko S.V., Gordeeva O.V., Lukyanov V.I., Ovsyannikov I.I., On bifurcations of multidimensional diffeomorphisms having a homoclinic tangency to a saddle-node.// Regular and Chaotic Dynamics, 2014, v. 19(4), 461-473.

[27] Pomeau Y., Manneville P., Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems. // Commun. Math. Phys., 1980, v.74, 189-197.

[28*] Шильников Л.П., Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем.// ДАН СССР, 1969, т.182, 1, 53-56.

[29*] Шильников Л.П., К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора.// ДАН СССР, 1968, т.180, 2, 286-289

Доклады Академии наук СССР
1974, Том 214, № 4, с. 739-742

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В.С. АФРАЙМОВИЧ, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

О МАЛЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А.Н.Колмогоровым 4 VI 1973)

1. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(x), \tag{1}$$

где $X \in C^r, r \geq 1$, в некоторой области $D \in \mathbf{R}^n$. Пусть $\mathbf{G}$ – область, относительно которой предполагаем, что она ограничена, гомеоморфна шару и граница $\partial\mathbf{G}$ является гладкой секущей.

Наряду с (1) рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(x), \quad \dot{\theta} = 1, \tag{2}$$

определенную в $\mathbf{G} \times S^1$.

Под возмущениями системы (2) будем понимать системы

$$\dot{x} = X(x) + p(x, \theta), \quad \dot{\theta} = 1, \tag{3}$$

где $p\,(x, \theta)$ – непрерывные функции в $\mathbf{G} \times S^1$, C^r-гладкие по x и периодические по θ с периодом 2π. Имеет место

Теорема 1. *Если система* (1) *в* $\mathbf{G}$ *является системой Морса-Смейла, то при достаточно малом* δ *в* C^1 δ*-окрестности системы* (2) *будут всюду плотны системы Морса-Смейла.*

Используя ([1]), ([2]), можно установить

Следствие. *Если система* (1) *в* $\mathbf{G}$ *груба и не имеет периодических движений, то грубой будет и система* (2).

При изучении динамических систем на плоскости плодотворным оказалось понятие ячеек, введенное и изученное в ([3]). Оно естественно переносится на случай многомерных систем.

Определение. Максимальное связное множество, состоящее из орбитно-устойчивых траекторий, называется ячейкой.

Изучение систем с периодической правой частью можно свести к изучению диффеоморфизмов секущей плоскости $t = 0$ в себя. Каждой ячейке системы (3) при этом соответствует множество точек ее пересечения с секущей плоскостью. Известно ([4]), что при $n = 2$ компонента связности этого пересечения, целиком лежащая в $\mathbf{G}$, в грубом случае односвязна, множество этих компонент либо а) конечно (такая компонента называется компонентой периодического типа), либо б) счетно (компонента называется компонентой блуждающего типа). Отсюда ясна справедливость следующего утверждения.

П р е д л о ж е н и е 1. *Предположим, что система* (3) *является системой Морса-Смейла.*

Тогда при $n = 2$ *для любой ячейки* K *этой системы либо* $\pi_1(K) = \mathbf{Z}$ *(в случае а)), либо* $\pi_1(K) = 0$ *(в случае б)).*

Заметим, что система (2) при наличии замкнутых траекторий в системе (1) является негрубой и при $n = 2$ имеет ячейки с фундаментальной группой $\pi_1 = \mathbf{Z} + \mathbf{Z}$ [1]. Периодическому движению L_0 системы (1) соответствует инвариантный тор $L_0 \times S^1 = \tau_0$ системы (2). При почти всех возмущениях (3) на инвариантном торе τ, близком к тору τ_0, возникают седловые периодические движения, инвариантные многообразия которых определяют структуру разбиения на ячейки в возмущенной системе.[2]

Именно, для $n = 2$ имеют место следующие утверждения.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть система* (1) *имеет периодическое движение, на которое наматывается сепаратриса седла.*

Тогда каждая система Морса-Смейла, близкая к (2)*, будет иметь гетероклинические движения.*

П р е д л о ж е н и е 3. *Пусть система* (1) *имеет двусвязную ячейку, границей которой являются периодические движения разных периодов.*

Тогда каждая система Морса-Смейла, близкая к (2)*, будет иметь гетероклинические движения. Эти гетероклинические движения будут входить в границу ячеек блуждающего типа.*

Верно и обратное предложение.

2. При изучении воздействия неавтономного периодического возмущения на двумерную систему

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y) \tag{4}$$

первой степени негрубости ([10]) наибольший интерес представляет тот случай, когда негрубость связана с существованием петли сепаратрисы седла O. Так как по предположению система (4) является системой первой степени негрубости, то седловая величина $\sigma = P_x(0, 0) + Q_y(0, 0) = \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, где λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения в O. Для определенности будем предполагать, что $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, а $\sigma < 0$.

Как известно, отображение T_μ плоскости $t = 0$ в плоскость $t = 2\pi$, построенное по траекториям системы

$$\dot{x} = P(x, y) + \mu\, p\,(x, y, \theta, \mu),\ \dot{y} = Q(x, y) + \mu\, q\,(x, y, \theta, \mu),\ \dot{\theta} = 1, \tag{5}$$

будет иметь неподвижную точку типа седло $O_\mu \to O(0, 0)$ при $\mu \to 0$. Устойчивую инвариантную кривую седла O_μ обозначим через $S^+(\mu) = S_1^+(\mu) \cup O_\mu \cup S_2^+$, а неустойчивую – через $S^-(\mu) = S_1^-(\mu) \cup O_\mu \cup S_2^-$. По предположению, $S_1^+(\mu) \equiv S_1^-(\mu)$ при $\mu = 0$.

Относительно взаимного расположения кривых $S_1^+(\mu)$ и $S_1^-(\mu)$, которые будем называть сепаратрисами, при достаточно малых μ можно указать следующие случаи:

---

[1] Отсюда следует, что теорема 7 работы ([5]) , а также теорема о ячейках работы ([6]), стр. 1026 (см. также и ([7]), стр. 104), неверны.

[2] Из этого и наличия континуума бифуркаций, связанного с изменением числа вращения Пуанкаре на τ (см. ([8])), следует принципиальная невозможность просчета на ЭВМ топологических структур однопараметрического семейства неавтономных периодических систем, которое при некотором значении параметра содержит автономную систему с периодическим движением (в связи с этим см. работу ([9]), в основе которой лежит теорема 7 работы ([5])).

1) $S_1^+(\mu) \cap S_1^-(\mu) \neq \emptyset$ и точки пересечения (гомоклинические точки) грубые. Здесь в окрестности $S_1^+(0) \cup O$ будет сложная структура поведения траекторий, связанная с наличием бесконечного множества грубых периодических движений ([11,12]). При этом при изменении μ до нуля будет происходить бесчисленное множество бифуркаций, в частности, будет иметь место счетное множество бифуркаций, связанных с исчезновением устойчивых периодических точек T_μ.

2) $S_1^-(\mu)$ лежит "вне" $S_1^+(\mu)$, т.е. $S_1^+(\mu) \cap S_1^-(\mu) = \emptyset$, а топологический предел $S_1^-(\mu)$ при $\mu \to 0$ содержит $S_2^-(0)$. Здесь, в частности, верен следующий результат: все системы семейства (5) при условии, что система (4) не имеет периодических движений, при $\mu > 0$ будут системами Морса-Смейла (по этому поводу см. ([13]), где рассматриваются близкие вопросы).

3) $S_1^-(\mu)$ лежит "внутри" $S_1^+(\mu)$, т. е. $S_1^+(\mu) \cap S_1^-(\mu) = \emptyset$, и топологический предел $S_1^-(\mu)$ при $\mu \to 0$ не содержит $S_2^-(0)$. Здесь вопрос об описании структуры множества траекторий, целиком лежащих в окрестности $S_1^+(0) \cup O$, сводится к исследованию отображения

$$\begin{aligned} \bar{r} &= f(r,\theta,\mu) \equiv (B(r,\theta,\mu)r + \mu\Delta(\theta,\mu))^\nu (1 + \varphi(r,\theta,\mu)), \\ \bar{\theta} &= g(r,\theta,\mu) \equiv c + \theta + \lambda_2^{-1} \ln(B(r,\theta,\mu)\cdot r + \mu\Delta(\theta,\mu)) + \psi(r,\theta,\mu), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\nu = -\lambda_1/\lambda_2 > 1, \;\; \psi(r,\theta,0) \to 0 \text{ в } C^1; \;\; \varphi(r,\theta,0) \to 0 \text{ в } C^0,$$
$$|\varphi_r| \leq \text{ const}, \;\; B(0,0,0) = b_0 \neq 0,$$

определенного в кольце $K_\mu : \; 0 < r \leq \mu^\alpha, \; 0 < \theta \leq 2\pi, \; 1 < \alpha < \nu$. Заметим, что функция $\mu\Delta(\theta,\mu)$ характеризует расстояние между устойчивым и неустойчивым многообразием периодического движения, проходящего через точку O_μ, системы (5), и есть не что иное, как функция В.К.Мельникова ([14]). В рассматриваемом случае $\Delta(\theta,\mu) > 0$.

Т е о р е м а 2. *Предположим, что $\Delta(\theta,0) > 0$, и существует отрезок $I = [\theta_0,\theta_1]$ такой, что для $\theta \in I$*

$$|\Delta'_\theta(\theta,0)/\lambda_2\Delta(\theta,0) - 1| > p > 1 \tag{7}$$

и

$$|\lambda_2^{-1}\ln(\Delta(\theta_1,0)/\Delta(\theta_2,0))| > 2\pi k, \quad k \geq 3. \tag{8}$$

Тогда при всех достаточно малых $\mu > 0$ отображение (6) в кольце K_μ будет иметь предельное множество, сопряженное со схемой Бернулли из $k-1$ символов.

Доказательство основано на использовании следующего принципа кольца, имеющего самостоятельный интерес.

3. П р и н ц и п к о л ь ц а. Рассмотрим диффеоморфизм

$$T : \bar{x} = f(x,\theta), \quad \bar{\theta} = \theta + g_1(x,\theta) \equiv g(x,\theta) \pmod{2\pi}$$

кольца $K : |x| \leq 1, \;\; 0 < \theta \leq 2\pi$. Здесь f и g_1 – периодические функции θ с периодом 2π.

У с л о в и е 1. $\max\limits_{(x,\theta)\in K} |f_x| \leq q < 1$.

У с л о в и е 2 (растяжения фаз). Существует такое $p > 1$ и k непересекающихся отрезков $I_i = [\theta_{2i},\theta_{2i+1}]$, что $\max\limits_{|x|\leq 1} |g_\theta^{-1}| \leq p^{-1}$ для любого $\theta \in I_i, \;\; i = 1,2,...,k$.

У с л о в и е 3. $\max\limits_{(x,\theta)\in K} |f_\theta|\,|g_x| \leq (p-q)^2/4, \quad \max\limits_{(x,\theta)\in K} |f_\theta|\,|g_x| \leq (p-1)(1-q)$.

Рассмотрим семейство отображений T_x окружности на себя $\bar{\theta} = g(x, \theta) \pmod{2\pi}$. Будем говорить, что I_i s_{ij}-кратно накрывает I_j, если для любого x каждая точка $\theta \in I_j$ при отображении T_x имеет ровно s_{ij} прообразов в I_i. Будем считать, что отрезки I_i таковы, что если $s_{ii} = 0$, то

$$\sum_{i=1}^{k} s_{ij} \neq 0 \ \text{ и } \ \sum_{j=1}^{k} s_{ij} \neq 0.$$

У с л о в и е 4. Наибольшее по модулю собственное значение матрицы $S = (s_{ij})$ больше единицы.

С матрицей S свяжем ориентированный граф G, имеющий k вершин $a_1, a_2, ..., a_k$ таких, что число ребер, соединяющих a_i с a_j, равно S_{ij}. По графу G построим топологическую марковскую цепь (G, Ω, σ), состояниями которой являются ребра графа G, а переходами – вершины, т. е. сдвиг σ в пространстве Ω допустимых относительно графа G символических последовательностей. Из условия 4 вытекает, что топологическая энтропия цепи (т.э.ц.) (G, Ω, σ) положительна и множество периодических точек счетно (подробнее о т.э.ц. см. ([15,16])).

Обозначим через Σ максимальное инвариантное относительно T множество, целиком лежащее в множестве $A = \{(x, \theta) : |x| < 1, \ \theta \in \bigcup_{i=1}^{k} I_i\}$.

У т в е р ж д е н и е. *Ограничение T на Σ сопряжено с (G, Ω, σ).*

З а м е ч а н и е. Вопроса о грубости и классификации диффеоморфизмов кольца в кольцо мы не касаемся. Отметим, однако, тесную связь этого вопроса с рассмотрением грубых гладких эндоморфизмов окружности на себя, систематическое изучение которых было проведено в ([17]).

4. Предположим, что система

$$\dot{x} = P(x, y) + \mu\, p_0\,(x, y, \mu), \quad \dot{y} = Q(x, y) + \mu\, q_0\,(x, y, \mu)$$

при $\mu = 0$ удовлетворяет условиям п. 2, а при $\mu > 0$ петля сепаратрисы разваливается "внутрь". Тогда, как известно ([10]), из петли сепаратрисы родится единственное и устойчивое периодическое движение L_μ. Тот факт, что система

$$\dot{x} = P(x, y) + \mu\, p_0\,(x, y, \mu) + \mu\, p_1\,(x, y, \mu, t),$$

$$\dot{y} = Q(x, y) + \mu\, q_0\,(x, y, \mu) + \mu\, q_1\,(x, y, \mu, t)$$

при условии, что функция В.К.Мельникова удовлетворяет предположениям (7), (8) [3], имеет гомоклиническую структуру в некотором устойчивом кольце, позволяет сделать следующий практически важный вывод. *При действии периодического возмущения на автоколебательную систему в окрестности устойчивого периодического движения возможно возникновение сложной структуры поведения траекторий, требующей для своего описания статистического подхода.* Отметим, что это явление было впервые обнаружено в работах ([19,20]) на примере уравнения Ван-дер-Поля с внешней периодической силой [4].

[3]Существование функций p_1 и q_1, гарантирующих выполнение для $\Delta(\theta, \mu)$ этих условий, можно установить приемом, аналогичным указанному в ([18]).

[4]Заметим, однако, что обоснование существования схемы Бернулли в этих работах не было дано. Фактически топологическая часть этого доказательства была дана С.Смейлом, указавшим "диффеоморфизм подковы" ([11]).

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете

им. Н. И. Лобачевского

Поступило
6 V 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

(1) S. Smale, J. Palis, Proc. of Symposia in Pure Mathematics (Global Analysis), 14, AMS, 223 (1970). (2) J.W. Robbin, Ann. Math., 94, № 3, 447 (1971). (3) А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин, Теория колебаний, М., 1959. (4) С.Х. Арансон, В.С. Медведев, Матем. сборн., 85 (127), № 1 (5), 3 (1971). (5) Л.Н. Белюстина, ДАН, 148, 251 (1962). (6) Ю.И. Неймарк, Радиофизика, 6, 1021 (1963). (7) Ю. И. Неймарк, Тр. II Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладной механике, "Наука", 1965, стр. 97. (8) А.Г. Майер, Уч. зап. горьковск. унив., 12, 215 (1939). (9) Л.Н. Белюстина, Тр. V международн. конфер. по нелинейным колебаниям, 2, Киев, 1970, стр. 83. (10) А.А. Андронов, Е.А. Леонтович и др., Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, "Наука", 1967. (11) С. Смейл, УМН, № 1, 113 (1970). (12) Л.П. Шильников, Матем. сборн. 74 (116), 13, 378 (1967). (13) Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников, I, Матем. сборн., 88, в. 4, 475 (1972); II, Матем. сборн., 90 (132), 1, 139 (1973). (14) В.К. Мельников, Тр. Московск. матем. общ., 12, 3 (1963). (15) В.М. Алексеев, Матем. сборн., 74 (116), 13, 378 (1968). (16) Я.Г. Синай, Функц. анализ, 2, № 3, 70 (1968). (17) М.В. Якобсон, Матем. сборн., 85 (127), № 2 (6), 163 (1971). (18) Л.П. Шильников, Матем. заметки, 5, 3, 335 (1969). (19) M.L. Cartwright, J.E. Littlewood, J. London Math. Soc, 20, 180 (1945). (20) N. Levinson, Ann. Math., 50, № 1, 127 (1949).

Доклады Академии наук СССР
1974, Том 219, № 6, с. 1281-1284

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

В.С. Афраймович, Л.П. Шильников

О НЕКОТОРЫХ ГЛОБАЛЬНЫХ БИФУРКАЦИЯХ, СВЯЗАННЫХ С ИСЧЕЗНОВЕНИЕМ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ ТИПА СЕДЛО - УЗЕЛ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 VI 1974)

В 1930 г. А. А. Андроновым и А. А. Виттом ([1]) в связи с исследованием уравнения Ван-дер-Поля под действием малой внешней силы было обнаружено рождение грубого предельного цикла при исчезновении негрубого состояния равновесия типа седло-узел. Несколько позднее А. А. Андроновым и Е. А. Леонтович ([2]) эта бифуркация, наряду с другими основными тремя случаями рождения периодических движений, была полностью изучена для случая систем второго порядка. В многомерном пространстве основные бифуркации, связанные с изучением появляющихся предельных множеств при исчезновении сложного состояния равновесия, были рассмотрены в работах ([3–6]). В частности, в ([5,6]) было обнаружено рождение одномерного базисного множества, гомеоморфного надстройке над некоторой топологической марковской цепью.

Настоящая работа связана с изучением предельных множеств, появляющихся при исчезновении двукратного периодического движения L. Предполагается, что двукратное периодическое движение L возникло из слияния устойчивого и седлового периодических движений и что все траектории, являющиеся α-предельными к L, являются также и ω-предельными к нему, т. е. L вместе со всеми двоякоасимптотическими траекториями к нему образуют двумерный инвариантный тор. В такой постановке эта задача ставилась в работе ([7]), в которой было высказано без доказательства утверждение о сохраняемости инвариантного тора при малых возмущениях. Позднее в ([8]) была приведена также идея метода доказательства. Однако это утверждение, как следует из результатов настоящей работы, неверно (оно оказалось верным в случае, когда инвариантный тор является гладким, см. теорему 1).

Рассмотрение проводится для случая диффеоморфизма, так как решение сформулированной задачи для гладкого потока сводится к изучению диффеоморфизма на некоторой секущей.

Рассмотрим однопараметрическое семейство C^2-диффеоморфизмов $T(\mu) : M^{m+1} \to M^{m+1}$ $(m+1)$-мерного C^∞-гладкого многообразия M^{m+1} в себя, непрерывное по μ, $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$, в C^2-топологии. Предположим, что отображение $T(0)$ имеет двукратную негрубую неподвижную точку O типа седло-узел ($O \notin \partial M^{m+1}$). В некоторой локальной карте U, содержащей точку O, $T(\mu)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Ax + f(x, z, \mu)x, \\ \bar{z} &= z + R(z, \mu) + g_1(x) \cdot z + g_2(x, z, \mu)x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\|A\| < 1$, R – C^2, а f, g_1 и g_2 – C^1-гладкие функции по и z, непрерывные по μ и обращающиеся в нуль при $= 0, z = \mu = 0$, причем $g_2(x, z, 0) \equiv 0$, а в разложении $R(z, 0) = lz^2 + \ldots$ ляпуновская величина $l > 0$.

Лемма 1. *Существует окрестность $U_0 \subset U$ точки O и число $\mu_1, 0 < \mu_1 \leq \mu_0$ такие, что для любого $\mu \in [-\mu_1, \mu_1]$ в U_0 существует однопараметрическое инвариантное семейство $\mathfrak{M}_\zeta$ m-мерных поверхностей*

$$z = \zeta + \varphi(x, \zeta, \mu)x,$$

где φ липшицируема по x и ζ в μ.

Сделав замену $z \to \zeta + \varphi(\xi, \zeta, \mu)\xi, x \to \xi$, $T(\mu)$ в окрестности U_0 можно представить в виде

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= A\xi + f(\xi, \zeta + \varphi(\xi, \zeta, \mu)\xi, \mu)\xi, \\ \bar{\zeta} &= \zeta + R(\zeta, \mu). \end{aligned}$$

В новых переменных инвариантное семейство будет состоять из плоскостей $\zeta = d, d \in [-d_0, d_0]$.

Очевидно, условие исчезновения седла - узла состоит в выполнении условия $R(z, \mu) > 0$. Всюду ниже предполагается, что это условие выполнено при $\mu > 0$.

Пересечение инвариантного луча $\{x = 0, z \geq 0\}$ диффеоморфизма (0) с U обозначим через λ_U и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T^k(0)\lambda_U$ и обозначим через λ. Ясно, что λ представляет собой образ стандартного луча $R^+ = t : 0 \leq t < \infty$ при отображении $\varkappa : R^+ \to M^{m+1}$, являющимся инъективной иммерсией. Через $\partial\lambda$ будем обозначать множество всех предельных точек последовательностей $\varkappa(t_k)$, где $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Предположение. $\partial\lambda = 0$.

Из этого предположения следует, что существует гомеоморфизм $\psi : S^1 \to \bar{\lambda} \equiv \lambda \cup \partial\lambda$ такой, что ψ является гладким отображением всюду, кроме, может быть, прообраза точки O. Естественно выделить два основных случая:

A_1) ψ является диффеоморфизмом и, следовательно, $\bar{\lambda}$ является гладким подмногообразием M^{m+1}.

A_2) ψ не является гладким отображением в точке $\psi^{-1}(0)$.

В первом случае имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\bar{\lambda}$ диффеоморфно S^1. Тогда при достаточно малом μ $T(\mu))$ будет иметь замкнутую инвариантную кривую $\bar{\lambda}(\mu) \to \bar{\lambda}$ при $\mu \to 0$.

При этом число вращения Пуанкаре $\omega(\mu)$ положительно и стремится к нулю при $\mu \to 0$.

В случае A_2) ситуация, возникающая при исчезновении седло - узла, будет значительно сложнее. Здесь для широкого класса семейств диффеоморфизмов для положительных значений μ характерно наличие сложной структуры глобального предельного множества.

В силу того, что ψ не является гладким в $\psi^{-1}(0)$, точки на λ можно разделить на два типа.

Определение. *Точку $P \in \lambda P$ назовем* точкой 1-го типа, *если*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\text{пр}_z dT^{n+k} l_P}{\|dT^{n+k} l_P\|} \right| = 1,$$

где l_P - касательный вектор к λ в точке $P \in U$, через пр$_z$ обозначена проекция на ось z, а k - некоторое целое положительное число такое, что $T^k P \in U$.

Точку $P \in \lambda$ назовем **точкой 2-го типа**, *если*

$$\liminf_{n\to\infty} \left| \frac{\text{пр}_z dT^{n+k} l_P}{\|dT^{n+k} l_P\|} \right| = 0.$$

Здесь предполагается, что M^{m+1} снабжено римановой метрикой. Можно показать, что точек другого типа быть не может.

Рассмотрим множество $D_d : \|x\| < \varepsilon,\ -d + \varphi(x, d, 0)x \le z \le -d + \varphi(x, -d, 0)x$, где $d = d - R(d, 0)$.

Лемма 2. *Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого d, $0 < d \le \epsilon$, и точки $P \in \lambda$, найдется такое n, что $T^n \in D_d$.*

Из этой леммы следует, что $\lambda \cap D_d \ne \emptyset$ и $\bigcup\limits_{i=-\infty}^{\infty} T^i D_d \supset \lambda$. По характеру пересечения λ с D_d можно выделить следующие случаи:

A_2B_1) $\lambda \cap D_d \ne \emptyset$ имеет только одну компоненту, уравнение которой $x = h(z)$, где $h(z)$ непрерывная, но не дифференцируемая функция (иначе реализовался бы случай A_1).

A_2B_2) Пересечение λ с D_d или имеет одну компоненту, которая в виде $x = h(z)$ не записывается, либо имеется несколько компонент.

Случай A_2B_1) не является общим, поскольку при малых C^2-возмущениях $T(0)$, сохраняющих седло - узел, мы получим либо A_1), либо A_2B_2).

Предположим, что можно указать такое $0 < d < d_0$, что

1) $\lambda \bigcap D_d$ содержит по крайней мере две связных компоненты Γ_1 и Γ_2, уравнения которых записываются в виде $x = h_l(z)$ и $x = h_2(z)$ соответственно;

2) точки $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2$ являются точками первого типа.

Эти условия назовем условиями “большой петли”.

Теорема 2. *При выполнении условий “большой петли” существует счетная последовательность интервалов $\Delta_i = (\mu_i', \mu_i'') \subset (0, \bar{\mu}_0)$, где $\Delta_j \bigcap \Delta_k = \delta_{jk} \to 0$, $\mu_i', \mu_i'' \to 0$ при $t \to \infty$ что $T(\mu)$ при $\mu \in \Delta_i$ будет иметь счетное множество периодических траекторий.*

Следующее дополнительное условие позволяет получить более содержательный результат.

Пусть $U_\varepsilon \subset U_0$, и ε удовлетворяет предыдущей лемме, достаточно мало и такое, что $T^{-1} D_d \in U_\varepsilon$. Пусть k_i - наименьшее положительное число такое, что $\gamma_j = T^{-k_j}\Gamma_j \subset U_\varepsilon$, и

$$\sigma = \min_{P \in \gamma_j,\ j=1,2} \left| \frac{\text{пр}_z\, dT^{k_j}\ l_P}{\|l_P\|} \right|$$

Величина σ характеризует величину растяжения γ_j за k_j, итераций.

Введем в рассмотрение топологическую марковскую цепь (т.м.ц.) $(G(i),\ \Omega(i),\ k_1,\ k_2,\ \sigma)$, состояниями которой являются ребра графа $G(i)$:

Теорема 3. *При выполнении условий “большой петли”* 3), 4)*:*

3) $T(0)(\Gamma_1) \bigcap (\Gamma_2 - \emptyset,\ \ T(0)(\Gamma_2) \bigcap (\Gamma_1 - \emptyset,$

4) $\sigma > 1 + q,\ q > 0$

существует счетная последовательность интервалов $\Delta_i = (\mu_i', \mu_i'')$ такая, что для каждого $\mu \in \Delta_i$ можно указать инвариантное относительно $T(\mu)$ множество $\Sigma(\mu)$ т.м.ц.

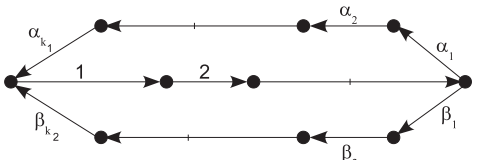


Рис. 1

$(G(i),\, \Omega(i),\, k_1,\, k_2,\, \sigma)$ $k(i) \to \infty$ *при* $i \to \infty$, *гомеоморфизм* $\delta : \Omega(t) \to \Sigma(\mu)$ *что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega(i) & \xrightarrow{\sigma} & \Omega(i) \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \Sigma(\mu) & \xrightarrow{T(\mu)} & \Sigma(\mu) \end{array} \qquad (*)$$

коммутативна.

Предположим, что можно указать такие d_1 и d_2, $d_1 < d_2 < 0$, что для некоторого d:

1) $\lambda \cap D_{d_1 d_2}$, где $D_{d_1 d_2} = \{\|\xi\| < \varepsilon, \zeta \in [d_1, d_2]\}$ и $D_{d_1 d_2} \subset D_d$, содержит две связные компоненты Γ_1' и Γ_2', принадлежащих одной из связных компонент $\tilde{\Gamma} \subset \lambda \cap D_d$.

2) точки $\Gamma_1' \cup \Gamma_2'$ являются точками первого типа.

Условия 1), 2) назовем условиями “малой петли”.

Здесь имеет место следующая

Теорема 4. *При выполнении условий “малой петли”,* $d_2 - d_1 > b - a + \rho$, *а и* b *– концы* $T^{-h}\tilde{\Gamma}$ *на оси* z, $\rho > 0$ *и*

$$\sigma = \min_{P \in T^{-k}(\Gamma_1' \cup \Gamma_2')} \left| \frac{\text{пр}_z dT^k l_P}{\|l_P\|} \right| > 1 + q, \quad q > 0,$$

k *– наименьшее целое положительное число такое, что* $T^{-k}\tilde{\Gamma} \subset U_\varepsilon$, *существует счетная последовательность* $\Delta_i = (\mu_i', \mu_i'')$, $\Delta_j \cap \Delta_k = \delta_{jk}$, *такая, что для каждого* $\mu \in \Delta_i$ *можно указать инвариантное относительно* $T(\mu)$ *множество* $\Sigma(\mu)$, *т.м.ц.* $(G(i), \Omega(i), k_1, k_2, \sigma)$ *с* $k(i) \to \infty$ *при* $i \to \infty$ *и гомеоморфизм* $\Omega(i) \to \Sigma(\mu)$, *что диаграмма, аналогичная (*), будет коммутативна.*

Замечание. Теорема 1 дает математическое обоснование явлению возникновения биений, ранее объяснявшихся ([9]) на основе метода усреднения. Из теорем же 3, 4 следует, что при исчезновении устойчивого периодического движения может возникнуть устойчивое предельное множество сложной структуры, для объяснения поведения фазовой точки в котором, вообще говоря, требуется уже статистическое описание. Другой случай существования предельного множества аналогичной природы в устойчивом кольце рассмотрен в ([10]). На наш взгляд, вопросы, рассмотренные как здесь, так и в ([10]), имеют вполне определенное отношение к, тому кругу идей, который связан с задачей возникновения турбулентности в системах неконсервативного происхождения.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
7 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

([1]) A. A. Andronov, A. A. Vitt, Arch. Electrotechn., B. 24, 99 (1930); А. А. Андронов, Собр. тр., 1956, стр. 51.
([2]) А. А. Андронов, Е. А. Леонтович, Уч. зап. Горьковск. гос. унив., т. 6, 3 (1939).
([3]) Л. П. Шильников, Матем. сб., т. 61, 4, 443 (1963).
([4]) Л. П. Шильников, ДАН, т. 170, № 1, 49 (1966).
([5]) Л. П. Шильников, ДАН, т. 189, № 1, 59 (1969).
([6])В. С. Афраймович, Л. П. Шильников, УМН, т. 27, в. 3 (165), 189 (1972).
([7]) Е. А. Леонтович, Ю. И. Неймарк, Сб. докл. Политехи, ин-та, Ташкент, т. 6, 132 (1964).
([8]) Ю. И. Неймарк, Тр. V международн. конфер. по нелинейным колебаниям, т. 2, Киев, (1970).
([9]) Т. Хаяси, Нелинейные колебания в физических системах, М., 1968.
([10]) В. С. Афраймович, Л. П. Шильников, ДАН, т. 214, № 4 (1974).

Прикладная математика и механика. Том 41,1977

УДК 531.36:534

ПРИНЦИП КОЛЬЦА И ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ДВУХ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

В. С. Афраймович, Л. П. Шильников

(Горький)

Показано, что при взаимодействии двух автоколебательных систем может существовать притягивающее множество, содержащее счетное множество периодических движений.

В работах Ван дер Поля, А.А. Андронова и А.А. Витта было установлено наличие режимов синхронизации и биений при воздействии внешнего периодического возмущения на автоколебательную систему. Вопрос о существований режимов биений можно свести к задаче о существовании устойчивых инвариантных торов в нерезонансных случаях. Н. М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым [1] было показано, что при надлежащем выборе секущей существование инвариантного тора следует из существования инвариантной кривой у отображения кольца в кольцо. Дальнейшее изучение вопросов существования и гладкости периодических поверхностей связано с работами Н.Н. Боголюбова, Ю.А. Митропольского, Левинсона, Дилиберто, Хейла и др.

1. Может случиться, что для отображения кольца в кольцо инвариантной кривой в кольце не существует, а имеется замкнутое инвариантное множество сложной природы, содержащее счетное множество периодических движений, континуум траекторий, устойчивых по Пуассону и т.д. Ниже дается математическое описание подобной ситуации, формулируемое в виде принципа кольца (для простоты излагаемого здесь в менее общей форме, чем в [2]).

Принцип кольца. Пусть отображение T:

$$\bar{x} = f(x,\theta), \bar{\theta} = \theta + g_1(x,\theta) \equiv g(x,\theta) \ (\mathrm{mod} 2\pi),$$
$$x = (x_1, ..., x_k),$$

где f и g_1 – 2π-периодические по θ и C^1-гладкие функции, переводит кольцо $K : \|x\| \le r_0,\ 0 < \theta \le 2\pi$ в себя и удовлетворяет следующим условиям:

1°. $\|f_x\| \le q < 1$ для всех (x,θ).

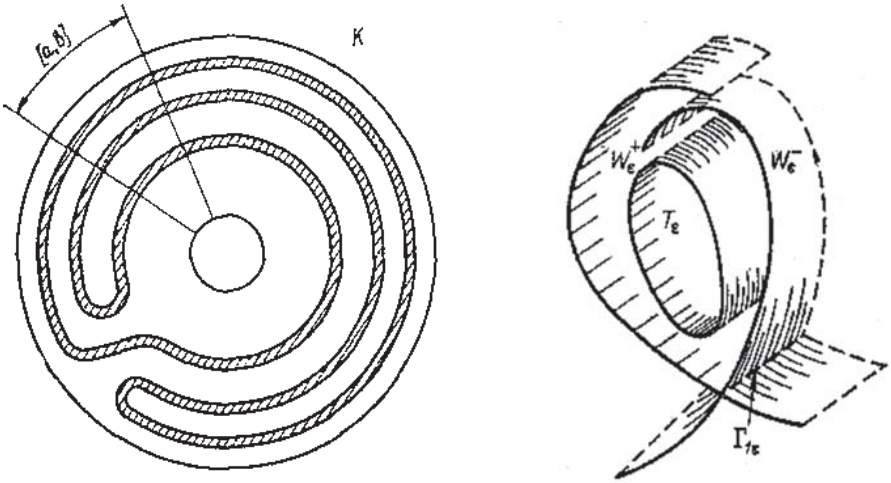
2°. Выполняется условие растяжения фаз, т. е. существует такое $p > 1$ и отрезок $[a,b]$, $0 < a < b \le 2\pi$, что $\max_x |g_\theta^{-1}| \le p^{-1}$ для любого $\theta \in [a,b]$. Кроме того, $|g(x,b) - g(x,a)| > 2\pi(n+1), n \ge 2$ для любого $x, \|x\| \le r_0$.

3°. $\|f_0\|\ \|g_x\| < (p-1)(1-q)$ для всех $(x,\theta) \in K$.

Тогда в кольце K существует замкнутое множество Σ, состоящее из траекторий отображения T, которые могут быть поставлены во взаимно-однозначное и взаимно-непрерывное соответствие с множеством всевозможных бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из n символов. Иными словами, отображение T на Σ топологически сопряжено со сдвигом топологической схемы Бернулли из n символов (см. фиг. 1, где заштрихована область, являющаяся образом K при отображении T).

Условие 2° означает увеличение длин образов окружностей $x = x_0$, не менее чем в $(n+1)$ раз, приводящее к экспоненциальному разбеганию точек по фазе на интервалах, где $|g_\theta| > 1$ (см. фиг. 1). В связи с этим следует отметить близость условия 2° к эвристическому критерию стохастичности Б. В. Чирикова, указанному им для сохраняющих площадь отображений.[1]

[1] Чириков Б.В. Исследование по теории нелинейного резонанса и сто хаотичности. Препринт Ин-та ядерн. физ. СО АН СССР, 267, Новосибирск, 1969.



Фиг. 1 Фиг.2

Рис. 5

Естественно, что подобные случаи не встречались в задачах, в которых возмущения исходных уравнений были достаточно малыми. Чтобы указать систему, в которой реализуется принцип кольца, нужно, чтобы либо связь взаимодействия автоколебательных систем (или возмущение автоколебательной системы) была достаточно большой, либо мера грубости (т. е. расстояние до бифуркационной границы) одной из систем была малой. Первый путь весьма сложен: его реализация в конкретных случаях в значительной мере связана с использованием ЭВМ. На втором же пути можно выделить условия, в которых принцип кольца применим. А именно, результат, установленный в данной работе, заключается в следующем: при взаимодействии двух автоколебательных систем, одна из которых имеет проходящий около состояния равновесия типа седло предельный цикл (соответствующий автоколебательному режиму), отображение некоторой секущей в себя может удовлетворять условиям принципа кольца. Для периодически возмущенных двумерных автоколебательных систем установление сложной структуры траекторий с помощью принципа кольца было проведено в [2]. Другие механизмы возникновения притягивающих множеств сложной природы указаны в [3,4].

2. Будем рассматривать систему дифференциальных уравнений

$$\dot{u} = U(u, \varepsilon),\ \|u\| \le \mathrm{const}, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \tag{2.1}$$

где u – m-вектор, правые части системы C^4-гладкие вектор-функции переменных и C^3-гладки по ε. Предположим, что система (2.1) имеет состояние равновесия O_ε, являющееся простым седлом, для которого корнями характеристического уравнения будут $\lambda_1(\varepsilon), ..., \lambda_{m-1}(\varepsilon), \gamma(\varepsilon)$, причем $\mathrm{Re}\ \lambda_i(\varepsilon) < 0,\ \gamma(\varepsilon) > 0$.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ выполнены следующие условия:

1) существует траектория Γ_0, двоякоасимптотическая к седлу O_0;

2) седловая величина отрицательна, т. е.

$$\max_i\{\mathrm{Re}\lambda_i(0)\} + \gamma(0) < 0 \tag{2.2}$$

Тогда, согласно [5,6], если петля “разваливается внутрь” при $\varepsilon > 0$ (для определенности), то система (2.1) при положительных ε имеет устойчивый предельный цикл Γ_ε. Очевидно, мера грубости (т. е. расстояние до бифуркационной поверхности, соответствующей петле сепаратрисы) системы (2.1) имеет порядок ε.

Пусть имеет место либо случай 1): система (2.1) находится под действием малого периодического возмущения порядка $\mu : \dot{u} = U(u, \varepsilon) + \mu U_1(t, u, \varepsilon, \mu)$, либо случай 2): система (2.1) взаимодействует с другой автоколебательной системой, т.е.

$$\dot{u} = U(u, \varepsilon) + \mu P(u, v, \mu) \tag{2.3}$$

$$\dot{v} = V(v) + \mu Q(u, v, \mu) \tag{2.4}$$

$$\|u\| \leq \text{const}, \ \|v\| \leq \text{const}, \ \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0], \ \mu \in [-\mu_0, \mu_0]$$

где v – n-вектор, правые части системы (2.3), (2.4) – C^4-гладкие вектор-функции переменных и параметров ε и μ. Для определенности будем рассматривать случай 2), так как случай 1) рассматривается аналогично.

Предположим, что система (2.4) при $\mu = 0$ имеет периодическое движение $\Gamma_1 : v = v(\theta), \ \theta = \omega t, \omega > 0$, соответствующее грубому предельному циклу, мультипликаторы которого неотрицательны. В силу теории Флоке-Ляпунова в достаточно малой окрестности Γ_1 при $\mu = 0$ систему (2.4) C^4-гладкой невырожденной заменой переменных $v \to (r, \theta)$ можно привести к виду

$$\dot{r} = Ar + B(r, \theta), \ \dot{\theta} = \omega + C(r, \theta)$$

где r – $(n-1)$-вектор, B, C – 2π-периодичны по θ и C^3-гладки, собственные значения $\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ матрицы A таковы, что $\text{Re}\ \alpha_i < 0, i = 1, ..., n-1$.

Из предположений относительно систем (2.3) и (2.4) при $\mu = 0$ следует, что система (2.3), (2.4) при $\mu = 0$, $\varepsilon > 0$ будет иметь седловое периодическое движение $\Gamma_{1\varepsilon} \equiv O_\varepsilon \times \Gamma_1$, устойчивое многообразие W_ε^+ которого $(m + n - 1)$-мерно, а неустойчивое W_ε^- двумерно, а также двумерный инвариантный тор $T_\varepsilon \equiv \Gamma_\varepsilon \times \Gamma_1$, который при малых ε проходит вблизи периодического движения $\Gamma_{1\varepsilon}$ и при $\varepsilon \to 0$ влипает в петлю неустойчивого многообразия W_ε^-, равную $\Gamma_0 \times \Gamma_1$ (см. фиг. 2, где $\mu = 0, \varepsilon > 0$, сплошными линиями показаны следы пересечения тора T_ε и многообразий W_ε^+, W_ε^- с секущей $\theta = \text{const}$).

Предположим, что седловая величина периодического движения отрицательна, т. е.

$$\max\{\text{Re}\ \lambda_j(0), \text{Re}\ \alpha_j\} + \gamma(0) < 0 \tag{2.5}$$

Отметим, что в случае 1) условие (2.5) при выполнении неравенства (2.2) выполняется автоматически.

Изучение поведения траекторий системы (2.3), (2.4) в некоторой малой окрестности тора T_ε удобно свести к изучению отображения по траекториям системы (2.3), (2.4) секущей в себя. Секущую будем выбирать как прямое произведение некоторой секущей к Γ_ε (и к Γ_0) и малой окрестности Γ_1.

3. В окрестности $\Gamma_{1\varepsilon}$ C^3-гладкой невырожденной заменой переменных и времени приведем систему (2.3), (2.4) к виду

$$\begin{aligned} &\dot{x} = A(\varepsilon, \mu)x + F(x, y, \theta, \varepsilon, \mu)x, \quad \dot{y} = \gamma(\varepsilon, \mu)y \\ &\dot{\theta} = \omega + H(x, y, \theta, \varepsilon, \mu), \quad H = H_1 x + H_2 y \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь x – $(m+n-2)$-вектор; y, θ – скаляры, правые части системы принадлежат классу C^2 в области $G \equiv B_1 \times [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \times [-\mu_1, \mu_1]$ $(0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0, 0 < \mu_1 \leq \mu_0$, B_1 – δ-окрестность $\Gamma_{1\varepsilon})$; F, H – 2π-периодичны по θ и обращаются в нуль при $x = 0$, $y = 0$; собственные числа $(m+n-2)\times(m+n-2)$-матрицы $A(\varepsilon, \mu)$ близки к $\lambda_1(0), ..., \lambda_{m-1}(0), \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ соответственно, а величина $\gamma(\varepsilon, \mu)$ близка к $\gamma(0)$.

Замечание 1. Систему в виде (3.1) можно получить из распрямления гладких инвариантных многообразий W_ε^+ и W_ε^- периодического движения $\Gamma_{1\varepsilon}$, существующих в силу теорем 3-6 работы [7], из замен времени и теории Флоке-Ляпунова. Можно также показать, что при $\mu = 0$ в совокупной замене (u, v) на (x, y, θ) y как функция u, v не зависит от v, а θ не зависит от u.

При достаточно малом δ в G_1 имеют место оценки

$$\begin{aligned} &\|F_x\| + \|F_y\| + \|H_x\| + \|H_y\| \leq M, \ \|F\| + \|H\| < M\delta \\ &\|F_\theta\| + \|H_\theta\| < N\delta, \ \|H_{1\theta}\| + \|H_{2\theta}\| < M' \end{aligned} \tag{3.2}$$

где M, M' и N – постоянные, не зависящие от δ.

Отображение T будем искать в виде суперпозиции отображения T_0, построенного по траекториям системы (2.3), (2.4), проходящим в окрестности $\Gamma_{1\varepsilon}$, и отображения T_1 по траекториям, проходящим в окрестности $\Gamma_0 \times \Gamma_1$.

Отображение T_0. При $\mu = \varepsilon = 0$ в силу предположений пересечение W_ε^- с δ-окрестностью $\Gamma_{1\varepsilon}$ имеет две компоненты связности: W^{--}, принадлежащую цилиндру $x = 0$, и W^{-+}, принадлежащую цилиндру $y = 0$. Зафиксируем на W^{--} окружность P^-: $x = 0, y = d_1, 0 < \theta \leq 2\pi$ и рассмотрим секущую $S_1 : y = d_1, \|x\| \leq \rho_1, 0 < \theta \leq 2\pi$. Далее, зафиксируем на W^{-+} окружность P^+: $x = x^0$, $y = 0$, $0 < \theta \leq 2\pi$ и выберем любую трансверсальную к W^{-+} секущую S_0, такую, что $\|x - x^0\| \leq \rho_0$, $\|y\| \leq \rho_0$ для точек $(x, y, \theta) \in S_0$. Очевидно, при достаточно малых $\mu, \varepsilon, \rho, \rho_1$ секущие S_1 и S_0 трансверсальны к траекториям системы (2.3), (2.4).

Пусть

$$x = x(t, x_0, y_0, \theta_0), \ \theta = \theta(t, x_0, y_0, \theta_0), \ y = y_0 e^{\gamma(\varepsilon,\mu)t} \tag{3.3}$$

– решение системы (3.1), проходящее при $t = 0$ через точку (x_0, y_0, θ_0) лежащее в δ-окрестности $\Gamma_{1\varepsilon}$. Зафиксируем λ_1, $\max_{i,j}\{\mathrm{Re}\ \lambda_j(0), \mathrm{Re}\ \alpha_i\} < \lambda_1 < 0$, и γ_1, $\gamma_1 > \gamma(0) > 0$, такие, что $\lambda_1 + \gamma_1 < 0$ (они существуют в силу предположения (2.5)). Можно показать, что при всех достаточно малых ε и μ имеет место оценка

$$\|\exp A(\varepsilon, \mu)t\| \leq \mathrm{const}\ e^{\lambda_1 t} \tag{3.4}$$

Методами работ [6,8] с использованием неравенств (3.2), (3.4) и обобщенного неравенства Гронуолла доказывается следующая лемма:

Лемма 1. Для любых чисел α и β, таких, что $\alpha > 0$, $\lambda_1 < \beta < 0$, существуют такие числа δ_2, μ_2 $(0 < \mu_2 \leq \mu_1)$, ε_2 $(0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1)$, что в области $G \equiv B_2 \times [-\varepsilon_2, \varepsilon_2] \times [-\mu_2, \mu_2]$, где B_2 – δ-окрестность $\Gamma_{1\varepsilon}$ $(0 < \delta \leq \delta_2)$, для решения уравнений (3.1) имеют место оценки (C_i, C_i' – постоянные)

$$\|x(t)\| \leq 2\delta e^{\lambda_1 t} \tag{3.5}$$

$$\left\|\frac{\partial x(t)}{\partial x_0}\right\| \le C_1 e^{\beta t},\ \left\|\frac{\partial \theta(t)}{\partial x_0}\right\| \le C_1' e^{N\delta t} \tag{3.6}$$

$$\left\|\frac{\partial x(t)}{\partial y_0}\right\| \le C_2 e^{(\lambda_1+\gamma_1)t},\ \left\|\frac{\partial \theta(t)}{\partial y_0}\right\| \le C_2' e^{\gamma(\varepsilon,\mu)t} \tag{3.7}$$

$$\left\|\frac{\partial x(t)}{\partial \theta_0}\right\| \le C_3 \delta e^{(\lambda_1+\alpha)t},\ \left|\frac{\partial \theta(t)}{\partial \theta_0} - 1\right| \le C_3' \delta \tag{3.8}$$

Выберем $\delta_2, \varepsilon_2, \mu_2$ настолько малыми, чтобы α и β удовлетворяли условиям

$$0 < \alpha < \gamma_1,\ 0 < \alpha < -(\lambda_1+\gamma_1),\ \lambda_1 < \beta < \lambda_1 + \gamma_1 \tag{3.9}$$

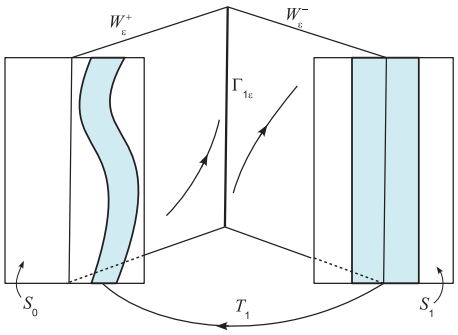
и, кроме того, $C_3'\delta_2 < 1/8$, $M\delta_2 < \min\{1/8, 1/8\omega\}$.

Эти неравенства с учетом (3.5) позволяют непосредственно из вида системы (3.1) получить оценки

$$\begin{aligned} &\left\|\frac{\partial x(t)}{\partial t}\right\| < 2(\|A(\varepsilon,\mu)\| + 1/8)\delta_2 e^{\lambda_1 t} \\ &\left|\frac{\partial \theta(t)}{\partial t} - \omega\right| < \tfrac{1}{8}\omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

а последняя из оценок (3.8) перепишется теперь так:

$$\left|\frac{\partial \theta(t)}{\partial \theta_0} - 1\right| < \tfrac{1}{8} \tag{3.11}$$



Фиг. 3

Отображение T_0: $S_0 \to S_1$ получим, подставляя в (3.3) время перехода

$$t_n = -\tfrac{1}{\gamma(\varepsilon,\mu)} \ln \tfrac{y_0}{d_1} \tag{3.12}$$

от S_0 до S_1, определяемое из условия $d_1 = y_0 e^{\gamma(\varepsilon,\mu)t}$. Имеем

$$\begin{aligned} &T_0 : x_1 = x(-\tfrac{1}{\gamma(\varepsilon,\mu)} \ln \tfrac{y_0}{d_1}, x_0, y_0, \theta_0, \varepsilon, \mu) \\ &\bar\theta_1 = \theta(-\tfrac{1}{\gamma(\varepsilon,\mu)} \ln \tfrac{y_0}{d_1}, x_0, y_0, \theta_0, \varepsilon, \mu) \end{aligned} \tag{3.13}$$

Неравенство (3.5) примет вид

$$\|\bar x_1\| \le 2\delta(\tfrac{y_0}{d_1})^\zeta,\ \zeta = -\tfrac{\lambda_1}{\gamma_1} \tag{3.14}$$

Отсюда вытекает следующее утверждение: для любого $\rho_1 > 0$ существует такое $b > 0$, что при всех достаточно малых ε_2, μ_2 отображение $T_0 : S_0 \to S_1$ определено в области $\sigma_0 = \{(x, y, \theta) \in S_0,\ 0 < y \le b\}$.

Отображение T_1. В силу сделанных предположений окружность P преобразуется за конечное время по траекториям системы (2.3), (2.4) при $\mu = \varepsilon = 0$ в окружность $x = x_0^\circ, y = 0, 0 < \theta \leq 2\pi$. За окружность P примем именно эту окружность, т. е. x° положим равным x_0°.

Из общих теорем следует, что при всех достаточно малых ε, μ существует гладкое невырожденное отображение окрестности одной из этих окружностей на некоторую окрестность другой, т. е. для любого $\rho_0 > 0$ найдется такое $\rho_1 > 0$, что существует гладкое невырожденное отображение $T_1 : S_1 \to S_0$.

При $\mu = \varepsilon = 0$ система (2.3), (2.4) распадается на системы (2.3) и (2.4), поэтому в силу начального условия $x_1 = 0$ движение в системе (2.4) осуществляется по предельному циклу $\Gamma_1 : v = v(\theta), \dot{\theta} = \omega$, следовательно, $\theta_0 = \theta_1 + \omega\tau_0$. Отсюда и из невырожденности и гладкости по переменным и параметрам совокупной замены от (u, v) к (x, y, θ) следует, что при $\mu = k\varepsilon$ отображение T_1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0^\circ + \varepsilon P_1'(x_1, \theta_1, \varepsilon) + P_2'(x_1, \theta_1, \varepsilon) \\ y_0 &= \Delta_1(x_1, \theta_1, \varepsilon)x_1 + \varepsilon\Delta_2(x_1, \theta_1, \varepsilon) \\ \theta_0 &= \{\theta_1 + \omega\tau_0 + R_1'(x_1, \theta_1, \varepsilon) + \varepsilon R_2'(x_1, \theta_1, \varepsilon)\} \pmod{2\pi} \end{aligned} \tag{3.15}$$

где правые части принадлежат классу C^2, и P_i, Δ_i, Q_i 2π-периодичны по $\theta_1, i = 1, 2$. В силу замечания 2, $\Delta_2 \equiv R_1(x_1, \varepsilon) + kR_2(x_1, \theta_1, \varepsilon)$, причем рассматривается случай, когда выполнены условия рождения, то $R_1(x_1, \varepsilon) > 0$. Предположим, что $\Delta_2(0, \theta_1, 0) > 0$. (Если Δ_2 обращается в нуль, это означает, что система (2.3), (2.4) имеет гомоклиническив кривые [8,9], если же $\Delta_2 < 0$, то все траектории, кроме $\Gamma_{1\varepsilon}$, покидают окрестность $\overline{\Gamma_0 \times \Gamma_1}$ [2].)

На фиг. 3 изображены устойчивые и неустойчивые многообразия периодического движения $\Gamma_{1\varepsilon}$ при $\varepsilon > 0$, $\Delta_2 > 0$.

4. Отображение T как суперпозицию отображений T_0 и T_1 получим, подставляя (3.15) в (3.13); при этом время перехода t_n определяется равенством

$$t_n = -\tfrac{1}{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)} ln \tfrac{y_0}{d_1},\ y_0 = \Delta_1(x_1, \theta_1, \varepsilon)x_1 + \varepsilon\Delta_2(x_1, \theta_1, \varepsilon) \tag{4.1}$$

Покажем, что отображение T имеет фактически те же свойства, что и модельное отображение

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \tfrac{x_0^\circ}{d_1} y_0^\zeta \ (\approx e^{\lambda_\varepsilon t_n} x_0^\circ) \\ \bar{\theta}_1 &= \theta_1 + \omega\tau_0 + \tfrac{\omega}{\gamma(\varepsilon, k\varepsilon)} \ln \tfrac{y_0}{d_1} \ (\approx \theta_1 + \omega\tau_0 + \omega t_n) \end{aligned}$$

а именно докажем следующую лемму.

Лемма 2. Для любого κ, $1 < \kappa < \zeta$ существуют такие ε_3, δ_3, что при всех ε, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_3$, отображение T переводит кольцо K_ε: $\|x_1\| \leq \varepsilon^\kappa$, $0 < \theta_1 \leq 2\pi$ в себя, причем имеют место оценки

$$\begin{aligned} &\left\| \tfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} \right\| \leq D_1 \varepsilon^{\zeta - 1},\ \left\| \tfrac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta_1} \right\| \leq D_2 \varepsilon^{\zeta - \alpha/\gamma_1} \\ &\left\| \tfrac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right\| \leq D_3 \varepsilon^{-1},\ \left| \tfrac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial \theta_1} \right| > \tfrac{6\omega}{8\gamma_1} \left| \tfrac{\Delta_{2\theta_1}(0, \theta_1, 0)}{\Delta_2(0, \theta_1, 0)} \right| - \tfrac{9}{8} \end{aligned} \tag{4.2}$$

Доказательство. 1°. Из оценки (3.14), второй формулы (3.15) и того, что $\|x_1\| \leq \varepsilon^\kappa$, следует

$$\|x_1\| \leq \left\{ 2\delta_2 \varepsilon^{\zeta - \kappa} [\tfrac{1}{d_1}(\|\Delta_1\| \varepsilon^{\kappa - 1} + \|\Delta_2\|)] \right\} \varepsilon^\kappa$$

Очевидно, при малых ε выражение в фигурных скобках меньше единицы, т. е. $T(K_\varepsilon) \in K_\varepsilon$.

2°. Докажем последнюю из оценок (4.2), всюду полагая $\|x_1\| \le \varepsilon^\kappa$. Предварительно заметим, что

$$\left\|\frac{\partial x_0}{\partial \theta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1}\right\| + \left\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1} - 1\right\| < M_1\varepsilon,\ M_1 = const \tag{4.3}$$

Очевидно

$$\left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial \theta_1}\right\| \ge \left|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial t_n}\frac{\partial t_n}{\partial \theta_1}\right| - \left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial x_0}\right\|\left\|\frac{\partial x_0}{\partial \theta_1}\right\| - \left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial y_0}\right\|\left\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1}\right\| - \left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial \theta_0}\right\|\left\|\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\right\|$$

Используя (4.1) и (4.2), получим

$$\left|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial t_n}\frac{\partial t_n}{\partial \theta_1}\right| > \frac{7}{8}\frac{\omega}{\gamma_1}\left|\frac{\Delta_{2\theta_1}(0,\theta_1,0)}{\Delta_2(0,\theta_1,0)}\right| + \alpha_1(\varepsilon)$$

Здесь и ниже $\alpha_i \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из (3.7) и того, что $y_0 e^{\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)t_n} = d_1$, следует

$$\left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial y_0}\right\|\left\|\frac{\partial y_0}{\partial \theta_1}\right\| \le C_2' e^{\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)t_n}|y_{0\theta_1}| = C_2' d_1\left|\frac{y_{0\theta_1}}{y_0}\right| <$$
$$\frac{\omega}{8\gamma_1}\left|\frac{\Delta_{2\theta_1}(0,\theta_1,0)}{\Delta_2(0,\theta_1,0)}\right| + \alpha_2(\varepsilon)$$

(величина δ_3, а следовательно, и d_1, выбрана настолько малой, чтобы $C_2' d_1 < \omega/(8\gamma_1)$).

Из (3.6) и (4.3) следует, что

$$\left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial x_0}\right\|\left\|\frac{\partial x_0}{\partial \theta_1}\right\| \le C_1' e^{N\delta t_n} \le C_1' M_1\left|\frac{y_0}{d_1}\right|^{-N\delta/\gamma_1} < \text{const}\ \varepsilon^{1-N\delta/\gamma_1} = \alpha_3(\varepsilon)$$

(величина δ_3 выбрана настолько малой, чтобы $N\delta_3 < \gamma_1$.)

Из (4.3) и (3.8)

$$\left|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial \theta_0}\frac{\partial \theta_0}{\partial \theta_1}\right| \le \frac{9}{8} + \alpha_4(\varepsilon)$$

На основании выписанных неравенств получаем последнюю из оценок (4.2).

3°. Из (3.15) можно вывести, что

$$\left\|\frac{\partial \theta_0}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial y_0}{\partial x_1}\right\| \le M_2 = const \tag{4.4}$$

Очевидно

$$\left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial x_1}\right\| \le \left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial t_n}\right\|\left\|\frac{\partial t_n}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial (x_0,y_0,\theta_0)}\right\|\left\|\frac{\partial (x_0,y_0,\theta_0)}{\partial x_1}\right\| \tag{4.5}$$

Из (4.1), (3.6) и (4.4), (3.10) и (4.4), (3.11) имеем соответственно

$$\left\|\frac{\partial t_n}{\partial x_1}\right\| \le \text{ const}\ \varepsilon^{-1} + \alpha_6(\varepsilon)$$
$$\left\|\frac{\partial \theta_1}{\partial x_0}\right\|\left\|\frac{\partial x_0}{\partial x_1}\right\| \le C_2' M_2 e^{N\delta t_n} \le C_2' M_2 e^{\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)t_n} = C_2' M_2 d_1|y_0|^{-1} \le$$
$$\le \text{ const}\ \varepsilon^{-1} + \alpha_7(\varepsilon),\ \left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial y_0}\right\|\left\|\frac{\partial y_0}{\partial x_1}\right\| \le C_2' e^{\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)t_n} \le \text{const}\ \varepsilon^{-1} + \alpha_8(\varepsilon),$$
$$\left\|\frac{\partial \bar\theta_1}{\partial \theta_0}\right\|\left\|\frac{\partial \theta_0}{\partial x_1}\right\| \le \text{const}$$

Отсюда получаем третью из оценок (4.2). Далее, из (4.4), (3.10). (3.6) - (3.8) следует, что

$$\left\|\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1}\right\| \le L_1\varepsilon^{\zeta-1} + L_2\varepsilon^{-\beta/\gamma_1} + L_3\varepsilon^{\zeta-1} + L_4\varepsilon^{\zeta-\alpha/\gamma_1} \tag{4.6}$$

где L_i – постоянные и каждое слагаемое в (4.6) оценивает соответствующее слагаемое в правой части неравенства, аналогичного (4.5) ($\bar{x}_1$ вместо $\bar{\theta}_1$). Из (4.6) и (3.9) вытекает первая из оценок (4.2).

Наконец, из (4.3), (4.1), (3.10), (3.6) - (3.8) следует, что

$$\left\|\frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \theta_1}\right\| \le L_1'\varepsilon^{\zeta} + L_2'\varepsilon^{\zeta-1} + L_3'\varepsilon^{-\beta/\gamma_1} + L_4'\varepsilon^{\zeta-\alpha/\gamma_1} \tag{4.7}$$

Из'(4.7) и (3.9) получим вторую из оценок (4.2). Лемма доказана.

На фиг. 3 заштриховано кольцо K_ε и его образ относительно отображения T_1 при $\varepsilon > 0$.

Теорема. Предположим, что существует интервал $I = [a, b], 0 < a < b \le 2\pi$, такой, что для $\theta_1 \in I$

$$\frac{\omega}{\gamma_1}\left|\frac{\Delta_{2\theta_1}(0,\theta_1,0)}{\Delta_2(0,\theta_1,0)}\right| > 3 \tag{4.8}$$

$$\frac{\omega}{\gamma_1}\left|\ln\frac{\Delta_2(0,b,0)}{\Delta_2(0,a,0)}\right| > 3\pi n,\ n \ge 3 \tag{4.9}$$

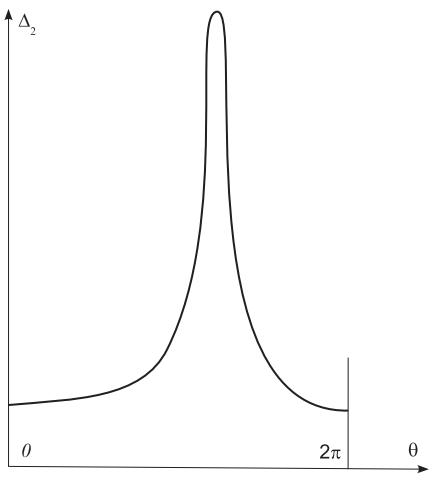
Тогда для всех достаточно малых ε отображение T имеет в кольце K_ε инвариантное множество, на котором T сопряжено со сдвигом схемы Бернулли из $n-1$ символов.

Доказательство. Проверим условия принципа кольца. Из (4.2) и (4.7) следует, что $|\partial\bar{\theta}_1/\partial\theta_1| > 9/8$ для $\theta_1 \in I$. Кроме того, $\|\partial\bar{x}_1/\partial x_1\| < 1$. Теперь положим

$$t_b = -\frac{1}{\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)}\ln\frac{y_0(x_1,b,\varepsilon)}{d_1},\ y_b = d_1 e^{-\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)t_b}$$
$$t_a = -\frac{1}{\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)}\ln\frac{y_0(x_1,a,\varepsilon)}{d_1},\ y_b = d_1 e^{-\gamma(\varepsilon,k\varepsilon)t_a}$$

Тогда

$$|\bar{\theta}_1(b) - \bar{\theta}_1(a)| > \left|\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial t_n}\right| |t_b - t_a| - \left\|\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial x_0}\right\| \left\|\frac{\partial x_0}{\partial\theta_1}\right\| |b-a| -$$
$$- \left\|\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial y_0}\right\| \left\|\frac{\partial y_0}{\partial t}\right\| |t_b - t_a| - \left\|\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial\theta_0}\right\| \left\|\frac{\partial\theta_0}{\partial\theta_1}\right\| |b-a|$$



Фиг. 4

Используя неравенства (второе из них следует из (3.7))

$$|t_b - t_a| > \frac{1}{\gamma_1}\left|\ln\frac{\Delta_2(0,b,0)}{\Delta_2(0,a,0)}\right| + \alpha_9(\varepsilon)$$
$$\left\|\frac{\partial\bar{\theta}_1}{\partial y_0}\right\| \left\|\frac{\partial y_0}{\partial t}\right\| \le \gamma_1 C_2' d_1$$

а также учитывая (3.6) и неравенства (4.3), (3.10), (3.11), получим

$$|\bar{\theta}_1(b) - \bar{\theta}_1(a)| > \frac{\omega}{\gamma_1}\left|\ln\frac{\Delta_2(0,b,0)}{\Delta_2(0,a,0)}\right| \left|\frac{7}{8} - \gamma_1 C_3' d_1\right| - \frac{9}{8} +$$
$$+\alpha_{10}(\varepsilon) > \frac{6\omega}{8\gamma_1}\left|\ln\frac{\Delta_2(0,b,0)}{\Delta_2(0,a,0)}\right| - \frac{9}{8}$$

(величина δ_3 выбрана настолько малой, чтобы $\gamma_1 C_2' \delta_3 < 1/8$). Отсюда, используя (4.9), получим $\bar{\theta}_1(b) - \bar{\theta}_1(a) > 2\pi n$.

Для окончательной проверки условии принципа кольца достаточно показать, что

$$\left\| \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial x_1} \right\| \left\| \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \right\| < \frac{1}{8}$$

Из (4.2),(3.9) следует, что $D_2 D_3 \varepsilon^{\zeta - \alpha/\gamma_1} \varepsilon^{-1} < 1/8$ при малых ε.

Замечание 2. Функция $\Delta_2(0, \theta, 0)$ характеризует щель между следами многообразий W_ε^+ и W_ε^- на секущей S_0. Если производная этой функции мала по сравнению с величиной самой функции (например, $\Delta_2 = 3 + \sin \omega_0 \theta, \omega_0 \ll 1$, то отображение T имеет в K_ε инвариантную кривую. Если существует отрезок на котором производная очень велика, например, когда Δ_2 типа импульса (фиг.4), то приходим к принципу кольца. Фиг.4 как раз соответствует отображение T вида фиг.1. Между этими крайними случаями лежит промежуточный случай, связанный с возникновением подковы Смейла (см. [9]).

Поступила 12 VII 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Приложение методов нелинейной механики к теории стационарных колебаний. Киев, Изд-во Всеукр. Акад. наук, 1934.

2. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О малых периодических возмущениях автономных систем. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 4.

3. Афраймович В. С., Шильников Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 6.

4. Шильников Л. П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. Докл. АН СССР, 1975, т. 224, № 5.

5. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., <Наука>, 1967.

6. Шильников Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. Матем. сб., 1963, т. 61, № 4.

7. Kelley A. The stable, center-stable, center, center-unstable and unstable manifolds. An appendix in: R, Abraham, J. Robbin. Transversal Mappings and Flows, New York, Benjamin, 1967.

8. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре - Биркгофа. Матем. сб., 1967, т. 74, № 3.

9. Гаврилов Н. К., Шильников Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I. Матем. сб., 1972, т. 88, № 4; II. Матем. сб., 1973, т. 90, №.1.

Доклады Академии наук СССР
1974, Том 243, № 1, с. 26-29

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

В.И. Лукьянов, Л.П. Шильников

О НЕКОТОРЫХ БИФУРКАЦИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

(Представлено академиком А.Н.Колмогоровым 17 IV 1978)

Как известно ([1,2]), одним из основных элементов, отличающих грубые динамические системы с бесконечным множеством периодических движений от систем Морса-Смейла, является грубая гомоклиническая структура (г.с.), т. е. грубое периодическое движение $\mathcal{L}$ седлового типа и двоякоасимптотическая к $\mathcal{L}$ траектория Γ, по которой трансверсально пересекаются устойчивое W^s и неустойчивое W^u многообразия периодического движения. В работе ([2]) дано полное описание множества N траекторий, целиком лежащих в некоторой достаточно малой окрестности $\mathcal{L} \cup \Gamma$, и доказана его грубость. Представляет интерес изучение динамических систем с г.с. при нарушении условий грубости. Случай, когда Γ – негрубая гомоклиническая кривая, был предметом изучения работ ([3–6]), в которых, в частности показано, что системы с такой структурой могут отделять системы Морса-Смейла от систем с нетривиальными гиперболическими множествами. Настоящая работа посвящена рассмотрению тех перестроек структуры фазового пространства, когда негрубость г.с. связана с негрубостью $\mathcal{L}$.

Рассмотрим на C^∞-гладком компактном многообразии M^{n+2} однопараметрическое семейство динамических систем $X(\mu)$, порождаемое семейством C^r-гладких векторных полей ($r \geq 2$), непрерывных по μ в C^r-топологии. Предположим, что при $\mu = 0$ система X_0 имеет двукратное периодическое движение $\mathcal{L}_0$, возникшее из слияния при $\mu \to \infty$ устойчивого $\mathcal{L}^s(\mu)$ и седлового $\mathcal{L}^u(\mu)$ периодических движений. Как известно ([7]), в некоторой локальной карте V на секущей S к $\mathcal{L}_0$ диффеоморфизм $T(\mu) : S \to S$ вдоль траекторий $X(\mu)$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= Ax + f(x, y, \mu)x, \\ \bar{y} &= y + R(y, \mu) + g_1(x)y + g_2(x, y, \mu)x, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\|A\| < 1$, $R - C^r$, $f, g_1, g_2 - C^{r-1}$-гладкие по x и y, непрерывные по μ в соответствующей топологии и обращающиеся в нуль при $x = 0$, $y = \mu = 0$ функции, причем $g_2(x, y, 0) \equiv 0$, а $R(y, 0) = l(y)y^2$, где ляпуновская величина $l(0) > 0$.

Неподвижная точка $O(0, 0)$ носит название седло-узел. Ее неустойчивое многообразие W^u в окрестности $V_\rho : \{\|x\| < \rho, |y| < \rho\}$, где ρ достаточно малое число, будет иметь уравнение $x = 0$, $0 \leq y < \rho$, а устойчивое $\mathfrak{M}^s$ - уравнение $\rho < y \leq 0$, $\|x\| < \rho$. Край

$\mathfrak{M}^s : y = 0,\ \|x\| < \rho$ будем обозначать W^s. Естественно, что W^u, $\mathfrak{M}^s$ и W^s суть локальные следы пересечения с секущей S многообразий периодического движения $\mathcal{L}_0$: неустойчивого $W^u_{\mathcal{L}_0}$, устойчивого $\mathfrak{M}^s_{\mathcal{L}_0}$ и его края $\partial\mathfrak{M}^s_{\mathcal{L}_0} = W^s_{\mathcal{L}_0}$. Аналогично, неподвижные точки $O^s(\mu)$ и $O^u(\mu)$, на которые разваливается седло-узел $O(0,0)$ при $\mu < 0$, будут соответствовать точкам пересечения $\mathcal{L}^s(\mu)$ и $\mathcal{L}^u(\mu)$ с секущей S. При $\mu > 0$ будем предполагать, что $R(y,\mu) > 0$, т.е. периодическое движение $\mathcal{L}_0$, а следовательно, и седло-узел $O(0,0)$ исчезают. Заметим, что $W^s_{\mathcal{L}_0}$ и $W^u_{\mathcal{L}_0}$ есть топологические пределы устойчивого и неустойчивого многообразий $\mathcal{L}^u(\mu)$ при $\mu \to 0$. Кроме того, через $W^u_{loc}, \mathfrak{M}^s_{loc}$ и W^s_{loc} будем обозначать соответственно куски многообразий $W^u, \mathfrak{M}^s$ и W^s, принадлежащих окрестности V_ρ и содержащих точку $O(0,0)$.

Предположим, что $\mathcal{L}_0$ имеет двоякоасимптотическую траекторию Γ_0, по которой $W^s_{\mathcal{L}_0}$ и $W^u_{\mathcal{L}_0}$ пересекаются трансверсально [1].

Пусть U – некоторая окрестность г.с. $\mathcal{L}_0 \cup \Gamma_0$. Очевидно, при μ достаточно малых, $\mathcal{L}^s(\mu) \subset U$. Обозначим через $\Omega_U(\mu)$ множество всех траекторий, целиком лежащих в U, за исключением $\mathcal{L}^s(\mu)$ при $\mu < 0$.

Теорема 1 *Существует такая достаточно малая окрестность U и $\mu_1 < 0$, что для всех $\mu \in [\mu_1, 0]$ множество $\Omega_U(\mu)$ гомеоморфно надстройке над схемой Бернулли из 2-х символов.*

В банаховом пространстве C^r-векторных полей на M^{n+2} порождаемые ими динамические системы, имеющие негрубое периодическое движение указанного типа, в общем случае будут выделять бифуркационную "пленку" B^1 коразмерности 1. Эта пленка будет разделять достаточно малый шар K с центром в X_0 на области B^- и B^+; в B^- системы X, близкие к X_0, имеют периодические движения $\mathcal{L}^u$ и $\mathcal{L}^s$, сливающиеся в $\mathcal{L}_0$ при стремлении X к X_0. Из теоремы 1 следует, что в U пленка B^1 достижимая из B^-.

Теорема 2 *Существует такая окрестность U г.с. $\bar\mu > 0$ и разбиение интервала $(0, \bar\mu]$*

$$0 < ... < \mu_{k+1+\bar k} < \mu'_{k+1+\bar k} < \mu_{k+\bar k} < ... < \mu_{\bar k} = \bar\mu,$$

что при $\mu \in (\mu_{k+1+\bar k},\ \mu_{k+\bar k}]$ множество $\Omega_U(\mu)$ траекторий, целиком лежащих в U, содержит инвариантное подмножество $\Omega^k_U(\mu)$, гомеоморфное надстройке над схемой Бернулли из $k + \bar k$ символов, причем $\Omega_U(\mu)$ гомеоморфно $\Omega^k_U(\mu)$ при $\mu \in [\mu'_{k+1+\bar k},\ \mu_{k+\bar k}]$.

Однако теорема 2 не дает ответа на вопрос о достижимости или недостижимости X_0 в U со стороны B^+. Для этого требуется знание глобального поведения $W^u_{\mathcal{L}_0}$. Ниже мы увидим, что здесь возможны оба случая.

Предположим, что системы $X(\mu)$ обладают глобальной секущей и, следовательно, рассматриваемая задача сводится к изучению диффеоморфизма $T(\mu) : S \to S$. Тогда траектории Γ_0 будет соответствовать некоторая дискретная траектория

$$..., \mathcal{M}_{-1},\ \mathcal{M}_0,\ \mathcal{M}_1,\ \mathcal{M}_2, ...$$

Инвариантная кривая W^u представляет собой образ луча $R^+ = \{\tau,\ 0 \le \tau < +\infty\}$ при отображении $\varkappa : R^+ \to S$.

Пусть $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1 = T\,\mathcal{M}_0$ гомоклинические точки, причем $\mathcal{M}_0 \in W^s_{loc}$. Обозначим прообразы точек $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$ при отображении $\varkappa$ на R^+ соответственно через τ_0, τ_1; тогда образом отрезка $I_0 = [\tau_0, \tau_1]$ при отображении $\varkappa$ будет кусок $\varkappa(\bar I_0)$ инвариантной кривой W^u между точками $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}_1$. Может оказаться, что $\varkappa(\bar I_0)$, помимо $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$ пересекает W^s_{loc} еще в

[1] Случай, когда $W^s_{\mathcal{L}_0} \cap W^u_{\mathcal{L}_0} = \mathcal{L}_0$ рассматривался в ([7,8])

нескольких точках, которые обозначим соответственно $\mathcal{M}_0^i$, $i = 1, 2, ..., \nu$. Будем предполагать, что все $\mathcal{M}_0^i$ являются точками трансверсального пересечения многообразий W^u и W^s, обозначим их прообразы при отображении $\varkappa$ через τ_0^i. Гомоклинические точки $\mathcal{M}_0^p$, $\mathcal{M}_0^{p+1}$ будем называть соседними, если $\varkappa(I_0^p) \cap W_{loc}^s = \emptyset$, где $I_0^p = (\tau_0^p, \tau_0^{p+1}) \subset I_0$. В случае, когда $\varkappa(I_0)$ пересекает W_{loc}^s только в двух точках $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$, эти точки будут соседними гомоклиническими точками. В зависимости от поведения куска $\varkappa(I_0)$ многообразия W^u логически возможны следующие случаи:

I. Найдутся две соседние гомоклинические точки $\mathcal{M}_0^p$, и $\mathcal{M}_0^{p+1}$ такие, что кусок $\varkappa(I_0^p)$ многообразия W^u целиком принадлежит узловой области седло-узла, т. е. $T^k(0)\ \varkappa(I_0^p) \to 0$ при $k \to \infty$.

II. Какие бы соседние точки $\mathcal{M}_0^i$, и $\mathcal{M}_0^{i+1}$ мы ни брали, кусок $\varkappa(I_0^p)$ многообразия W^u целиком не лежит в узловой области седло-узла.

Предположим, что у диффеоморфизма T_0 есть еще грубая седловая точка O_1 $(T(0)\ O_1 = O_1)$ типа $(n, 1)$, т.е. такая точка, у которой устойчивое инвариантное многообразие W_1^s имеет размерность n, а неустойчивое $\mathfrak{N}^u = W_1^u \cup O_1 \cup W_2^u$ является инвариантной кривой. Каждая кривая W_i^u, $i = 1, 2$, является образом луча R^+ при отображении $V_i :\ R^+ \to S$. Обозначим через ∂W_1^u множество предельных точек последовательностей $\{\nu_1(\tau_k)\}$, где $\tau_k \to \infty$ при $k \to \infty$. Будем предполагать, что $\partial W_1^u = 0$, а $\bar{W}_1^u = W_1^u\ \cap \partial W_1^u$ является гладким подмногообразием S. Не уменьшая общности, можно считать также, что O, O_1 и W_1^u лежат в одной локальной карте, тогда в некоторой трубчатой V_1 - окрестности кривой $\bar{W}_1^u$ можно ввести координаты $\{(\xi, \eta),\ \|\xi\| < \rho,\ |\eta| < 1 + \rho\}$, в которых W_1^u имеет уравнение $\xi = 0$.

Пусть W^u, кроме W^s, пересекается также с многообразием W_1^s по некоторой гетероклинической траектории Γ_1. Тогда опять рассматриваем на куске $\varkappa(I_0)$ многообразия W^u гетероклинические точки $N_0^i \in \Gamma_1$, прообразом которых при отображении $\varkappa$ будут $\gamma_0^i \in I_0$. Аналогично понятию соседних гомоклинических точек вводится понятие соседних по τ гетероклинических точек $\mathcal{N}_0^p$ и $\mathcal{N}_0^{p+1}$. Тогда естественно в случае II рассмотреть следующую ситуацию:

II. A. Найдутся две соседние гетероклинические точки $\mathcal{N}_0^i$ и $\mathcal{N}_0^{i+1}$ такие, что $T^k(0)\ \varkappa(J_i) \to 0$ при $k \to \infty$, где $J_i = (\gamma_0^i,\ \gamma_0^{i+1}) \subset \bar{I}_0$. Бифуркационную пленку, соответствующую негрубым системам, рассмотренным выше в случаях I и II. A, обозначим B_1^1.

Теорема 3 *Бифуркационная пленка B_1^1 недостижима из B^+ в окрестности U. При $\mu \to 0$ происходит бесконечное множество бифуркаций, связанных с возникновением "подков" Смейла.*

В дальнейшем будем рассматривать только те $T(\mu)$, которые не удовлетворяют условиям I и II.A. Тогда на куске $\varkappa(I_0)$ каждой гомоклинической точке найдется соседняя по τ гетероклиническая точка и, наоборот, т.е. их можно рассматривать как "пары" $(\mathcal{M}_0^p, \mathcal{N}_0^p)$ соседних точек. "Пара" $(\mathcal{M}_0^p, \mathcal{N}_0^p)$ вырезает из многообразия W^u кусок $\varkappa(\chi_p)$, где $\chi_p = (\tau_0^p, \gamma_0^p) \subset \bar{I}_0$. Поскольку $T^k(0)\,\mathcal{M}_0^p \to O$, а $T^k(0)\,\mathcal{N}_0^p \to O_1$, при $k \to \infty$, то топологический предел $\lim\limits_{k\to\infty} T^k(0)\ \varkappa(\chi_p) = W_1^u$ для всех p. Однако $\varkappa(\chi_p)$ может стремиться к W_1^u как гладко, так и негладко. Рассмотрим отдельно каждый из этих случаев.

II. B. Кусок $\varkappa(\chi_p)$ многообразия W^u в координатах (ξ, η) не записывается в виде $\xi = h(\eta)$ и существует $\eta = \eta_0$, такое, что $\varkappa(\chi_p)$ имеет с диском $D_{\eta_0} : \{\eta = \eta_0, \|\xi\| < \rho\}$ не менее двух общих точек. Аналогично ([7]) будем говорить, что $\varkappa(\chi_p)$ образует "петлю" и стремится к W_1^u негладко. Соответствующее бифуркационное множество обозначим B_2^1.

Теорема 4 *Бифуркационное множество B_2^1 недостижимо из B^+. Существует последовательность $\{\mu_i\}$, $\mu_i > 0$, такая, что системы $X(\mu_i)$ имеют негрубые гомоклини-*

ческие кривые Γ^i.

II. C. Кусок $\varkappa(\chi_p)$ при любых $|\eta_0| < 1$ имеет с диском D_{η_0} только одну общую точку и в координатах $(\xi,\, \eta)$ имеет уравнение $\xi = h(\eta)$, где h - гладкая функция

$$\lim_{r\to\infty} T^k(0)\ h(\eta) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{r\to\infty} d_\eta T^k(0)\ h(\eta) = 0.$$

В этом случае будем говорить, что $\varkappa(\chi_p)$ стремится к W_1^u гладким образом.

Пограничный между II.B и II.C случай не рассматриваем, так как он не является общим в том смысле, что при малых C^2-возмущениях, сохраняющих седло-узел, мы получим либо II.B, либо II.C.

Рассмотрим на куске $\varkappa(\bar{I}_0)$ все "пары" $(\mathcal{M}_0^i,\, \mathcal{N}_0^i)$, $i = 1, 2, ..., \nu$, соседних точек и вырезанные этими "парами" из многообразия W^u куски $\varkappa(\chi_i)$. Пусть $\varkappa_k(\chi_i) = T^k(0)\,\varkappa(\chi_i)$ и число $k_0 < 0$ таково, что $\varkappa_{k_0}(\chi_i) \subset W^u_{loc}$ Рассмотрим также окрестности $\Pi_0^i(\varkappa(\chi_i))$ и $\Pi_1^i(\varkappa_{k_0}(\chi_i))$ соответственно для, кусков $\Pi_0^i(\varkappa(\chi_i))$ и $\Pi_0^i(\varkappa_{k_0}(\chi_i))$. Очевидно, Π_0^i и Π_1^i можно выбрать так, что при всех $0 < \mu \le \bar{\mu}$ определен диффеоморфизм $T^{k_0}(\mu) : \Pi_0^i \to \Pi_1^i$ который в переменных (ξ, η) можно записать в виде

$$\bar{\xi} = F^i(\xi, \eta, \mu), \quad \bar{\eta} = G^i(\xi, \eta, \mu).$$

Кроме того, диффеоморфизм $T(\mu)$ в окрестности V_1 записывается в виде

$$\bar{\xi} = f(\xi, \eta, \mu)\,\xi, \ \ \bar{\eta} = \bar{g}(\eta, \mu) + \bar{g}_1(\xi, \eta, \mu)\,\xi, \tag{2}$$

где $\bar{f},\, \bar{g} \in C^r,\ \bar{g}_1 \in C^{r-1},\ \bar{g}(0,0) = 0,\ g(0,-1) = -1$ и в окрестности $V_1 \cap V$ (2) совпадает с (1). Пусть в некоторой достаточно малой $V_1(\rho)$-окрестности кривой W_1^u диффеоморфизм $T(\mu)$ удовлетворяет условиям:

1)$\|\bar{f}\| \le \lambda < 1,\ \ \|\bar{f}\|\ \|\bar{g}_\eta^{-1}\| \le \beta < 1$;

2)$\|\bar{f}_\xi\| + \|\bar{f}_\eta\| + \|\bar{g}_\xi\| + \|\bar{g}_\eta\| + \|\bar{g}_{\eta\eta}\| < C_1$;

3)$\|\bar{g}_1\| + \|\bar{g}_{1\xi}\| + \|\bar{g}_{1\eta}\| < C(\rho, \mu)$,

где $C(\rho, \mu) \to 0$ при $\rho,\ \mu \to 0,\ C_1$ - положительная константа.

Пусть отображение $T^{k_0}(\mu) : \Pi_0^i \to \Pi_1^i$ удовлетворяет условиям:

4) $\|F_\xi^i\| \ne 0$,

5) $\|G_\eta^i\| + \|G_\xi^i\|/\|F_\xi^i\| \ne q < 1$.

Тогда справедлива

Т е о р е м а 5 *Существует такая окрестность U_1 множества*

$$\bar{W}_1^u \cup \left\{ \bigcup_{i=1}^{\nu} \left[\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \varkappa_k(\chi_i) \right] \right\}$$

и число $\mu^* > 0$, что для всех $\mu \in (0, \mu^*]$ множества $\Omega_{U_1}(\mu)$ траекторий $T(\mu)$, целиком лежащих в окрестности U_1, топологически сопряжены.

Замечание. Из теорем 1 и 5 следует, что бифуркационная пленка B_3^1 достижима в U_1. В случае нульмерных нетривиальных предельных множеств нетрудно указать примеры, когда имеет место достижимость B^1 в более широкой, нежели U_1, области. Соответствующие бифуркации топологических марковских цепей (т.м.ц.) будут выражаться в некоторой элементарной перестройке графа т.м.ц. Возможны случаи, когда при исчезновении седло-узла достижимым образом возникает новое базисное множество, причем большей размерности.

Так, это может быть в случае диффеоморфизма на двумерном торе, полученного из Y-диффеоморфизма при помощи “хирургической операции” ([9,10]), когда неподвижная точка типа “седло”, принадлежащая “соленоиду”, сольется с неподвижной точкой типа “узел”.

В заключение авторы приносят благодарность В. М. Алексееву за полезные замечания.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
6 VI 1978

ЛИТЕРАТУРА

([1]) S. Smale, Differential and Combinatorial Topology, N. Y., 1965, p. 63. Сб. пер. Математика, т. 11, № 4, 107 (1967). ([2]) Л.П. Шильников, Матем. сб., т. 74 (116), 378 (1967). ([3]) Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников, там же, т. 88,(130), № 4, 475 (1972). ([4]) Н.К. Гаврилов, Л.П. Шильников, там же, т. 90 (132), № 1, 139 (1973). ([5]) Н.К. Гаврилов, ДАН, т. 212, № 2, 276 (1973). ([6]) S. Newhouse, J. Palis, Dynamical Systems, N. Y., 1973, p. 303. ([7]) В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, ДАН, т. 219, № 6, 1281 (1974). ([8]) Л.П. Шильников, ДАН, т. 224, № 5, 1046 (1975). ([9]) R. Williams, Global Analysis, Proc. Symp. Pure Math., v. 14, № 1, 329 (1970). ([10]) С. Смейл, УМН, т. 25, № 1 (151), 113 (1970).

В.С. АФРАЙМОВИЧ, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

ИНВАРИАНТНЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ТОРЫ, ИХ РАЗРУШЕНИЕ И СТОХАСТИЧНОСТЬ

★Статья из сб."Методы качественной теории дифференциальных уравнений", Изд-во ГГУ, Горький, 1983, с. 3-26. [Engl. transl.: Afraimovich V.S., Shilnikov L.P., Invariant tori, their breakdown and stochasticity, *Amer. Math. Soc. Transl.*, 1991, vol. 149, pp. 201–211.]

1. При рассмотрении ряда нелинейных задач гидродинамики, радиофизики, биофизики и т.д., допускающих описание с помощью конечномерных динамических систем, часто встречается ситуация, когда в фазовом пространстве соответствующей динамической системы существует инвариантная область V , гомеоморфная прямому произведению двумерного тора на отрезок или диск. Такими являются, например, известные задачи о воздействии внешней периодической силы на автоколебательную систему и о взаимодействии автоколебательных систем. Простейшим притягивающим множеством области V является двумерный тор. Если движение на экспоненциально устойчивом торе двухчастотное квазипериодическое, то тор как гладкое инвариантное притягивающее многообразие сохраняется и для всех достаточно близких систем. Однако структура его разбиения на траектория изменяется в зависимости от числа вращения Пуанкаре: если оно иррационально, то предельным множеством будет весь тор, если рационально, то в общем случае – нет. А.Г.Майер доказал, что грубая структура на торе имеет место лишь в том случае, когда число вращения рационально (равно p/q) и все периодические движения грубые. В подобных ситуациях говорят, что имеет место резонансный случай (отношение базовых частот ω_1/ω_2 равно p/q). И здесь следует отметить, что хотя с математической точки зрения резонансному случаю должен соответствовать периодический режим, тем не менее в реальной колебательной системе осуществляются периодические режимы далеко не со всеми числами вращения – внутренняя синхронизация имеет место не для всех p/q. Резонансный случай, отвечающий внутренней синхронизации, будем называть сильным резонансом. Отметим, что резонанс в квазилинейной системе – это и есть сильный резонанс (как правило, для квазилинейных систем p и q небольшие,[1] и периодических движений на торе два). Сильные резонансы играют важную роль, поскольку при переходе от квазипериодического двухчастотного режима автоколебательной системы к стохастическому последнему во многих случаях предшествует режим внутренней синхронизации с сильным резонансом. Именно такое явление имеет место в задачах о течении Куэтта или конвекции Релея-Бенара, экспериментально исследованных в $[1-6]$ при возрастании числа Рейнольдса или Релея соответственно.

Наличию сложного непериодического режима отвечает разрушение инвариантного тора и возникновение в области V фазового пространства автоколебательной системы нетривиального притягивающего множества. Заметим, что возможность существования нетривиального гиперболическою подмножества у притягивающего множества области V была установлена авторами ранее $[7-9]$ [2].

Таким образом, возникает задача изучения способов разрушения инвариантных двумерных притягивающих торов (с грубой структурой на них) и возникновения нетривиальных

[1] Для сильно нелинейных систем это не так, например, в [1] обнаружен сильный резонанс с $p/q = 7/3$. Еще раньше Ван-дер-Поль при изучении работы генератора с периодической внешней силой наблюдал режимы синхронизации с $p/q \gtrsim 200$.

[2] Отметим, что в неявном виде этот факт содержался в известных работах Картрайт, Литлвуда и Левинсона.

предельных множеств при изменении параметров системы. Ее рассмотрению и посвящена настоящая работа.

2. Будем рассматривать n-мерную, $n \geq 3$, систему

$$\dot{x} = X(x, \mu), \tag{1}$$

где правые части принадлежат классу C^k по переменным x и непрерывно зависят от векторного параметра μ в C^k-топологии, $k \geq 3$. Предположим, что при $\mu = \mu_0$ система (1) в некоторой области V фазового пространства имеет гладкий притягивающий тор $T(\mu_0)$, на котором она является грубой, и предельное множество состоит из двух периодических движений: устойчивого $L^+(\mu_0)$ и седлового $L^-(\mu_0)$, неустойчивое многообразие $W^u(\mu_0)$ которого двумерно, т.е. $T(\mu_0) = W^u(\mu_0) \cup L^+(\mu_0)$. Нетрудно показать, что если наименьший по модулю мультипликатор $L^+(\mu_0)$ действителен и однократен, то система (1) имеет гладкий инвариантный тор при всех $|\mu - \mu_0|$ достаточно малых.

Обозначим через G_0 такое (открытое) множество в пространстве параметров, что при всех $\mu \in G_0$ периодические движения $L^+(\mu_0)$ и $L^-(\mu_0)$, являющиеся непрерывными продолжениями $L^+(\mu)$ и $L^-(\mu)$, грубы, и пусть $\tilde{G} \in G_0$ такое, что при $\mu \in \tilde{G}$ $\overline{W^u(\mu)}$ образует тор $T(\mu)$, а G – множество внутренних точек $\tilde{G}$.

Цель настоящего раздела – установить структуру границы ∂G области G и выделить в ∂G такое множество B, при переходе через которое (из области G) тор разрушается. Для этого введем в рассмотрение множество непрерывных кривых $H = \{\mu(s)\}$, $0 \leq s \leq 1$ в пространстве параметров, таких, что для $\mu(s) \in H$:

1) Система (1) при $\mu = \mu(0)$ имеет гладкий тор $T(\mu(0))$, а при $\mu = \mu(1)$ не имеет в V инвариантного множества, гомеоморфного тору. Следовательно, должно существовать такое значение s^*, что: а) при $0 < s < s^*$ $\mu(s) \in G$; б) $\mu(s^*) \in \partial G$); в) по крайней мере для некоторых сколь угодно близких к s^* значений $s > s^*$ система (1) не имеет непрерывного тора.

2) При всех $0 \leq s < s^*$ притягивающее множество системы (1) в области V совпадает с тором $T(\mu(s))$.

3) $\mathrm{lt}_{s \uparrow s^*} \overline{W^u(\,\mu(s)\,)}$ не содержит периодических движений, отличных от $\mathrm{lt}_{s \uparrow s^*} \left(L^+(\mu(s)) \cup L^-(\mu(s))\right)$. [3]

Разобьем G на два подмножества G_1 и G_2 : при $\mu \in G_1$ $T(\mu)$ – гладкий тор, а при $\mu \in G_2$ $T(\mu)$ гомеоморфен, но не диффеоморфен тору (очевидно, гладкость $T(\mu)$ может нарушаться лишь в точках $L^+(\mu)$). В границу ∂G может входить бифуркационная поверхность B^+, соответствующая негрубому периодическому движению типа седло-узел, образующемуся в результате слияния $L^+(\mu)$ с $L^-(\mu)$ [4]. Как доказано в [9], при выходе из G через точку B^+, не лежащую в замыкании G_2, тор сохраняется и остается гладким, следовательно, должно существовать значение $s < s^*$ такое, что $\mu(s) \in G_2$, т.е. $T(\mu(s))$ – негладкий тор. Вообще, из предположений 1) – 3) несложно вывести, что прежде чем разрушиться, тор $T(\mu)$ должен потерять гладкость. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Для любой кривой $\mu(s) \in H$ существует $s_1 < s^*$ и $\varepsilon > 0$ такие, что при $\mu = \mu(s)$ система

[3] Через lt здесь обозначен топологический предел.

[4] Конечно, в границу ∂G могут входить бифуркационные поверхности, соответствующие появлению на торе других (кроме $L^+(\mu)$ и $L^-(\mu)$) периодических движений. Однако на таких переходах мы здесь не останавливаемся, поскольку их рассмотрение принципиально нового не вносит.

(1) имеет притягивающий (в V) тор $T(\mu(s))$, гладкий при $0 \le s < s_1$ и негладкий при $s_1 < s < s_1 + \varepsilon$. При $s = s_1$ в общем случае [5] либо наименьший по модулю мультипликатор $\chi(L^+)$ периодического движения имеет кратность 2 и при $s > s_1$ становится комплексным, либо $\chi(L^+)$ имеет кратность I, а гладкость тора нарушается за счет негладкого подхода $W^u(\mu(s))$ к $L^+(\mu(s))$ при $s > s_1$ (на $W^u(\mu(s))$ появляются точки 2-го типа – см. определение ниже).

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 1 (о разрушении тора). *Пусть выполнены предположения* 1) – 3). *Тогда для* $\mu(s) \in H$ *при* $s = s^*$ *либо* (I) $\mu(s^*) \in B^+$, *а* $\mu(s) \in G_2$ *при* $s_1 \le \tilde{s} < s < s^*$; *либо* (II) *появляется негрубая гомоклиническая кривая у периодического движения* L^-, *причем бифуркационная поверхность достижима*[6] *(по терминологии* [10]*); либо* (III) L^+ *теряет устойчивость (см. рис.* 1*).*

Доказательство теоремы 1 легко следует из предположений: если при $s = s^*$ не осуществляется ни одна из возможностей (I) – (III), то несложно показать, что $\overline{W^u(\,\mu(s)\,)}$ – тор вплоть до $s = 1$, а это противоречит условию 1).

3. В настоящем разделе будем рассматривать инвариантные множества, возникающие в результате разрушения инвариантного тора, и их эволюцию при дальнейшем изменении параметров.

Остановимся сначала на случае (I). При $s = s^*$ система (1) имеет периодическое движение L_0 типа седло-узел, а тор образован замыканием его неустойчивого многообразия W_0^u . [7] Пусть S – некоторая секущая к L_0. Как следует из [9], на S можно ввести такую систему координат $\{(y, z)\}$, что:

1) $O = L_0 \bigcap S = (0, 0)$; 2) отображение последования $\tau : U \to S$, где U – некоторая окрестность нуля, записывается в виде

$$\begin{cases} \bar{y} = A(\mu)y + f(y, z, \mu)y, \\ \bar{z} = z + R(z, \mu), \end{cases} \tag{2}$$

где собственные значения матрицы $A\,(\,\mu(s^*)\,)$ меньше единицы по модулю, $\|y\| < \varepsilon$ и $R(z, 0) = lz^2 + ...,\ l > 0$.

Пусть $w = W_0 \bigcap S$. Из [9] следует, что точки на w бывают 1-го или 2-го типа, если

$$\lim_{k\to\infty}\ \inf\ \frac{|\text{пр}_z\ d\tau^k\ \xi|}{\|d\tau^k\ \xi\|} = 1 \quad (\text{или} = 0),$$

где ξ – касательный вектор к w в точке $P \in U$, через пр_z обозначена проекция на ось z , а $\tau_k P \in U$. Для достаточно малого $d > 0$ рассмотрим “прямоугольник”

$$D_d = \{\,(y, z)\ |\ \|y\| < \varepsilon,\ -d \le z \le -d + R(-d, 0)\}$$

[5]Для открытого всюду плотного в H подмножества кривых (если рассматривать H как подмножество пространства непрерывных отображений отрезка в пространстве параметров).

[6]Предположение о несуществовании бифуркаций при $s < s^*$ в случае (II) налагает ограничения на седловую величину $L^-(\mu(s))$, которые для трехмерной системы (1) при div $X < 0$ выполняются автоматически; если седловая величина $L^-(\mu)$ больше единицы, то при изменении s будут возникать предельные движения независимо от разрушений тора [10].

[7]Неустойчивое многообразие L_0 – это множество точек траекторий, стремящихся к L_0 при $t \to -\infty$.

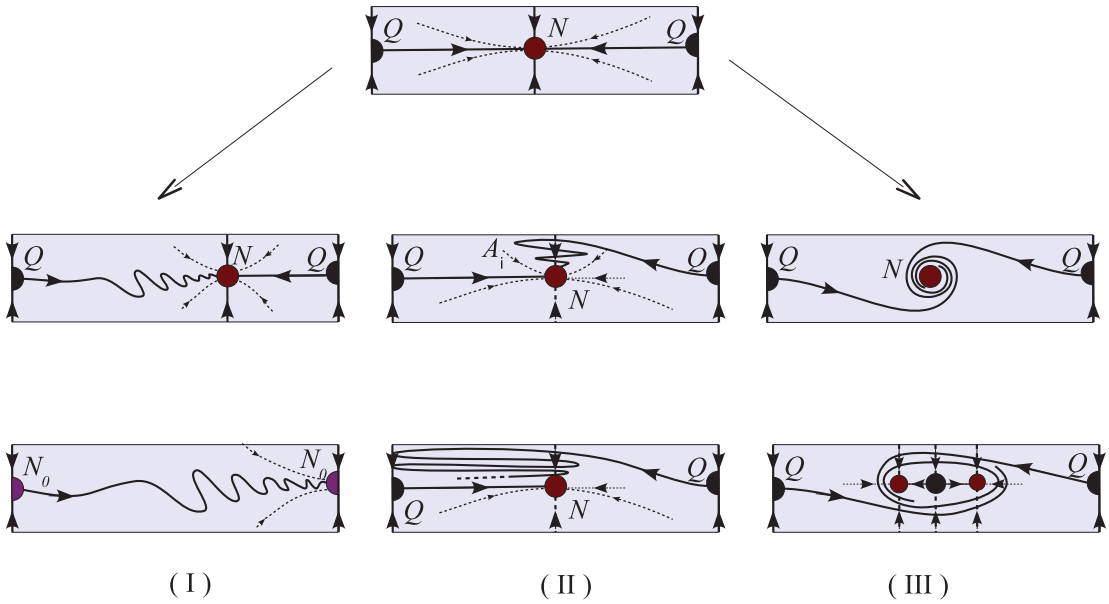


Рис. 1

в U. Можно показать, что любая траектория из W_0 пересекается с D_d, т.е. $w^u \cap D_d \neq \emptyset$. Сформулируем условия “большой петли” для удобства несколько иначе, чем в [9].

Предположим, что для любого достаточно малого фиксированного $d > 0$ $w \cap D_d$ содержит две кривые Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 2), уравнения которых записываются в виде $y = h_1(z)$, $y = h_2(z)$ соответственно, и точки из $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ являются точками 1-го типа. Пусть $O \in U_1 \subset U$, $U_1^+ = \{(y,z) \in U_1,\ z = 0\}$. Через каждую точку Γ_j проходит траектория, пересекающая U_1^+. Диффеоморфизм, ставящий в соответствие точке из Γ_j первую точку пересечения траектории, проходящей через нее, с U_1^+, обозначим через τ_j, $j = 1, 2$. Пусть $\tau_j \Gamma_j = \gamma_j$ $(\in w)$. Положим

$$q_j = \min_{P \in \gamma_j} \frac{|\text{пр}_z\ d\tau_j^{-1}\, \xi(P)|}{\|\xi(P)\|},$$

где $\xi(P)$ – касательный вектор к γ_j в точке P. Имеет место следующая теорема, усиливающая ранний результат работы авторов [9].

Теорема 2. *При выполнении условий большой петли для всех близких к $\mu(s^*)$ значений μ, для которых L_0 исчезает, система* (1) *имеет предельное множество, содержащее счетное множество периодических траекторий. При этом если $q_j > 1$, $j = 1, 2$, то это предельное множество содержит нетривиальное гиперболическое подмножество.*

Приведем следующее определение [11, 12]. Притягивающее множество, содержащее нетривиальное гиперболическое подмножество, называется ε-квазиаттрактором, если оно не содержит устойчивых периодических движений периода, меньшего ε^{-1}. Если ε достаточно мало, ε-квазиаттрактор может служить математическим образом стохастических колебаний. Из теоремы 2 вытекает

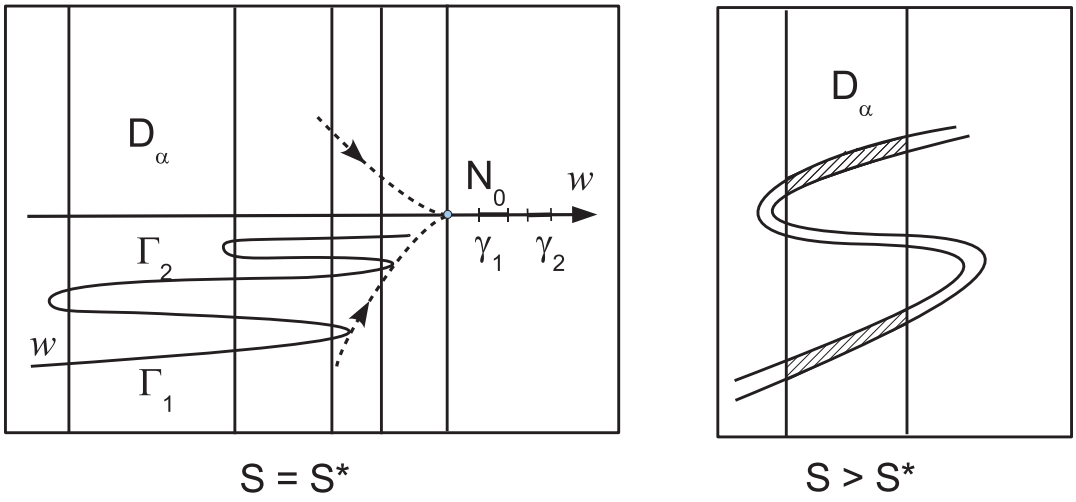


Рис. 2

С л е д с т в и е. При выполнении условий теоремы 2 при $s^* < s < s^* + \varepsilon_0$ система (1) в области V имеет ε-квазиаттрактор с $\varepsilon = \mathrm{const}\ |\mu(s) - \mu(s^*)|^{1/2}$.

Доказательство теоремы 2 (и следствия из нее) проводится так же, как в работах [9, 13].

Если условия большой петли не выполнены, а тор при $s = s^*$ негладкий, то вопрос о возникновении нетривиальных предельных множеств при $s > s^*$ остается открытым. Достаточные условия существования последовательности $\{s_i\}$, $s_i \downarrow s^*$ при $i \to \infty$ такой, что при $\mu = \mu(s_i)$ система (1) имеет нетривиальное предельное множество, указаны в [9] (условия "малой петли").[8]

Перейдем теперь к случаю (II). При $s > s^*$ возникают две грубые гомоклинические кривые у периодического движения $L^-(\mu(s))$, следовательно – нетривиальное гиперболическое множество, однако изображающая точка остается в окрестности $L^+(\mu(s))$: система остается "на периодическом режиме". Возникшее гиперболическое множество может принадлежать предельному множеству траекторий, которое, вообще говоря, не гиперболично – в частности, может содержать негрубые гомоклинические кривые, счетное множество устойчивых периодических траекторий и т.д. При возрастании s вслед за бифуркацией возникновения негрубой гомоклинической траектории может осуществиться бифуркация исчезновения периодического движения L_0, т.е. исчезает периодическое движение типа седло-узел, имеющее грубую гомоклиническую траекторию. Эта ситуация была подробно исследована в [14] откуда, в частности, следует возможность возникновения квазиаттрактора при исчезновении L_0 и в этом случае.

В случае (III) L^+ может терять устойчивость в результате следующих бифуркаций

[8]См. также работу <Тураев Д.В., Шильников Л.П. "Бифуркации квазиаттракторов тор-хаос".// в кн. Математические Механизмы Турбулентности, Киев, 1986>, *прим. ред.*

а)–д) (см., например, [15, 20]). При этом предполагается, что в момент бифуркации периодическое движение устойчиво.

а) Бифуркация "удвоения периода": $\chi(L^+) = -1$.

б) Рождение тора : $\chi(L^+) = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0,\ \pi,\ 2\pi/3,\ \pi/2$.

в) Бифуркация "утроения периода": $\chi(L^+) = e^{2\pi i/3}$.

г) Бифуркация "учетверения периода": $\chi(L^+) = e^{\pi i/2}$.

д) Наличие кратного единичного (по модулю) мультипликатора и т.д.

Последние четыре бифуркации не могут осуществляться в системе с отрицательной дивергенцией при $n = 3$, их наличие косвенно указывает на то, что модель, описывающая реальную физическую систему с диссипацией, должна быть, как минимум, четырехмерной.

Рождающееся в результате одной из бифуркаций а), в), г) периодическое движение может вновь менять свою устойчивость, претерпевая одну из бифуркаций а)–д) и т.д. В частности, в результате бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода могут возникнуть нетривиальное предельное множество и квазиаттрактор (см., например, [16]).

4. В настоящем разделе изложим результаты аналитического исследования конкретного отображения

$$\begin{cases} \bar{x} = (x + b\mu(1 + a\sin\theta))^\nu, \\ \bar{\theta} = \theta - \ln(x + b\mu(1 + a\sin\theta)), \end{cases} \tag{3}$$

где $0 < x \leq x_0,\ \theta \in \mathbb{R}^1,\ \nu > 1,\ 0 < \mu \leq \mu_0,\ 0 < b < 1,\ 0 \leq a < 1$.

Это отображение моделирует задачу о воздействии внешней периодической силы на автоколебательную систему в предположении, что предельный цикл проходит вблизи седла (подробнее см. [7, 8]). Несмотря на частный вид отображения (3), оно моделирует все основные черты разрушения торов в трехмерных системах с отрицательной дивергенцией в окрестности тора. Отображение (3) является суперпозицией двух отображений: локального – по траекториям, проходящим в окрестности седла с учетом только линейной части (при подходящем выборе переменных (x, y) оно может быть записано в виде $x = y^\nu$, $\bar{\theta} = \theta - \ln y$), и глобального – по траекториям вблизи "глобального куска" устойчивого периодического движения; в простейшем случае оно имеет вид $y = x + b\mu + A\mu\sin\theta$, $\theta_0 = \theta + const$. Функция $\mu b(1 + a\sin\theta)$, где $a = A/b$ есть функция Мельникова. Инвариантная кривая $x = x_*$, где x_* – решение уравнения $x = (x + b\mu)^\nu$, соответствует предельному циклу системы при отсутствии периодического возмущения, т.е. при $a = 0$.

Нетрудно показать, что существуют такие положительные $b_0,\ x_0$, что при всех $0 < b < b_0$ отображение (3) есть диффеоморфизм на образ кольца $\mathcal{K} : 0 < x \leq x_0,\quad \theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ в себя. При этом все положительные полутраектории отображения (3) попадают в кольцо $0 < x \leq (2b\mu)^\nu \left(\dfrac{\nu}{\nu - 1}\right)^\nu$, в котором и содержится все неблуждающее множество. Отображение (3) вполне подходит для наших целей в силу того, что при одних значениях параметров оно имеет замкнутую инвариантную кривую, а при других – нет. Для установления существования инвариантной кривой воспользуемся принципом сжатых отображений в форме, указанной в [17]. Применяя его к отображению (3) и учитывая, что его определитель при малых b меньше единицы по модулю, получаем следующее утверждение: существуют такие $b_1 > 0,\ c_1 > 0\ b_1 \leq b_0$, что отображение (3) при значениях параметров из области $D_1 :\ 0 < b \leq b_1,\quad a < 1/\sqrt{2} - c_1(G_\mu)^{\frac{\nu-1}{2}}$ имеет в кольце $\mathcal{K}$ единственным притягивающим множеством замкнутую инвариантную кривую $x = h(\theta),\ h -\ 2\pi$-периодична и удо-

влетворяет условию Липшица. С другой стороны, существуют такие значения параметров, при которых отображение (3) имеет нетривиальное гиперболическое множество. Для установления этого воспользуемся достаточными условиями существования такого множества, сформулированными нами в виде "принципа кольца" [7,8]. Применяя указанный принцип к отображению (3), получаем следующее утверждение: существуют такие $0 < b_2 < b_1$ и $c_1, c_2 > 0$, что при всех $0 < b \le b_2$ и $\operatorname{th} 2\pi + c_1(b\mu)^\nu < a < 1 - c_2(b\mu)^{\nu-1}$ отображение (3) имеет в кольце $\mathcal{K}$ инвариантное множество, на котором оно сопряжено с топологической схемой Бернулли из двух символов. При этих значениях параметров отображение (3), естественно, уже не может иметь замкнутой инвариантной кривой.

Чтобы выяснить, как инвариантная кривая перестаёт быть гомеоморфным образом окружности, необходимо знать бифуркации неподвижных точек. На рис 3 изображена бифуркационная диаграмма отображения (3) [9]. Уравнения $B^+_{1k},\ B^+_{2k}$:

$$-\ln b\mu = \ln\,(1+a) - \ln\,(e^{-2\pi k} - e^{-2\pi k\nu}),$$
$$-\ln b\mu = \ln\,(1-a) - \ln\,(e^{-2\pi k} - e^{-2\pi k\nu})$$

соответственно.

При значении параметров на B^+_{2k} в точке кольца $x = e^{-2\pi k\nu},\ \theta = -\pi/2$ возникает неподвижная точка отображения (3), которая при уменьшении b распадается на седло Q_k и узел N_k . При фиксированном a и уменьшении b седло движется по часовой стрелке, а узел – против часовой стрелки. При $(\mu b,\ a) \in B^+_{1k}$ он сливается с седлом, образуя седло-узел в точке $x = e^{-2\pi k\nu},\ \theta = \pi/2$, исчезающий при дальнейшем уменьшении b. Из вида кривых $B^+_{1k},\ B^+_{2k}$ непосредственно следует, что при $a \uparrow 1$ число неподвижных точек отображения (3) неограниченно растет. В процессе уменьшения b с седлом Q_k никаких бифуркаций не происходит. Узел же N_k может терять устойчивость через бифуркацию удвоения периода. Соответствующая бифуркационная кривая B^-_k имеет уравнение

$$a^2 = \frac{4}{(b\mu)^2}\left(e^{-2\pi k} + \nu e^{-2\pi k\nu}\right)^2 + \frac{1}{(b\mu)^2}\left(e^{-2\pi k} - e^{-2\pi k\nu} - b\mu\right)^2$$

и лежит в "секторе", образованном кривыми $B^+_{1k},\ B^+_{2k}$.

На рис.3 изображены еще две бифуркационные кривые, соответствующие образованию негрубой гомоклинической траектории на каждой из двух компонент связности $w^u \setminus Q_k$, где w^u – неустойчивое многообразие Q_k. Их уравнения имеют вид

$$B^n_{1k}:\ -\ln b\mu \;=\; 2\pi k \;+\; \ln\frac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2} \;-\; \frac{5\pi}{4} \;-\; \arcsin\frac{1}{a\sqrt{2}} \;-$$

$$-\;\arcsin\frac{e^{-2\pi k} - e^{-2\pi k\nu} - b\mu}{ab\mu} \;+\; \alpha(b);$$

$$B^n_{2k}:\ -\ln b\mu \;=\; 2\pi k \;+\; \ln\frac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2} \;-\; \frac{7\pi}{4} \;-\; \arcsin\frac{1}{a\sqrt{2}} \;-$$

$$-\;\arcsin\frac{e^{-2\pi k} - e^{-2\pi k\nu} - b\mu}{ab\mu} + \beta(b),$$

[9] Удобно иллюстрировать наши утверждения на плоскости $(-\ln b\mu; a)$

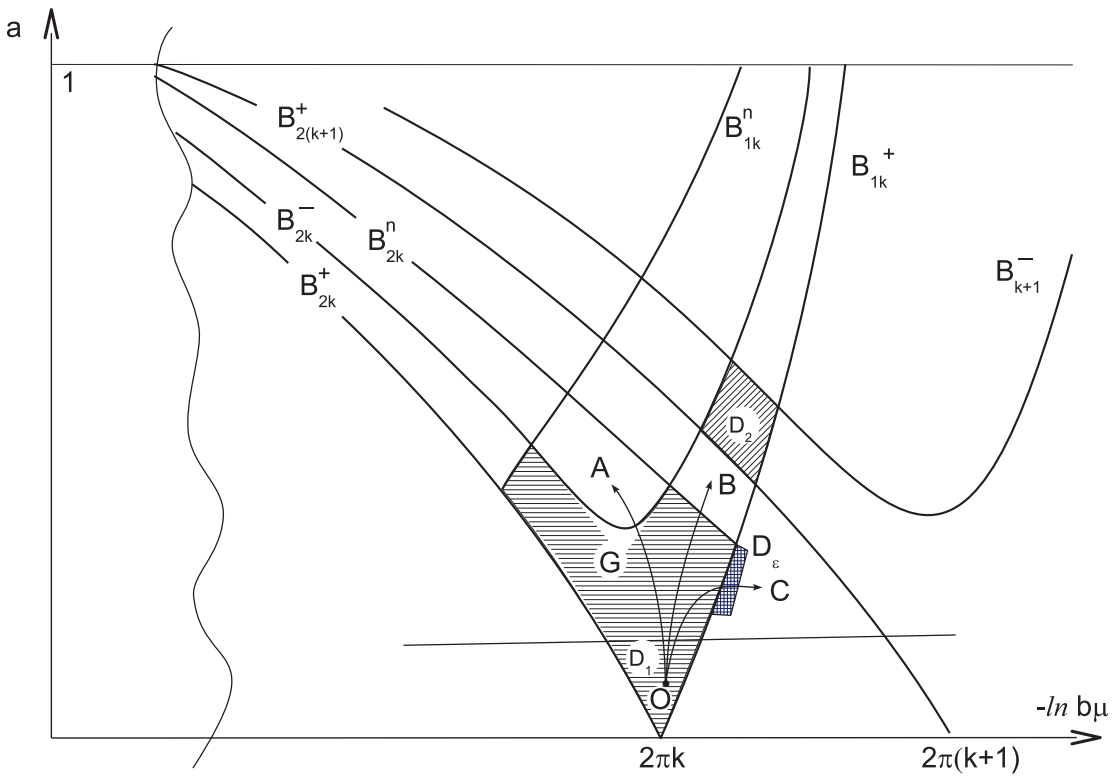


Рис. 3

где $\alpha,\ \beta \to 0$ при $b \to 0$.

Перечисленные кривые разделяют "сектор", ограниченный кривыми B^+_{1k}, B^+_{2k}, $a = 1$ на области. Примыкающую к $a = 0$ пятиугольную область, в границу которой входят все пять бифуркационных кривых, обозначим через G. Инвариантная кривая может разрушиться лишь при выходе из области G. Зафиксируем произвольную, достаточно близкую к оси абсцисс точку O в G и три пути с началом в этой точке A, B и C, пересекающие кривые B^-_k, B^n_{2k}, B^+_{1k} соответственно (см. рис.3).

С л у ч а й А. При изменении параметров вдоль пути A наступает момент, когда мультипликаторы узла N_k становятся равными, а затем комплексными. Замкнутая инвариантная кривая, состоящая из неустойчивого многообразия w^u точки Q_k и точки N_k, в этот момент становится негладкой, однако длина ее конечна, и она остается топологической окружностью. Но при пересечении путем A бифуркационной кривой B^n_k длина $\overline{w^u}$ становится уже бесконечной (см. рис.1).

С л у ч а й Б. На рисунке 3 изображен путь B, который пересекает кривую B^n_{2k}. Замкнутая инвариантная кривая заведомо становится негладкой в тот момент, когда w^u пересекает неведущее многообразие узла N_k. В момент пересечения путем B кривой B^n_{2k} неустойчивое многообразие седла Q_k касается его устойчивого многообразия по негрубой гомоклинической траектории, причем реализуется достижимый случай. Очевидно, в этот момент $\overline{w^u}$ уже не гомеоморфно S^1 .

С л у ч а й В. Как уже упоминалось, если путь C пересекает B^+_{1k} в точке, лежащей в $\bar{D}_1$, то инвариантная кривая не только не исчезает, но остается удовлетворяющей условию

Липшица. Поэтому предположим, что $a > 1/\sqrt{2} + C_2(b\mu)^{\nu-1}$ в точке перехода через B^+_{1k}. При выполнении этого неравенства приходим к случаям "большой" и "малой" петли, описанным выше. Условия "большой петли" и неравенства $q_j > 1$ заведомо выполнены, если точка перехода через B^+_{1k} достаточно близка к $B^+_{1k} \bigcap B^n_{2k}$. Отсюда следует существование нетривиального гиперболического множества в области, примыкающей к B^+_{1k} (вне G) (см. рис. 3). Из того, что период любой периодической точки, возникающей после исчезновения седло-узла, не меньше const $|\mu(b-b_*)|^{-1/2}$, где b_* – значение b в момент бифуркации, вытекает следующее утверждение: на кривой B^+_{1k} существует отрезок J, одной из граничных точек которого является точка $B^n_{2k} \bigcap B^+_{1k}$, такой,что для любого малого $\varepsilon > 0$ существует область D_ε (вне G), примыкающая к J, при значениях параметров из которой отображение (3) имеет квазиаттрактор.

Подводя итог, отметим, что все три возможности разрушения инвариантного тора, сформулированные в теореме I, осуществляются в данном примере. Кроме того, для него несложно проверить условия теоремы 2 [10].

В заключение этого раздела укажем на еще одно свойство отображения (3), имеющее отношение к разрушению инвариантной кривой. Из вида бифуркационных кривых B^+_{1k}, B^-_k и B^n_k непосредственно следует, что на плоскости параметров существует область, ограниченная кривыми B^+_{1k}, B^-_k, и $B^+_{2(k+1)}$, B^-_{k+1} (см. рис. 3), при значениях параметров внутри которой отображение (3) имеет две устойчивые периодические траектории с числами вращения $2\pi k$ и $2\pi(k+1)$ соответственно. А это означает, что исходная система, моделью которой является отображение (3), имеет два устойчивых периодических движения с периодами, отличающимися на период внешней силы. Это явление мы называем эффектом Ван-дер-Поля, поскольку он первый наблюдал его при экспериментальном исследовании воздействия периодической внешней силы на автогенератор.

5. Остановимся на переходах от ламинарного течения к турбулентному, экспериментально исследованных в $[1-4]$. Переход от резонансного периодического течения к нерегулярному – непериодическому – происходит либо сразу [1], либо через каскад бифуркаций удвоения периода [3], либо через бифуркации утроения, учетверения периода [4] и т.д.

На наш взгляд, приведенный в настоящей работе набор бифуркаций достаточен для объяснения на языке качественной теории этих перестроек течения. Исследование $[1-4]$ спектральных характеристик течений дает основание полагать, что переходу к непериодическому течению в [1] соответствует бифуркация исчезновения периодического движения типа седло-узел, сопровождаемая возникновением квазиаттрактора – как говорят, имеет место "перемежаемость", ситуация работ [3, 4] отвечает случаю (III) теоремы 1 с последующим каскадом бифуркаций удвоения периода, осуществляющемся либо сразу, либо после бифуркаций в) и г). В [2] установлено, что при возрастании числа Рейнодьдса периодический режим сменяется стохастическим, затем вновь становится периодическим и лишь впоследствии становится и остается нерегулярным. Можно предположить, что первый переход соответствует случаю (I) теоремы 1; второй переход отвечает возникновению в квазиаттракторе устойчивого периодического движения, в область притяжения которого попадает изображающая точка; третий же переход отвечает бифуркации исчезновения периодического движения типа седло-узел, имеющего гомоклиническую траекторию.

[10] Возможности разрушения инвариантной кривой конкретных отображений плоскости в плоскость численно исследовались в [18, 19].

Уточнение (или опровержение) этих гипотез должны дать дальнейшие экспериментальные и численные исследования указанных задач.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы докладывались на VI Горьковской школе по нелинейным колебаниям (1981), IX Международной конференции по нелинейным колебаниям в Киеве (1981), в школе по нелинейным задачам гидродинамической устойчивости в Колюбакино (1982), и на семинарах в МГУ по синергетике (1982) и эргодической теории и динамическим системам (1982).

Литература

1. Gotlub J.P., Benson S.V. Many routes to turbulent convection. – J. Fluid. Mech., 1980,100, pp. 449 - 470.

2. Львов В.С., Предтеченский А.А. Поэтапный переход к турбулентности в течении Куэтта. – В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький, ИПФ РАН СССР, 1980, с. 57 - 77.

3. Maurer J., Libhaber A. Rayleigh-Benard experiments in liquid helium : frequency locking and the onset of turbulence ; J. Physique Lett. 1979. v.40. pp. 419 - 423.

4. Arneodo A., Coullet P., Tresser C, Libhaber A., Maurer J., d' Humieres D. – About the observation of the uncompleted cascade in a Rayleigh-Benard experiments. Preprint. 1981.

5. Ahlers G., Beringer R.P. The Rayleigh-Benard Instability and the Evolution of Turbulence, – Suppl.of the Progress of Theor. Phys., 1978, v. 64, pp. 186 - 201.

6. Беляев Ю.Н., Яворская И.М. Переход к стохастическому режиму в течении между вращающимися сферами. – В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 78 - 88,

7. Афраймович В.С., Шильников Л.П, О малых периодических возмущениях автономных систем.- ДАН СССР,1974,т.24,№4,с. 739 - 742.

8. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем. – ПММ, 1977, т. 42, № 4, с. 618 - 627.

9. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных о исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. – ДАН СССР, 1974, т. 219, № 6, с. 1281 - 1285.

10. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к системам о негрубой гомоклинической кривой. I, II – Матем. сб., 1973, т. 88 (13), № 8, с. 475 - 492; 1973, Т.90 (132), № I, с. 139 - 156.

11. Afraimovich V.S., Sil'nikov L.P. On strange attractors and quasi-attractors, in Book : Nonlinear dynamics and turbulence, Boston–London–Melbourn, 1983, pp. 1 - 34.

12. Афраймович В.С. Принцип кольца и квазиаттракторы. – Тез. IX Междунар. конф. по нелин. колебаниям, Киев, 1981, с.42.

13. Афраймович В.С. О некоторых глобальных бифуркациях, приводящих к возникновению счетного множества периодических движений. Диссертация. Горький, ГГУ, 1974.

14. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами, – ДАН СССР, 1978, Т. 243, № I, с. 26 - 29.

15. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

16. Hénon M., Pomean J. Two strange attractors with a simple structure. – Lecture Notes in Math. 1975, v.565, pp. 29 - 68.

17. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. – Тр. Моск. матем, об-ва, 1982, т. 44, с. 150 - 212.

18. Gurry J., Yorke J. A transition from Hopf bifurcation to chaos: computer experiments with maps of $\mathbb{R}^2$. – Lecture Notes in Math. - Springer - Verlag, New York, 1978, v. 470. pp. 48 - 66.

l9 Aronson D.G, Chory M.A., Hall G.R. and Mc Gehee R.P. A discrete dynamical system with subtly wild behavior, in Book : New approach to nonlinear problems in dynamics. – SIAM, Philadelphia, 1980.

20. Дж. Марсден, М.Мак-Кракен. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980.

НИИ прикладной математики и
кибернетики при ГГУ

Доклады Академии наук СССР
1982, Том 262, № 4, с. 777-780

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В.С. АФРАЙМОВИЧ, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

О БИФУРКАЦИИ КОРАЗМЕРНОСТИ 1, ПРИВОДЯЩЕЙ К ПОЯВЛЕНИЮ СЧЕТНОГО МНОЖЕСТВА ТОРОВ

(Представлено академиком А.Н.Колмогоровым 25 XII 1979)

Настоящая работа связана с изучением предельных множеств, возникающих при исчезновении негрубого периодического движения L от систем Морса-Смейла. Случай, когда L является результатом слияния устойчивого и седлового периодических движений, рассматривался ранее в работах [1–5]. Здесь будет рассмотрен случай, когда негрубое периодическое движение L возникает в результате слияния двух седловых периодических движений. В общем случае системы с таким негрубым периодическим движением образуют бифуркационное множество B^1 коразмерности 1, поэтому мы будем рассматривать однопараметрическое семейство систем X_μ, пересекающее B^1 в единственной точке X_0. Ясно, что этот случай возможен, если размерность фазового пространства не меньше четырех.

1°. Рассмотрим однопараметрическое семейство C^r-гладких векторных полей X_μ на четырехмерном многообразии M^4, непрерывное по μ в C^r-топологии, $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$, и имеющее при $\mu = 0$ двукратное периодическое движение L типа седло-седло. Это означает, что на некоторой локальной секущей D к L в подходящей локальной карте $U \subset D$, $U \equiv \{(x, y, z)\}, O = (0, 0, 0) = L \cap D_1$ отображение последования $T_\mu : U_1 \to U$ для всех $\mu \in [-\mu_0, \mu_0]$ может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda(\mu)x + f(x, y, z, \mu)x, \\ \bar{y} &= \gamma(\mu)y + g(x, y, z, \mu)y, \\ \bar{z} &= z + R(z, \mu) + H_1(x, y, z, \mu)x + H_2(x, y, z, \mu)y, \end{aligned} \tag{1}$$

где $|\lambda(0)| < 1$, $|\gamma(0)| > 1$; f, g, H_1, H_2, R C^{r-1}-гладки по (x, y, z) и вместе с λ, γ непрерывны по μ; $R(z, 0) = l_2 z^2 + ...$, $l_2 > 0$.

Лемма 1 *При выполнении условия*

$$|\lambda(0) \cdot \gamma(0)| \neq 1 \tag{2}$$

существует окрестность $U_0 \subset U_1$ точки O и число μ_1, $0 < \mu_1 \leq \mu_0$, такие, что для каждого $\mu \in [-\mu_1, \mu_1]$ в U_0 существует T_μ-инвариантное двухпараметрическое семейство кривых, непрерывно зависящее от μ:

1) *если $|\lambda(0) \cdot \gamma(0)| < 1$, то это кривые вида*

$$y = \eta + \varphi(x, \eta, \zeta, \mu)x, \quad z = \zeta + \psi(x, \eta, \zeta, \mu)x,$$

где φ и ψ удовлетворяют условию Липшица по (x, η, ζ) и непрерывны по μ;

2) *если* $|\lambda(0)\cdot\gamma(0)|>1$, *то* U_0 *расслаивается на кривые вида*

$$x=\xi+\varphi_1(\xi,y,\zeta,\mu)y,\quad z=\zeta+\psi_1(\xi,y,\zeta,\mu)y,$$

где φ_1 *и* ψ_1 *непрерывные по всем переменным, липшицируемые по* (ξ,y,ζ) *функции.*

Пусть для определенности $|\lambda(0)\cdot\gamma(0)|<1$. Тогда, сделав замену $y\to\eta+\varphi(x,\eta,\zeta,\mu)x,\ \ z\to\zeta+\psi(x,\eta,\zeta,\mu)x$, приведем (1) к виду

$$\begin{aligned}&\bar x=\lambda(\mu)x+f(x,\eta+\varphi(x,\eta,\zeta,\mu)x,\zeta+\psi(x,\eta,\zeta,\mu)x,\mu)x,\\&\bar\eta=\gamma(\mu)\eta+g(0,\eta,\zeta,\mu)\eta,\\&\bar\zeta=\zeta+R(\zeta,\mu)+H_2(0,\eta,\zeta,\mu)\eta.\end{aligned}\tag{3}$$

Поскольку два последних соотношения в (3) не зависят от x, то на них можно смотреть как на диффеоморфизм плоскости, для которого точка O является уже седло-узлом. Из леммы 1, 1) следует, что существует замена $\eta\to\eta,\ \zeta\to u+\Phi(\eta,u,\mu)\eta$ с непрерывной по всем переменным и липшицируемой по (η,u) функцией Φ, приводящая двумерное отображение к виду

$$\bar\eta=\gamma(\mu)\eta+g(0,\eta,u+\Phi(\eta,u,\mu)\eta,\mu)\eta,\quad \bar u=u+R(u,\mu).$$

В итоге соотношения (3) и эти соотношения дают канонический вид отображения T_μ, который и будет использован в дальнейшем. Из такого вида (и того, что $l_2>0$) непосредственно следует, что отображение T_0 имеет два двумерных локальных инвариантных многообразия: неустойчивое $V^u_{loc}:x=0,u\ge0$, и устойчивое $V^s_{loc}:\eta=0,u\le0$, с краями $V^{uu}_{loc}:x=0,u=0$, $V^{ss}_{loc}:\eta=0,\ u=0$. Соответствующие локальные инвариантные многообразия потока, порожденного векторным полем X_0, которые обозначим через W^u_{loc}, W^s_{loc}, W^{uu}_{loc}, W^{ss}_{loc}, по траекториям потока продолжаются до глобальных: W^u, W^s, W^{uu} и W^{ss}. Компонента трансверсального пересечения $((W^u\setminus W^{uu})\cap(W^s\setminus W^{ss}))$ гомеоморфна цилиндру, и если: 1) в замыкании такой компоненты нет точек, не принадлежащих L, 2) она содержится в компактном подмногообразии M^4, то будем обозначать ее Λ. Легко видеть, что $\bar\Lambda$ является двумерным C^0-подмногообразием многообразия M^4, гомеоморфным либо тору, либо бутылке Клейна, которое будем в дальнейшем называть тором.

Теорема 1. *Пусть* $\bar\Lambda$ *– гладкий тор. Тогда для любого достаточно малого* $\mu>0$ *система* X_μ *будет иметь инвариантный тор* $\Lambda(\mu)$, *гомеоморфный* $\bar\Lambda$, *и lt* $\Lambda(\mu)=\Lambda$ *при* $\mu\to0$.

Из теоремы 1 следует, что если $W^u\cap W^s$ трансверсально и состоит из единственной компоненты Λ, то рассматриваемая бифуркация в общем случае не выводит из класса систем с конечным множеством периодических движений. Однако B^1 недостижима со стороны $\mu>0$. Если $\bar\Lambda$ – тор, то это следует из стремления к нулю числа вращения на торе $\Lambda(\mu)$. Если же $\bar\Lambda$ – бутылка Клейна, то это следует из существования периодического движения $l(\mu)\subset\Lambda(\mu)$, меняющего свою устойчивость на $\Lambda(\mu)$ счетное число раз при $\mu\to0$.

2°. Предположим, что при $\mu=0$ в $W^u\cap W^s$ имеется конечное множество компонент $\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_m$, $m\ge2$, и пусть V – достаточно малая фиксированная окрестность множества $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\Lambda_i$. Обозначим через Σ_μ множество точек, через которые проходят траектории системы X_μ, целиком лежащие в V.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda_1,\Lambda_2,...,\Lambda_m$ *– гладкие торы. Тогда для любого достаточно малого* $\mu>0$ *множество компонент линейной связности* Σ_μ *находится во взаимно однозначном соответствии с множеством траекторий топологической схемы Бернулли из* m

символов. При этом соответствии каждой периодической траектории схемы Бернулли соответствует тор и $lt\,\Sigma_\mu = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Lambda_i$ *при* $\mu \to 0$.

С л е д с т в и е . *Система* X_μ, $\mu > 0$, *имеет счетное множество инвариантных торов.*[1]

3°. Предположим теперь, что $\bar{\Lambda}_i$ негладко вложено в M^4. Для точек на $l_i = \Lambda_i \cap D$ аналогично ([1]) дадим следующую классификацию. Назовем точку $P \in l_i$ плюс (минус)-точкой первого типа, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\,pr_z dT_0^{n+k} a_P|}{\|\,dT_0^{n+k} a_P\|} = 1 \quad \left(\lim_{n\to-\infty} \frac{|\,pr_z dT_0^{n-k} a_P|}{\|\,dT_0^{n-k} a_P\|} = 1\right),$$

где a_P – касательный вектор к l_i в точке P, pr_z – проекция на ось z, k - натуральное число такое, что для любого $n \in \mathbf{Z}_+ \quad T^{n+k}P \in U_0 \;\; (T^{-n-k}P \in U_0)$.

Назовем точку P плюс (минус)-точкой второго типа, если

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|\,pr_z dT_0^{n+k} a_P|}{\|\,dT_0^{n+k} a_P\|} = 0 \quad \left(\liminf_{n\to-\infty} \frac{|\,pr_z dT_0^{n-k} a_P|}{\|\,dT_0^{n-k} a_P\|} = 0\right).$$

Можно показать, что других точек на l_i нет. Пусть

$$\begin{aligned} D_d^+ &= \{(x,\eta,u) \mid \;\; |x| < \epsilon,\; |\eta| < \epsilon,\; -d \le u \le -d + R(-d,0)\}, \\ D_d^- &= \{(x,\eta,u) \mid \;\; |x| < \epsilon,\; |\eta| < \epsilon,\; d_1 \le u \le d\}, \end{aligned}$$

где $d = d_1 + R(d_1, 0)$, $\epsilon > 0$ – некоторое фиксированное число.

Пусть $\alpha_i = \Lambda_i \cap D_d^-$, $\omega_i = \Lambda_i \cap D_d^+$. Отображение $\alpha_i \to \omega_i$ по траекториям системы X_0 обозначим T_1.

1) Пусть α_i таково, что в нем существуют компоненты связности, записываемые в виде $x = h_1(u)$, $\eta = h_2(u)$, $d_1 \le u \le d$. Перенумеруем их, обозначив через γ_{is}, $1 \le s \le k_i$.

2) Пусть в множестве $T_i\gamma_{is}$ есть компоненты связности, также записываемые в виде $x = h_1(u)$, $\eta = h_2(u)$, $-d \le u \le -d + R(-d,0)$. Обозначим их Γ_{isr}, $1 \le r \le k_{is}$.

3) Точки на Γ_{isr} являются плюс-точками первого типа.

4) Точки на γ_{is} являются минус-точками первого типа. Пусть

$$\delta(i,s,r) = \min \frac{|\,\mathrm{pr}_z dT_1 a_P|}{\|a_P\|}$$

по всем точкам $P \in T_1^{-1}\Gamma_{isr}$ и $\delta(i) = \min\limits_{(s,r)} \delta(i,s,r)$.

Предположим, что

$$\delta(i) \cdot \min\left\{\frac{R(d,0)}{R(-d,0)},\; \frac{R(-d,0)}{R(d,0)}\right\} \cdot \exp(-2cd) > 1,$$

где

$$c = l_0 \left\{\frac{1}{1-r} + \ln 4\left(4 - \frac{1}{1-r}\right) + \frac{2}{(1-r)^2}\right\},$$

[1]Отметим, что подобные структуры изучались в связи с рассмотрением гомоклинической трубы инвариантного тора [6].

$$l_0 = \max_{z\in[-d,d]} |R_{zz}(z,0)|, \qquad r = \max_{z\in[-d,d]} |R_z(z,0)| < 1.$$

Пусть существует конечное множество номеров i, для которых выполнены перечисленные условия. Введем в рассмотрение топологическую марковскую цепь (т.м.п.) (G^+, Ω^+, σ). Ее состояния отождествим с кривыми Γ_{isr} и γ_{is}. Из каждого состояния типа Γ_{isr} есть переход во все состояния типа γ_{is}, а из состояния γ_{is} есть переходы лишь в состояния Γ_{isr} с теми же индексами i и s. Имеет место

Теорема 3 *Существует $\mu_2 > 0$, $0 < \mu_2 \le \mu_1$, и последовательность непересекающихся интервалов $\Delta_j = (\mu_j', \mu_j'') \subset (0, \mu_2)$ таких, что при $\mu \in \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \Delta_j$ система X_μ имеет инвариантное множество Σ_μ^+ седлового типа с $\dim W^s(\Sigma_\mu^+) = 2$, на котором система топологически эквивалентна надстройке* [2] *над т.м.ц. (G^+, Ω^+, σ).*

В общем случае при выполнении условий теорем 2 и 3 могут возникать и торы, и нетривиальные гиперболические множества.

Замечание 1. Условия в теореме 3 аналогичны условиям "большой петли" работы [1]. Точно так же можно выделить условия возникновения нетривиальных гиперболических множеств при наличии и "малых петель".

Замечание 2. Условия теоремы 3 могут выполняться одновременно и для системы $(-X_\mu)$, полученной заменой t на $(-t)$. Это может приводить к возникновению в системе X_μ множества Σ_μ^- с $\dim W^s(\Sigma_\mu^-) = 3$, гомеоморфного надстройке над т.м.ц. (G^-, Ω^-, σ) с некоторым графом G^-. Однако интервалы (на отрезке $(0, \mu_0)$) существования множеств Σ_μ^+ и Σ_μ^- могут не пересекаться.

4°. Предположим, что система X_0 имеет периодическое движение L_1 такое, что $W^s(L_1) \cap W^u \ne \emptyset$ и $W^u(L_1) \cap W^s \ne \emptyset$. При этом либо 1) $\dim W^s(L_1) = 2$, либо 2) $\dim W^s(L_1) = 3$. Общее рассмотрение возникающего при этом гиперболического множества требует использования понятия особого множества, описываемого т.м.ц. со счетным множеством траекторий [8] и конструкций, близких к проведенным в [2]. Здесь же мы ограничимся следующей теоремой.

Теорема 4 . *Если в случае* 1) (2)) *все точки $W^u(L_1) \cap W^s \cap D$ $(W^s(L_1) \cap W^u \cap D)$ являются плюс (минус)-точками первого типа, то для всех достаточно малых $\mu > 0$ у периодического движения L_1 существует грубая гомоклиническая траектория.*

Значение этой теоремы состоит в следующем: если система X_0 имеет два периодических движения – L_1 как в случае 1) и L_2 как в случае 2), – то при $\mu > 0$ одновременно возникает два нетривиальных гиперболических множества разных типов.

Замечание 3. Пусть при $\mu = 0$ $W^s \cap W^u = \{L\}$. Тогда X_μ при $\mu \ne 0$ является Ω-устойчивой. Здесь возможен случай, когда пересечение $\mathfrak{M}^+(\mathfrak{M}^-)$ неустойчивых многообразий других неблуждающих точек системы X_0 с $W^u(W^s)$ состоит только из точек 1-го типа. В этом случае B^1 достижима с обеих сторон. Достижимость B^1 с обеих сторон для диффеоморфизмов была доказана ранее в [9,10]. Если же в $\mathfrak{M}^+(\mathfrak{M}^-)$ есть точки 2-го типа и либо $\mathfrak{M}^- \ne \emptyset$, либо W^s содержит особые траектории [8] (соответственно либо $\mathfrak{M}^+ \ne \emptyset$, либо W^s содержит особые траектории), то в общем случае B^1 не достижима со стороны $\mu > 0$.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило
15 I 1980

[2]Об основных понятиях и свойствах надстроек над т.м.ц. см. [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Афраймович В.С., Шильников Л.П. – ДАН, 1974, т. 219, № 6, 1281. 2. Афраймович В.С. Канд.дисс, ГГУ, 1974. 3. Шильников Л.П. Тр. VШ Международн. конфер. по нелинейным колебаниям, Берлин, 1977, т. 1, 2, с. 279. 4. Шильников Л.П. - ДАН, 1975, т. 224, № 5, с. 1046. 5. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. – ДАН, 1978, т. 243, № 1, с. 26. 6. Шильников Л.П. – ДАН, 1968, т. 180, № 2, с. 286. 7. Алексеев В.М. Символическая динамика, 11 матем. школа, Киев, 1976 8. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Тр. ММО, 1973, т. 28, с. 181. 9. Newhouse S., Palis J., Takens F. – Bull. Amer. Math. Soc. 1976, vol. 82, p. 499. 10. Robinson C. – Trans. Amer. Math. Soc, 1978, vol. 236, p. 155.

Доклады Академии наук СССР
1975. Том 223, № 6, с. 1340-1343.

УДК 534.1 *МАТЕМАТИКА*

Морозов А.Д., Шильников Л.П.

К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СИНХРОНИЗАЦИИ КОЛЕБАНИЙ

(Представлено академиком Б.Н.Петровым 31 III 1975)

Работа относится к тому кругу идей, который связан с изучением воздействия внешнего периодического по времени возмущения на автоколебательную систему. Для систем такого типа, близких к линейным консервативным, основные вопросы, возникающие при их исследовании, были выяснены в известных работах А. А. Андронова и А. А. Витта, Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского и др. Системы же, описываемые уравнениями второго порядка, близкими к нелинейным консервативным, которые в отсутствие внешнего периодического возмущения являются автоколебательными, несмотря на всю их прикладную направленность, до сих пор не рассматривались[1]. Настоящая работа имеет целью в некоторой мере заполнить этот пробел.

Рассмотрим следующие уравнения:

$$\ddot{x} + x - \alpha x^3 = \varepsilon[b_0 \sin \nu t + (\delta - \beta x^2)\dot{x}] \tag{1}$$

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[b_0 \sin \nu t - (\delta - \beta \sin^2 x)\dot{x}] \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon \ll 1,\ \delta > 0,\ \beta > 0$.

1. Изучение поведения решений уравнения (1) в ограниченной части фазового пространства в случае $\alpha < 0$ и в некоторой фиксированной области $\dot{x}^2 + x^2/2 - \alpha x^4/4 \leq H^*$, лежащей внутри сепаратрисного контура при $\alpha > 0$, сводится к изучению окрестностей (размеры которых по H порядка $\varepsilon^{1/2}$) резонансных уровней $H = H_{pq}$, выделяемых условием $p\omega = q\nu$, где $\omega = 2\pi\tau^{-1},\ \tau(H)$ – период движения по замкнутым кривым $\dot{x}^2 + x^2/2 - \alpha x^4/4 = H^*$, а также нерезонансных уровней, на которых частота ω несоизмерима с ν. Резонансные уровни, в свою очередь, разобьем на два типа: 1) основные $H_p = H_{p1}$, для которых выполнено условие $p\omega = \nu$, где p нечетно, и 2) неосновные H_{pq}, для которых либо $q \neq 1$, либо $q = 1$, но p четно. Неосновные резонансные уровни с нерезонансными уровнями объединяет то общее, что в окрестности каждого из этих уровней, которые обозначим через $\tilde{H}$, поведение решений уравнения (1) аналогично поведению решений в отсутствие внешнего периодического возмущения. Более точно: если значение $\tilde{H}$ не является корнем уравнения

$$\Phi(H; \delta, \beta) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau (\delta - \beta x^2 \dot{x}^2)dt = \delta\Phi'(H; \beta') = \delta[B(H) - \beta' B_1(H)] = 0,$$

[1]Обзор работ, посвященных изучению уравнений 2-го порядка, близких к нелинейным консервативным, см. в ([1–3]); из последних работ отметим ([4]).

где интеграл берется вдоль замкнутой кривой невозмущенного уравнения с периодом $\tau(H)$, то фазовая точка за конечное время покинет $\varepsilon^{1/2}$ – окрестность уровня $\tilde{H}$; если же значение $\tilde{H}$ является корнем уравнения (3), то в $\varepsilon^{1/2}$ – окрестности уровня $\tilde{H}$ будет существовать двумерный устойчивый при $\delta > 0$ инвариантный тор, решениям на котором будет отвечать "двухчастотный режим биений".

Уравнение (3) может иметь только один нетривиальный корень $H = H_0(\beta')$, отвечающий устойчивому предельному циклу, поскольку характеристический показатель $\sigma = (d\Phi'/dH)_{H=H_0} < 0$. В случае $\alpha < 0$ периодическое движение, соответствующее предельному циклу, будет существовать при всех $\delta > 0$ и $\beta > 0$ (или при $\beta' = \beta\delta^{-1} > 0$) При $\alpha > 0$ периодическое движение существует только при $\beta' > 5\alpha$.

Уравнения движения в $\varepsilon^{1/2}$-окрестности основных резонансных уровней в некоторых переменных u и v (более подробно см. ([4])) записываются в виде

$$\begin{gathered}\dot{u} = \varepsilon^{1/2}[A_0(v) + \delta\Phi'(H_p, \beta')] + \varepsilon[\delta\sigma(H_p, \beta')u + P_0(v)u] + \varepsilon^{3/2}F(u, v, t; \varepsilon^{1/2}),\\ \dot{v} = \varepsilon^{1/2}b_1 u + \varepsilon[b^2u^2 + Q_0(v)] + \varepsilon^{3/2}G(u, v, t; \varepsilon^{1/2})\end{gathered} \tag{4}$$

где

$$A_0(v) = \begin{cases} -\dfrac{2\sqrt{2}\nu^2}{\sqrt{|\alpha|}p} b_0 h_p \begin{pmatrix} \sin\nu v \\ \cos\nu v \end{pmatrix}, & \alpha > 0, \\ & \alpha < 0 \end{cases}$$

b_1, b_2, h_p – постоянные, зависящие от H_p; $P_0(v), Q_0(v)$ – аналитические периодические с периодом $2\pi p\nu^{-1}$ функции, удовлетворяющие условию $(dQ_0/dv) + P_0 \equiv 0$, F, G – аналитические по u, v, $\varepsilon^{1/2}$ – функции, периодические по v, t с периодом $2\pi p\nu^{-1}$.

Очевидно, при выполнении условия

$$\max_v |A_0(v)| > \delta \left|\Phi'(H_p, \beta')\right|, \ \delta > 0,$$

укороченная система, получающаяся из (4) отбрасыванием членов $O(\varepsilon^{3/2})$, будет иметь p состояний равновесия типа седло и p состояний равновесия типа фокус, одновременно устойчивых или неустойчивых в зависимости от знака величины $\sigma(H_p, \beta')$. Так как при $\beta' = \beta'_p$, удовлетворяющих условию $\Phi'(H_p, \beta'_p) = 0$ (т. е. когда $H_p = H_0(\beta')$), справедливо неравенство $\sigma(H_{p0}, \beta'_p) < 0$, то фокусы будут устойчивы. Этим фокусам в уравнении (1) будет соответствовать устойчивое периодическое движение периода $2\pi p\nu^{-1}$. При увеличении β' произойдет слияние устойчивого периодического движения с седловым периодическим движением; возникает сложное периодическое движение, которому в укороченной системе будут соответствовать сложные состояния равновесия типа седло – узел.

Момент образования сложного периодического движения периода $\frac{2\pi p}{\nu}$ обозначим через β'_p.

При дальнейшем увеличении β' периодическое движение исчезает. Фазовая точка покинет окрестность резонансного уровня и перейдет на какой-то новый режим, лежащий в области $H < H_p$. При уменьшении же β' от β'_p произойдет следующее: при некотором $\beta' = \bar{\beta}'_p < \beta'_p$ либо величина σ, которая характеризует устойчивость периодического движения, обратится в нуль (укороченная система становится консервативной), либо седловое периодическое движение сольется с устойчивым. При дальнейшем уменьшении β' фазовая точка перейдет на некоторый новый режим, лежащий в области $H > H_P$. Таким образом, на интервале $\bar{\beta}'_p < \beta' < \beta'_p$ в системе возможна синхронизация на частоте ν/p.

Для исследования характера перехода инвариантного тора через "резонанс" рассмотрим систему на цилиндре

$$\begin{gathered}\dot{u} = \varepsilon^{1/2}A_0(v) + \varepsilon[\gamma + \delta\sigma(H_p, \beta_p^{'})u + P_0(v)u],\\ \dot{v} = \varepsilon^{1/2}b_1u + \varepsilon[b_2u^2 + Q_0(v)],\end{gathered} \tag{5}$$

получающуюся из укороченной системы при значении $\beta^{'} \cong \beta_p^{'} + O(\varepsilon^{1/2})$. Величину $\varepsilon^{1/2}\gamma = -\delta(\beta^{'} - \beta_p^{'})B_1(H_p)$ естественно назвать расстройкой.

У т в е р ж д е н и е. *Существует такое* $\gamma_p > 0$, *что*:

1) *при* $\gamma > \gamma_p$ *у системы* (5) *будет существовать устойчивый предельный цикл*;

2) *при* $\gamma = \gamma_p$ *цикл влипает в контур* Γ_1, *составленный из* p *седел и* p *сепаратрис, охватывающих цилиндр*; *остальные сепаратрисы идут в устойчивые фокусы*;

3) *при* $-\gamma_p < \gamma < \gamma_p$ *в системе имеются седла и устойчивые фокусы, предельные циклы отсутствуют*;

4) *при* $\gamma = -\gamma_p$ *образуется контур* Γ_2, *составленный из седел и сепаратрис, охватывающих цилиндр; остальные сепаратрисы (которые образовывали при* $\gamma = \gamma_p$ *контур* Γ_1) *стремятся к фокусам*;

5) *при* $\gamma < -\gamma_p$ *в системе будет существовать устойчивый предельный цикл, рождающийся из контура* Γ_2.

Это утверждение описывает характер перехода от режима биений к режиму синхронизации и указывает на имеющее здесь место явление захватывания[2].

В качестве примера рассмотрим случай $\alpha < 0$ и $\nu = 4$. Здесь может быть только два основных резонанса H_p: H_1 и H_3. При этом, если $\beta^{'}$ достаточно велико ($\beta^{'} > \beta_1^{'},\ \beta^{'} > \beta_3$), то в окрестности уровней H_1 и H_3 периодические движения отсутствуют и фазовая точка будет находиться на инвариантном торе. Дальнейшее поведение фазовой точки при уменьшении $\beta^{'}$ изображено на рис. 1. При этом предполагается, что выполнено условие

$$H_0(\hat{\beta}^{'}) < H_1,\ \max_v |A_0(v)|_{H=H_1} > \delta \left| B(H_3) - \hat{\beta}^{'}B_1(H_3) \right|,$$

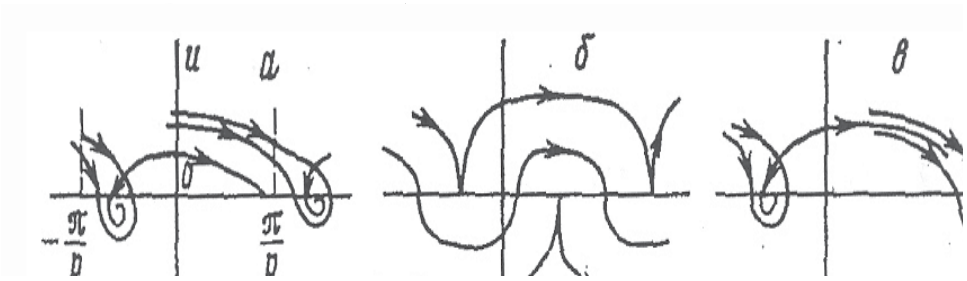
где $\hat{\beta}^{'}$ – корень уравнения $\sigma(H_3, \beta^{'}) = 0$ которое гарантирует, что в момент смены устойчивости периодического движения на уровне H_3 фазовая точка срывается на инвариантный тор. На этом же рисунке показано поведение фазовой точки при возрастании $\beta^{'}$.

Таким образом, получаем следующий практически важный вывод: для уравнений типа (1), близких к нелинейным консервативным, размер области синхронизации по $\beta^{'}$ имеет порядок 1. Для сравнения заметим, что в случае уравнения Ван-дер-Поля (уравнение (1) при $\alpha = 0$) размер области синхронизации по $\beta^{'}$ имеет порядок ε.

У уравнения (2) основными резонансными уровнями в области колебательных движений будут уровни $H = H_p$, p нечетно, а в области вращательных движений $H = H_p$, p целое. Для этого уравнения возможно существование двух инвариантных торов разной устойчивости, прохождение которых через основные резонансы описывается утверждением, аналогичным приведенному выше.

2. Полное исследование поведения решений в ε – окрестности сепаратрисного контура уравнений (1) с $\alpha > 0$ и уравнения (2) наталкивается на принципиальные математические

[2]Для уравнения (1) бифуркация, связанная с исчезновением (появлением) инвариантного тора, будет значительно сложнее, поскольку при $\gamma = \pm\gamma_p$ могут существовать гомоклинические кривые. Однако в этом случае интервалы по $\beta^{'}$ со сложной структурой будут иметь длины порядка $\exp(-1/\varepsilon^{1/2})$. Поэтому ими практически можно пренебречь.



Фиг. 1

трудности. Это связано с тем, что структура предельного множества, содержащая гомоклинические кривые Пуанкаре (гомоклиническая структура) претерпевает бесчисленное множество бифуркаций при изменении параметров системы [5–7]. В частности, гомоклиническая структура будет иметь место, если функция В. К. Мельникова [8]

$$\Delta(t_0;\varepsilon) = \varepsilon\left[-\frac{\pi\nu\sqrt{2/\alpha}b_0}{\operatorname{sh}(\nu\pi/\sqrt{2})}\sin\nu t_0 + \delta\frac{2\sqrt{2}}{3\alpha}\left(1-\frac{\beta'}{5\alpha}\right)\right] + O(\varepsilon^2)$$

в случае уравнения (1) и

$$\Delta(t_0;\varepsilon) = \varepsilon\left[-\frac{2\pi b_0}{\operatorname{ch}(\nu\pi/2)}\sin\nu t_0 - 8\delta\left(1-\frac{8}{15}\beta'\right)\right] + O(\varepsilon^2)$$

в случае уравнения (2) – знакопеременна.

Рассмотрим случай, когда $\beta' = \beta'_* = 5\alpha + O(\varepsilon)$ для (1) и $\beta' = \beta'_* = 15/8 + O(\varepsilon)$ для (2). Именно при этих значениях параметра β' и $b_0 = 0$ предельный цикл влипает в сепаратрисный контур. Поскольку предельный цикл устойчив, то сепаратрисный контур уравнения (1) будет устойчив изнутри, а уравнения (2) – с двух сторон. Поэтому если для уравнения (1) при $\beta' = \beta'_*$ неавтономное возмущение приводит к тому, что окрестность контура становится неустойчивой, ибо возникают “протуберанцы”, через которые фазовая точка может убегать на бесконечность, то для уравнения (2) при $\beta' = \beta'_*$ можно указать устойчивую окрестность сепаратрисного контура для всех $0 < b_0 < \bar{b}_0$. При этом будет существовать счетное множество интервалов $(\bar{b}_{0i}^{(1)}, b_{0i}^{(1)})$, при значениях b_0 из которых уравнение (2) будет иметь устойчивые субгармоники периода $\approx -\ln\varepsilon b_0$. Аналогично [5] можно показать, что при $\Delta(t_0;\varepsilon) > 0$, т. е. когда <сепаратриса разваливается внутрь>, может существовать сложная гомоклиническая структура и счетное множество интервалов $(\bar{b}_{0i}^{(2)}, \bar{\bar{b}}_{0i}^{(2)})$, при значениях b_0 из которых будут существовать устойчивые субгармоники; периоды этих субгармоник имеют порядок величины $-\ln\min_{t_0}\Delta(t_0,\varepsilon)$.

Отметим, что наши результаты в некотором смысле аналогичны результатам известных работ М. Картрайт, Литлвуда и Левинсона, связанных с исследованием уравнения Ван-дер-Поля с $\varepsilon \gg 1$.

Научно-исследовательский институт прикладной математики и кибернетики при Горьковском государственном университете им. Н. И. Лобачевского

Поступило 25 02 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Журн. вычислит. матем. и матем. физики, т. 8, № 2, 251 (1968). **2.** В. М. Волосов, Б. И. Моргунов, Методы осреднения в теории нелинейных колебаний, Изд-во МГУ, 1971. **3.** Г.М. Заславский, Б.В.Чириков, УФН, т. 105, в. 1, № 9, 3 (1971). **4.** А.Д. Морозов, Журн. вычислит. мат ем. и матем. физ., т. 13, № 5, 1134 (1973). **5.** Н. К. Гаврилов, Л. П. Шильников, Матем. сб., I, т. 88, № 4, 435 (1972); сб. II, т. 90, № 1, 132 (1973). **6.** Н. К. Гаврилов, Матем. заметки, т. 14, в. 5, 687 (1973). **7.** В. С. Афраймович, Л. П. Шильников, ДАН, т. 214, № 4 (1974). **8.** В. К. Мельников, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 12, 3 (1963).

Глава 5

Аттрактор Лоренца.

В этой главе представлено пять работ Л.П. Шильникова [1-5], три из которых написаны им в соавторстве с В.С. Афраймовичем и В.В. Быковым. Все они посвящены одной из самых интересных тем в теории динамического хаоса – аттракторам Лоренца.

В 1963 г. Э. Лоренц обнаружил [6] асимптотически устойчивое сложное непериодическое поведение траекторий в системе, полученной при аппроксимации уравнений Обербека-Буссинеска, описывающих конвекцию в плоском слое теплопроводящей жидкости, подогреваемой снизу. Система Лоренца (или Зальцмана-Лоренца) имеет следующий вид

$$\dot{x} = -\sigma(x - y),\ \dot{y} = -xz + rx - y,\ \dot{z} = xy - bz. \tag{5.1}$$

Параметры σ, r и b имеют вполне определенный физический смысл (например, σ пропорциональна числу Прандтля, r – числу Релея, а b – геометрический параметр). При $b = 8/3, r = 28, \sigma = 10$ Лоренц с помощью компьютерных экспериментов обнаружил хаотическое поведение траекторий. На рис. 5.1 показано типичное поведение одной из неустойчивых сепаратрис седлового состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. Поведение другой неустойчивой сепаратрисы будет симметричным, т.к. система (5.1) допускает симметрию вида $x \to -x, y \to -y, z \to z$. Рис. 5.1 дает адекватное представление о форме аттрактора Лоренца, т.к. в типичном случае этот аттрактор является замыканием любой из неустойчивых сепаратрис седлового равновесия.[1]

В то время (60-е годы и начало 70-х) такое поведение траекторий казалось весьма экзотическим и непонятным, а сама система Зальцмана-Лоренца весьма слабо ассоциировалась с моделью, которая могла бы адекватно описывать динамические процессы, происходящие в реальной жидкости. Она была

[1] в общем же случае, аттрактор Лоренца – пролонгация сепаратрисы седла (т.е. множество точек, достижимых из седла ε-траекториями про сколь угодно малом ε)

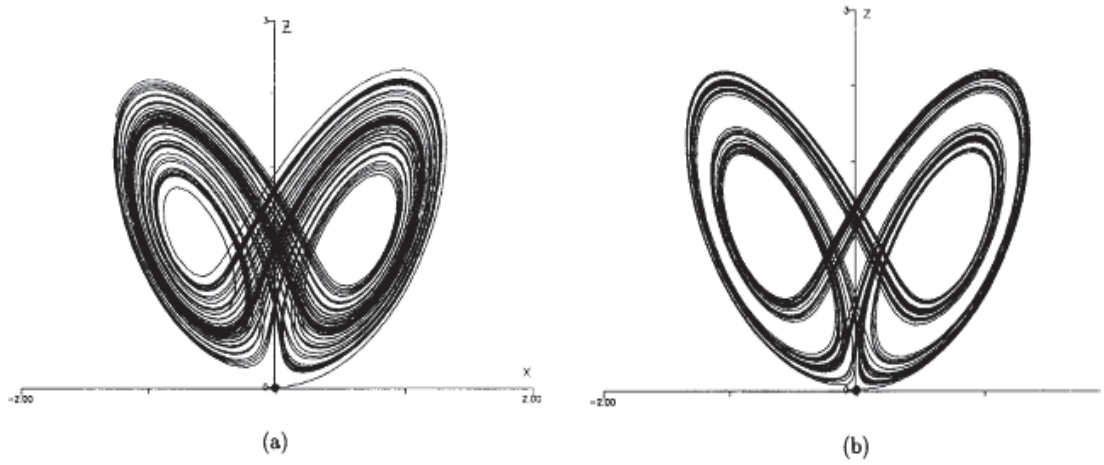


Рис. 5.1 Два типа аттракторов Лоренца (a) стандартный и (b) с лакуной, содержащей седловое периодическое движение.

“слишком маломерной”. Конечно, математиков и физиков очень интересовали в то время (как и сейчас) проблемы турбулентности, в частности, механизмы возникновения (пространственно-временного) хаоса в гидродинамических моделях, который легко наблюдался в экспериментах. Основное представление, существовавшее в 60-х годах, состояло в том, что наблюдаемый хаос связан с особенностями бесконечномерной динамики. В частности, известный (и в то время – единственный) сценарий Ландау-Хопфа перехода к турбулентности предполагал бесконечную цепочку усложнения квазипериодических движений – от одномерного тора к двумерному, от двумерного тора к трехмерному и т.д., до бесконечности.

Однако в начале 70-х годов ситуация изменилась. Рюэль и Такенс [8] показали, что цепочка Ландау-Хопфа может обрываться на стадии трехмерного тора – при выполнении определенных резонансных условий на частоты хаос может возникать при сколь угодно малых гладких возмущениях. То есть, уже у конечномерных систем могут существовать нетривиальные притягивающие множества со сложной структурой (содержащие бесконечно много периодических седловых траекторий, устойчивые по Пуассону траектории и т.д.). В этой же работе [8] был предложил термин “странный аттрактор” для обозначения таких множеств, и введен ряд базовых понятий и определений на эту тему. Конструкция Рюэля-Такенса носила достаточно абстрактный характер;

в частности, не гарантировалась достаточная гладкость возмущений.[2] Однако, Афраймович и Шильников [11,12] показали, что хаос может также возникать при разрушении уже двумерного инвариантного тора (см. главу 4) и что соответствующие явления играют важную роль в задачах синхронизации колебаний. Все это привело к тому, что в конце 70-х годов системами со сложной динамикой заинтересовались физики и ученые из других областей науки.

Вскоре после этого и сама работа Э. Лоренца попала в поле зрения математиков. Когда Л.П. Шильников узнал о ней (из разговора с Я.Г. Синаем), он сразу понял и важность сделанного Э.Лоренцем открытия для теории динамических систем, и то, что исследование системы Лоренца должно привести к совершенно новому взгляду на природу динамического хаоса. Более того, ему стало ясно, что все необходимые качественные методы исследования системы Лоренца у него уже есть. Идея теперь состояла в том, чтобы соединить эти методы с компьютерными исследованиями, и на основании этого изучить динамику и бифуркации в этой системе.

Для работ над системой Лоренца Шильников привлек группу своих сотрудников. Костяк группы составили В.С. Афраймович и В.В. Быков, вместе с которыми и были написаны главные работы [1] и [2]. К этим исследованиям были привлечены также Н.В. Рощин и М.И. Малкин.

В частности, Н.В. Рощин занимался изучением бифуркаций предельных циклов в системе Лоренца, а также в других системах лоренцевского типа, имеющих отношение к лазерной тематике. Он, например, показал [13], что граница l_3 области существования аттрактора Лоренца (см. рис. 2 из [2]) является всегда опасной – при переходе через эту границу в устойчивые состояния равновесия влипают седловые предельные циклы – происходит обратная бифуркация Андронова-Хопфа, и единственным аттрактором остается аттрактор Лоренца. М.И. Малкин изучал динамику и бифуркации т.н. отображений лоренцевского типа. Эти (одномерные разрывные) отображения возникают при факторизации отображения Пуанкаре в системе Лоренца по устойчивому инвариантному слоению (примеры таких отображений показаны, например, на рис. 10 из работы [2]). Малкин, в частности, доказал, что нидинг-инварианты (т.е. символические кодировки поведения сепаратрис) представляют собой полную систему инвариантов топологической сопряженности отображений лоренцевского типа [14]. Кроме того, М.И. Малкиным были предложены новые инварианты отображений лоренцевского типа (ренорм-последовательности интервалов вращения и последовательности моделей постоянного наклона), с помощью которых

[2]проблема с гладкостью возмущений была преодолена в [9], а окончательно – в [10]

удалось классифицировать динамику и установить эргодические свойства таких отображений [15-18].

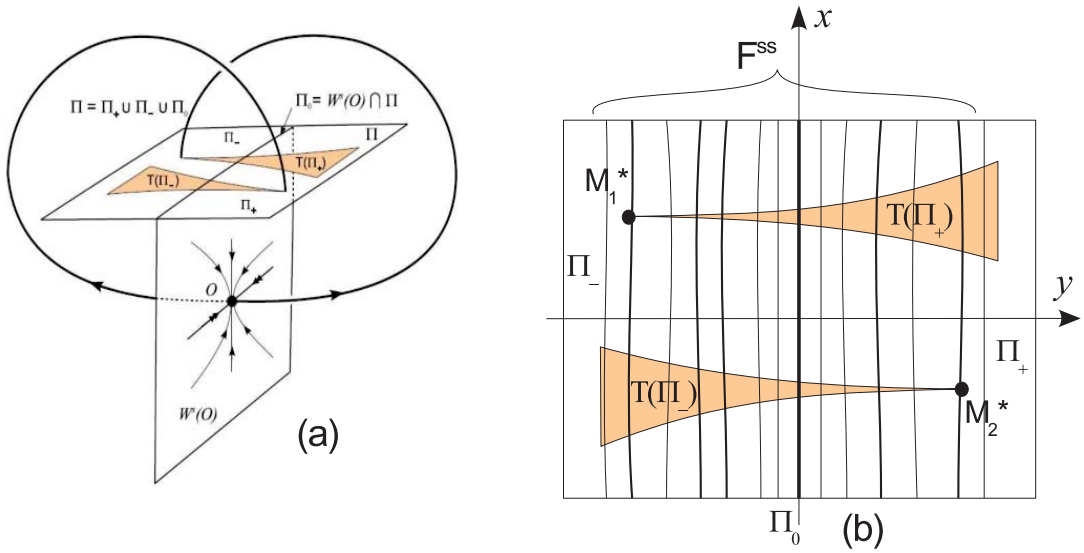


Рис. 5.2 (a) Элементы “потоковой картинки” в случае аттрактора Лоренца. (b) Иллюстрация геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова.

Подход Шильникова состоял в том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием так называемой геометрической модели – двумерного разрывного сингулярно-гиперболического отображения с определенными эффективно проверяемыми свойствами. Эта модель была описана в работе [1], см. также [2,3]. Тот факт, что отображение Пуанкаре в системе Лоренца удовлетворяет требованиям геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова, проверялся численно, а теоретически исследовалась уже геометрическая модель.[3] По существу, эта модель обобщала свойства отображения Пуанкаре вблизи сепаратрисы седла, см. рис. 5.2a, а условия гиперболичности были записаны в форме, близкой к принципу кольца, предложенному в работах по разрушению двумерного инвариантного тора [9,10], см. главу 4.

[3]Однако математическое доказательство того факта, что аттрактор в системе Лоренца может быть полностью описан геометрической моделью, было получено лишь через большой промежуток времени. Именно, в работе Такера [19] было дано соответствующее доказательство с помощью компьютера, т.н. “computer assisted proof”. Несомненно, результат Такера является весьма важным для теории аттракторов Лоренца, однако само доказательство не является “эффективно проверяемым”. Поэтому в недавней работе И. Овсянникова и Д. Тураева [20] было предложено другое доказательство того, что “аттрактор Лоренца существует”, основанное на критериях Шильникова [4] возникновения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях.

Рыбалка была настоящей страстью для Леонида Павловича (за любимым занятием на берегу озера в Атланте, 2007)

Л.П. Шильников с женой Людмилой Ивановной (Флорида, 2007

Если обратиться к рисунку 5.2а, на котором показаны основные элементы геометрической структуры трехмерного потока с аттрактором Лоренца, то можно понять в общих чертах как строится геометрическая модель Афраймовича-Быкова-Шильникова. На этом рисунке показаны кусок двумерного устойчивого многообразия $W^s(O)$ седлового состояния равновесия O и две неустойчивые сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 точки O, которые пересекают некоторую трансверсальную к $W^s(O)$ площадку Π в точках $M_1^* = \Gamma_1 \cap \Pi$ и $M_2^* = \Gamma_2 \cap \Pi$. Двумерные площадки $W^s(O)$ и Π пересекаются вдоль некоторой линии $\Pi_0 = W^s(O) \cap \Pi$, которая разделяет площадку Π на две половинки Π_+ и Π_-. Площадка Π выбирается таким образом, что все траектории (из некоторой поглощающей области), кроме равновесия O, ее обязательно пересекают. Соответственно все траектории аттрактора A (кроме O) будут иметь точки пересечения с Π. А это означает, что для того, чтобы изучить структуру аттрактора, достаточно исследовать динамику соответствующего отображения Пуанкаре секущей Π на себя. Обозначим это отображение через T. Опять же рис. 5.2 подсказывает каким должно быть это отображение.

Во-первых, оно должно быть разрывным: именно, Π_0 – линия его разрыва. Отображение T не определено на Π_0, так как траектории всех точек на Π_0 стремятся к O при $t \to +\infty$. Однако траектории всех точек на Π_+ и Π_- будут пересекать площадку Π^+, причем трансверсально (если взять, например, последовательность точек M_k^+ на Π_+, накапливающихся при $k \to \infty$ к Π_0 сле-

ва, то $T(M_k^+) \to M_1^*$; аналогично для точек $M_k^- \in \Pi_-$, накапливающихся при $k \to \infty$ к Π_0 справа, получаем, что $T(M_k^-) \to M_2^*$).

Во-вторых, поведение траекторий точек, стартующих вблизи линии разрыва Π_0, должно быть тем же самым, что и в случае седла (ср. с рис. 1.1 из главы 1), только предельные точки M_1^* и M_2^* будут лежать в Π_- и Π_+ соответственно (для случая аттрактора Лоренца эти точки отделены от Π_0, а для случая, когда в системе есть гомоклиническая восьмерка седла (для значений параметров на кривой l_1, см. рис. 1б) и рис. 2 из [3*]), обе эти точки лежат на Π_0). Поэтому нужно считать, что образы $T(\Pi_+)$ и $T(\Pi_-)$ площадок Π_+ и Π_- имеют форму треугольных клиньев с остриями в точках M_1^* и M_2^* соответственно. В-третьих, для случая аттрактора Лоренца, площадка Π должна быть такой, что $T(\Pi_+)$ и $T(\Pi_-)$ лежат целиком внутри нее.

Кроме этих трех чисто геометрических условий в работах [1-3] были наложены еще и определенные аналитические условия, гарантирующие то, что отображение T является сингулярно-гиперболическим (см., например, условия (6) из [3]). Когда эти условия выполняются, отображение T является экспоненциально сжимающим по одной из координат и растягивающим по другой. Более того, в этом случае на Π существует инвариантное сильно сжимающее слоение F^{ss}. На рис. 5.3 представлена качественная картинка действия отображения T, определенного на прямоугольнике $\Pi : \{|x| \le 2, |y| \le 1\}$. Здесь также схематически показано инвариантное слоение F^{ss},[4] содержащее в качестве слоя линию $\Pi_0 = \Pi \cap W^s(O)$ и счетное множество ее прообразов – линий пересечения глобального куска устойчивого многообразия точки O с прямоугольником Π. В [2] было показано, что в геометрической модели эти линии плотно заполняют Π. А это означает, что в однопараметрических семействах таких отображений будут плотны значения параметров, отвечающих существованию (многообходных) гомоклинических петель (восьмерок – в симметричном случае) седла O. В свою очередь это влечет негрубость аттрактора Лоренца (в нем при малых возмущениях возникают и исчезают петли сепаратрис), причем такого типа (т.н. “грубая негрубость”), что в пространстве динамических систем системам с аттракторами Лоренца отвечают открытые (в $C^1 -$) области негрубых систем.

Геометрическая модель позволила дать детальное описание структуры аттрактора Лоренца (см., например, Теоремы 1-4 из [3]). В работах [1-3] были также исследованы бифуркации аттрактора Лоренца, приводящие к его

[4] В [2] была доказана непрерывность (с некоторой ограниченной константой Липшица) этого слоения, а C^1-гладкость слоения (с C^2-гладкими слоями) была установлена в работе [21]).

рождению и изменению структуры, в частности, с образованием лакун, содержащих седловые периодические траектории (на рис. 5.1b показан пример аттрактора Лоренца с лакуной). В 1977 г. вышло краткое изложение полученных результатов [1], и была послана в печать статья с подробным изложением теории и полными доказательствами [2]. Поскольку публикация последней статьи сильно задерживалась (она вышла из печати почти через пять лет после того как была послана – неслыханное расточительство даже для того времени), Шильниковым был также опубликован обзор [3] по тематике аттрактора Лоренца.

Практически одновременно и независимо на Западе появилось большое число статей по аттрактору Лоренца, см., например, работы Д. Рюэля [22], Дж. Гукенхеймера [23], Р. Вильямса [24], Дж. Йорке и Е. Йорке [25], Д. Каплана и Дж. Йорке [26], Д. Рэнда [27] и др. Тем не менее, по сравнению с другими подходами, теория Афраймовича-Быкова-Шильникова до сих пор остается наиболее полной и удобной для практического анализа структуры и эволюции аттракторов лоренцевского типа в различных системах.

Помимо собственно задачи изучения структуры аттрактора Лоренца, Л.П. Шильникова также (может быть еще в большей степени) интересовали вопросы о бифуркационных механизмах возникновения и разрушения аттрактора Лоренца. В частности, он предложил эффективные критерии рождения аттрактора Лоренца при глобальных бифуркациях [4].[5] Позднее, в его работе с Д.В. Тураевым и А.Л. Шильниковым [33] были построены также критерии рождения аттрактора Лоренца при локальных бифуркациях. Еще при работе над первыми статьями [1,2] было замечено, что аттрактор Лоренца может разрушаться при образовании т.н. “крючков” в отображении Пуанкаре[6], см. рис. 5.3, и центральную роль при этом играет бифуркация образования гетероклини-

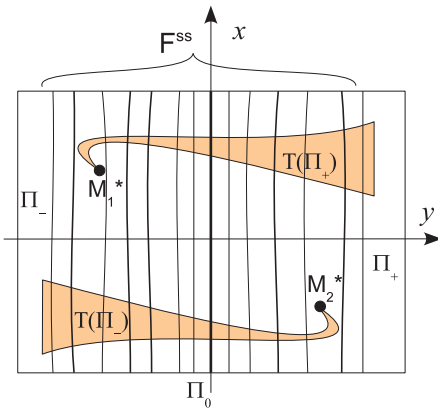


Рис. 5.3

[5]Критерии Шильникова исследовались в работах К. Робинсона [28,29] и А. Рыхлика [30], они также были использованы А.Л. Шильниковым при исследовании аттрактора Лоренца в системе Мориока-Шимицу [31,32], и совсем недавно – в работе И. Овсянникова и Д. Тураева [20] для аналитического доказательства существования аттрактора Лоренца в т.н. расширенной модели Лоренца.

[6]Систематически это явление было исследовано в работах [31,32,34]

ческого контура, содержащего седло и седло-фокусы. Такие бифуркации были исследованы в кандидатской диссертации В.В. Быкова, см. [35-37]. Тот факт, что при переходе за "быковскую точку" аттрактор в системе Лоренца теряет гиперболичность (перестает быть аттрактором Лоренца), и в нем появляются устойчивые периодические траектории больших периодов, был впервые отмечен в заметке [5], и он послужил непосредственным толчком для формирования концепции квазиаттрактора – притягивающего множества, которое наряду с гиперболическими подмножествами может содержать и устойчивые периодические траектории больших периодов [38]. Шильников считал, что идея квазиаттрактора дает наиболее адекватный математический образ динамического хаоса, наблюдаемого во многих прикладных задачах и в большинстве известных на сегодня математических моделях (таких как отображение Эно, цепи Чуа, системы со спиральными аттракторами и т.п.).

Как оказалось впоследствии, аттрактор Лоренца встречается во многих трехмерных и многомерных системах. Одна из наиболее известных – это система Шимицу-Мориока [39]

$$\begin{aligned}&\dot{x} = y,\ \dot{y} = x - \lambda y - xz,\ \dot{z} = -\alpha z + x^2;\\&\alpha > 0,\ \lambda > 0.\end{aligned}$$

Отметим, что эта система имеет важное значение для математической теории лоренцевских аттракторов. Дело в том, что эта система служит локальной нормальной формой некоторых типов бифуркаций состояния равновесия с тремя нулевыми собственными значениями и дополнительной симметрией [33]. Поскольку в самой системе Шимицу-Мориока существует аттрактор Лоренца в некоторой области значений параметров [32], на этом пути можно получить эффективно проверяемые критерии рождения аттрактора Лоренца в результате локальных бифуркаций [33].

В работе [33] было также отмечено, что система Шимицу-Мориока является еще и потоковой локальной нормальной формой бифуркации отображения с неподвижной точкой, имеющей триплет $(-1; -1; +1)$ мультипликаторов. При этом отрицательность соответствующих мультипликаторов автоматически обеспечивает нужную (лоренцевскую) симметрию, а сама система возникает как главная автономная часть вложения в поток квадрата отображения. Этот факт был использован в работе [40] при доказательстве существования дискретных аналогов аттрактора Лоренца в случае трехмерных отображений Эно.[7]

[7] В [40] рассматривались отображения вида $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = M_1 + Bx + M_2 y - z^2$, а в [41] был выделен класс

Отметим, что в работе [42] было показано, что дискретные аттракторы Лоренца естественным образом возникают также в отображениях Пуанкаре периодически возмущенных потоков с аттракторами Лоренца. Однако в отличие от последних они (когда амплитуда возмущения достаточно мала) являются дикими гиперболическими аттракторами, по терминологии [43], т.е. допускают гомоклинические касания (а значит, принадлежат областям Ньюхауса) но не содержат устойчивых периодических траекторий, которые не появляются также и при малых гладких возмущениях. Такие аттракторы относятся к классу настоящих псевдогиперболических аттракторов,[8] математическая теория которых была построена в работе [46]. Заметим также, что в работе [44] были описаны универсальные бифуркационные сценарии возникновения дискретных псевдогиперболических аттракторов как лоренцевского, так и других типов.

Мы здесь перечислили только лишь малую часть результатов, фундаментом для которых явились работы Л.П. Шильникова с соавторами по теории аттракторов Лоренца. Для самого Шильникова тематика с аттракторами Лоренца оставалась приоритетной вплоть до конца жизни. Так, одна из его самых последних работ [45] была посвящена изучению символической динамики системы Лоренца.

Литература к главе 5.

[1*] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.// ДАН СССР, 1977, т.234(2), 336-339.

[2*] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца.// Труды ММО, 1982, т.44, с.150-212.

[3*] Шильников Л.П., Теория бифуркаций и модель Лоренца.// Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак- Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980, 19с.

[4*] Шильников Л.П., Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы.// УМН, 1981, т.36, в.4.

[5*] Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О существовании устойчивых пе-

обобщенных трехмерных отображений Эно, для которых выполняются критерии рождения дискретных аттракторов Лоренца при локальных бифуркациях, и были исследованы некоторые конкретные примеры таких отображений.

[8]Напомним, что псевдогиперболическим аттрактором называется такой странный аттрактор, для которого фазовое пространство в его поглощающей области допускает инвариантное расслоение на два трансверсальных подпространства, сильно сжимающее E^{ss} и центрально неустойчивое E^{cu}, такие, что на E^{ss} имеет место экспоненциальное сжатие (более сильное, чем любое возможное сжатие на E^{cu}), а в ограничение на E^{cu} имеет место экспоненциальное растяжение объемов. Последнее свойство является естественным препятствием для появления устойчивых периодических траекторий при всевозможных бифуркациях аттрактора.

риодических движений в модели Лоренца.// УМН, 1980, т.35, в.4, 214.

[6] Lorenz E.N., Deterministic nonperiodic flow. // J. of the Atmospheric Sciences, 1963, 20, 130-141 [Перевод на русский язык: Эдвард Н. Лоренц *Детерминированное непериодическое течение* – в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 88-116]

[7] Марсден Д., Попытки установить соотношение между уравнениями Навье-Стокса и турбулентностью. // в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 7-20.

[8] Рюэль Д., Такенс Ф., О природе турбулентности. // в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 117-151.

[9] Newhouse S., Ruelle D., Takens F., Occurrence of strange Axiom A attractors near quasiperiodic flows on T^m, $m \geq 3$. // Comm. Math. Phys. 64 (1978), no. 1, 35–40.

[10] Turaev D., Maps close to identity and universal maps in the Newhouse domain. // Comm. Math. Phys., 2015, 335, 1235-1277.

[11*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.// ДАН СССР, 1974, т.219, 6, 1281-1284.

[12*] Афраймович В.С., Шильников Л.П., Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем.// ПММ, 1977, т.41, 4, 618-627.

[13] Рощин Н.В., Опасные границы устойчивости в модели Лоренца. // Прикладная математика и механика, 1978, № 5, 950-952.

[14] Малкин М.И., О топологической сопряженности разрывных отображений отрезка.// Украинский математический журнал. 1980, т.32, N 5, 610-616.

[15] Малкин М.И., Интервалы вращения и динамика отображений лоренцевского типа. // Методы качественной теории динамических систем. Горьковский университет, 1985, 122-139.

[16] Малкин М.И., Кусочно-линейные модели отображений лоренцевского типа.// Методы качественной теории динамических систем. Горьковский университет, 1987, 147-161.

[17] Malkin M.I., Kneading decompositions and maximal measures of Lorenz-type maps.// Journal of Technical Physics, 1996, v.37, n 3-4, 383-386.

[18] Li M-C., Malkin M., Smooth Symmetric and Lorenz models for unimodal maps.// International Journal of Bifurcation and Chaos. 2003, Vol. 13, No.11, p.3353-3372.

[19] Tucker W., The Lorenz attractor exists.// Comptes Rendus de l'Academie des Sciences-Series I-Mathematics, 1999, v. 328(12), 1197-1202.

[20] Ovsyannikov I., Turaev D., Analytic proof of the existence of the Lorenz attractor in the extended Lorenz model.// http://arxiv.org/pdf/1508.07565v2.pdf

[21] Шашков М.В., Шильников Л.П., О существовании гладкого инвариантного слоения у отображений лоренцевского типа.// Дифф. Уравнения, 1994, т.30, N4, 586-595.

[22] Ruelle D., The Lorenz attractor and the problem of turbulence. // Lecture Notes in Math., 565 (1976), 146-158.

[23] Guckenheimer J., Strange, strange attractor. // in J. Marsden, M. MacCracen, The Hopf bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, New York (1976) 368-381. [перевод на русский язык, см. гл. 12 книги Дж.Марсден и М.Мак- Кракен “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980.]

[24] Williams R.F., The structure of Lorenz attractor.// Lecture Notes in Math., 1977, 615, p. 94-112 [Перевод на русский язык – в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 58-72].

[25] Jorke J., Jorke E., Metastable chaos: the translation to sustained chaotic behaviour in the Lorenz model.// J. Stat. Phys., 1979, 21(3), 263-278 [Перевод на русский язык – в кн.

“Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 193-210].

[26] Kaplan J., Jorke J.A., Preturbulence: a regime observed in a fluid model of Lorenz.// Comm. Math. Phys., 1979, v.67(2) [Перевод на русский язык – в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 211-238].

[27] Rand D., The topological classification of Lorenz attractor.// Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. , 1978, 83, part 3, 451-460 [Перевод на русский язык – в кн. “Странные аттракторы”, М.: Мир, 1981, с. 239-251].

[28] Robinson C., Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type.// Nonlinearity, 1989, 2, 495-518.

[29] Robinson C., Homoclinic bifurcation to a transitive attractor of Lorenz type II.// SIAM J. Math. Anal., 1992, no. 5, 1255-1268

[30] Rucklidge A., Chaos in a low-order model of magnetoconvection.// Physica D, 1993, v.62, 323-337.

[31] Шильников А.Л., Бифуркации и хаос в системе Мориока-Шимицу.// “Межвузовский сб. Методы КТДУ”, Горький, 1986, 180-183.

[32] Shilnikov A.L., On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimuizu-Morioka model.// Physica D, 1993, v.62, 338-346

[33] Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Normal forms and Lorenz attractors.// Bifurcation and Chaos, 1993, v.3, 1123-1139.

[34] Быков В.В., Шильников А.Л., О границах области существования аттрактора Лоренца.// Методы качественной теории и теории бифуркаций, Горький, 1989, 151-159.

[35] Быков В.В., О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом.// “Методы качественной теории диф. уравнений”, Горький, 1978, 3-32.

[36] Быков В.В., О бифуркациях динамических систем, близких к системе с сепаратрисным контуром, содержащим седло-фокус.// “Методы качественной теории диф. уравнений”, Горький, 1980, 44-72.

[37] Bykov V.V., The bifurcations of separatrix contours and chaos.// Physica D, 1993, v.62, 290-299.

[38] Aframovich V.S., Shilnikov L.P., Strange attractors and quasiattractors.// “Nonlinear Dynamics and Turbulence”, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph (Boston,Pitmen), 1983.

[39] Shimizu T., Morioka N., Chaos and limit cycles in the Lorenz model.// Physics letters, (1978) Vol. 66A, No. 3, 182-184.

[40] S.V. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, C. Simo, D. Turaev, Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors. // Int.J. Bifurcation and Chaos, 2005, v.15, 3493-3508.

[41] S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, D.V. Turaev, Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps. // Math. Model. Nat. Phenom., 2013, Vol.8, No.5, pp. 32-54.

[42] Тураев Д.В., Шильников Л.П., Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа.// Доклады Академии Наук, 2008, 418(1).

[43] Тураев Д.В., Шильников Л.П., Пример дикого странного аттрактора.// Матем. сборник, 1998, т.189, N2, 137-160.

[44] Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П., К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений. // Нелинейная Динамика, 2012, т.8, №1, 3-28.

[45] Barrio R., Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Kneadings, symbolic dynamics, and painting Lorenz chaos. a Tutorial.// J. Bifurcations and Chaos, Vol. 22, No. 4, 1230016, 2012.

Доклады Академии наук СССР
1977, Том 234, № 2, с. 336-339

УДК 517.91 *МАТЕМАТИКА*

В.С. АФРАЙМОВИЧ, В.В. БЫКОВ, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

О ВОЗНИКНОВЕНИИ И СТРУКТУРЕ АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА

(Представлено академиком А.В. Гапоновым-Греховым 17 XII 1976)

Одной из актуальных проблем, восходящей к исследованиям Больцмана, является решение следующего вопроса: могут ли физические процессы, которые носят ярко выраженный "стохастический" характер, получить объяснение в рамках динамического описания без привлечения дополнительных гипотез, использующих идеи теории вероятности. Особенно усилился интерес к этой проблеме в последнее время, что можно объяснить с одной стороны, современными достижениями тех разделов качественной теории многомерных систем, в основе которых лежит понятие грубости, а, с другой стороны, построением новых динамических моделей реальных процессов, которые нельзя уже отнести к традиционным задачам теории нелинейных колебаний, поскольку они имеют принципиально новые типы движений – гомоклинические кривые Пуанкаре. Само по себе существование гомоклинической кривой, влекущее за собой существование счетного множества периодических движений, континуум устойчивых по Пуассону и т. д. ([1,2]), еще не означает "стохастичности": необходимо, чтобы гомоклинические кривые входили в состав притягивающих множеств, так называемых "странных аттракторов" ([5]). При этом естественно возникает задача о математической структуре аттракторов, поскольку именно с ними связан вопрос об адекватности модели с физически наблюдаемым стохастическим процессом. Из теории гиперболических множеств известно, что странными аттракторами в грубых системах могут быть У-системы, соленоиды Вильямса и т. д. Однако возможность их появления в модельных системах остается пока проблематичной.

Цель настоящей работы состоит в решении этой задачи в двух конкретных случаях, возникающих в гидродинамике и нелинейной оптике. Первая модель связывается с попыткой объяснения явления турбулентности конвективного движения жидкости при помощи системы

$$\dot{x} = -\sigma\,(x-y), \;\; \dot{y} = -xz + rx - y, \;\; \dot{z} = xy - bz, \tag{5.1}$$

выведенной Зальцманом ([3]) из уравнений Навье-Стокса с использованием галеркинской процедуры. В этой модели Лоренц ([4]) счетом на ЭВМ обнаружил непериодический характер траекторий.[1].

[1]Изучению свойств системы (1) посвящены также работы ([5,11]), препринт О. Ланфорда и работа Е. Б. Вул и Я. Г. Синая.

Вторая модель

$$\dot{x} = -\gamma_3 (x - y), \quad \dot{y} = \gamma_2 (xz - y), \quad \dot{z} = -\gamma_1 (z - z_0) + \gamma_1 (z_0 - 1)xy, \tag{5.2}$$

была построена для объяснения генерации колебаний в оптическом квантовом генераторе (см. обзор ([6])). При этом интересно отметить, что, несмотря на различную физическую природу рассматриваемых задач системы (1) и (2) имеют одинаковое математическое описание, поскольку (2) приводится к виду (1) с $\sigma = \gamma_3\gamma_2^{-1}$, $r = z_0$, $b = \gamma_1\gamma_2^{-1}$. Поэтому достаточно ограничиться изучением системы (1).

Зафиксируем в (1) параметры b и r, положив $b = 8/3$, $r = 28$, а σ будем; менять от 1 до 10. Заметим, что $b = 8/3$, $r = 28$, $\sigma = 10$ являются теми значениями параметров, при которых Лоренц обнаружил хаотическое поведение траекторий ([4,5]). В основе нашего рассмотрения лежит счет на ЭВМ некоторых основных траекторий; использование методов теории бифуркаций;, численная проверка условий теоремы, приведенной ниже для отображения секущей $z = 27$. Все это в целом позволяет, на наш взгляд, воссоздать картину эволюции структуры фазового пространства. Это описание удобно представить состоящим из следующих этапов.

1. При $\sigma \in [1, \sigma_1)$, где $\sigma_1 \approx 3,42$, система (1) имеет три состояния равновесия $O(0,0,0), O_1$ и O_2, из которых O всегда является седлом, имеющим двумерное устойчивое инвариантное многообразие W^+ и две выходящих траектории Γ_1 и Γ_2, которые будем называть сепаратрисами. Одна из них, для определенности Γ_1, стремится при $t \to \infty$ к устойчивому состоянию равновесия O_1, а другая – Γ_2 – к O_2.

2. При $\sigma = \sigma_1$ каждая из сепаратрис Γ_1 и Γ_2 становится двоякоасимптотической к седлу O. Поскольку седловая величина $\nu = \max\{\lambda_1, \lambda_2\} + \lambda_3 > 0$, где λ_1 и λ_2 – отрицательные корни характеристического уравнения, а λ_3 – положительный корень, и поскольку Γ_1 и Γ_2 не лежат в неведущем многообразии седла, то к ним применимы результаты работы ([7]), означающие, что из каждой петли сепаратрисы при переходе σ через σ_1 родится по одному седловому периодическому движению L_1 и L_2 [2]. Более того, вместе с рождением L_1 и L_2 появляется инвариантное одномерное предельное множество Ω_1 сложной природы [3] , траектории которого находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе стороны символических последовательностей из двух символов. При этом периодическим последовательностям соответствуют периодические движения седлового типа. Однако это множество не является притягивающим и, следовательно, устойчивыми предельными движениями остаются O_1 и O_2. Такая ситуация будет иметь место для значений σ из (σ_1, σ_2), где $\sigma_2 \approx 5,87$, только теперь Γ_1 будет стремиться к O_2, а Γ_2 – к O_1.

3. Момент $\sigma = \sigma_2$ является бифуркационным. Он характерен тем, что если раньше Γ_1 и Γ_2 шли на устойчивые фокусы O_2 и O_1 (а вместе с ними и траектории, близкие к Ω_1), то при $\sigma = \sigma_2$ сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 будут стремиться к седловым периодическим движениям L_2 и L_1 соответственно.[4] Это приводит к тому, что на месте Ω_1 возникает уже двумерное

[2]Вопросам, связанным с бифуркациями петли сепаратрисы, посвящены работы ([7–9]). Рассмотрение в ([8]) наиболее близко к ситуации, имеющей здесь место. В ([10]) изучалась сложная структура поведения траекторий в расширенной окрестности седло-фокуса.

[3]Как нам сообщил В. М. Алексеев, существование множества Ω_1 с указанными далее его свойствами независимо доказано также А. А. Симоновым.

[4]О структуре окрестности контура $O \cup \Gamma_1 \cup L_2 \cup \Gamma_3$, где $\Gamma_3 \subset W_2^- \cap W^+$ (через W_2^- обозначено неустойчивое многообразие периодического движения L_2), а также о характере бифуркаций при малых изменениях системы, см. обзорный доклад Л. П. Шильникова, представленный на VI конференции по нелинейным колебаниям в Берлине (1975 г.).

предельное множество Ω_2^*.

4. При $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_4]$, $\sigma_4 = 10$ система будет иметь устойчивое множество Ω_2, обладающее свойствами:

1) Ω_2 является негрубым; это связано, в частности, с тем, что седло O принадлежит этому множеству вместе со своими сепаратрисами Γ_1 и Γ_2, которые на всюду плотном множестве значений σ из $[\sigma_2, \sigma_4]$ возвращаются в седло.

2) Периодические движения всюду плотны в Ω_2 и являются грубыми седлового типа.

3) В Ω_2 имеет место экспоненциальное разбегание траекторий, столь характерное для систем с перемешиванием и непрерывным спектром.

4) Исчезновение периодических движений при изменении σ возможно только путем влипания их в петли сепаратрис седла O.

Заметим, что негиперболичность Ω_2 предсказывалась Рюэлем на основании анализа поведения траекторий в численном эксперименте Ланфорда (см. ([5])).

5. В интервале $\sigma \in (\sigma_2, \sigma_3))$, где $\sigma_3 \approx 6,47$, в фазовом пространстве будут существовать три устойчивых предельных множества: множество Ω_2, которое будем называть аттрактором Лоренца и состояния равновесия O_1 и O_2. Границей области притяжения аттрактора Лоренца являются устойчивые многообразия периодических движений L_1 и L_2. Таким образом, в рассматриваемом интервале σ имеет место жесткий режим возбуждения стохастичности.

6. При σ, стремящемся к σ_3, периодические движения L_1 и L_2 стягиваются к состояниям равновесия O_1 и O_2, состояния равновесия O_1 и O_2 при $\sigma = \sigma_3$ теряют устойчивость [5], что приводит к жесткому режиму возникновения стохастичности.

7. В интервале $\sigma \in [\sigma_3, \sigma_4]$ единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца.

При обратном изменении σ от σ_4 до σ_2 изображающая точка будет находиться в аттракторе Лоренца. При $\sigma = \sigma_2$ это предельное множество теряет свою устойчивость, и при дальнейшем изменении о изображающая точка покидает окрестность аттрактора Лоренца. Новым установившимся режимом системы станет либо O_1, либо O_2. Таким образом, имеющее здесь место явление гистерезиса сопровождается эффектом, связанным со случайным характером выбора изображающей точкой своего нового предельного режима [6].

З а м е ч а н и е. Аналогичное описание имеет место при фиксированных $\sigma = 10$, $b = 8/3$ и изменении числа Рэлея r от 10 до 28. Соответствующие бифуркационные значения r будут $r_1 \approx 13,92$, $r_2 \approx 24,06$, $r_3 \approx 24,74$.

Приведенные выше утверждения о возникновении и структуре аттрактора Лоренца основаны на изучении отображения $T(\mu)$ по траекториям динамической системы секущей, трансверсальной к устойчивому многообразию состояния равновесия типа седло, со свойствами, которым, как можно проверить численным счетом, удовлетворяет отображение секущей $z = 27$ в себя в системе (1). Значение $\mu = 0$ соответствует бифуркационному значению $\sigma = \sigma_1$, когда сепаратрисы седла идут в него же, а $\mu = \mu_0$ соответствует $\sigma = \sigma_2$. Формулируемая ниже теорема дает общий механизм появления аттракторов в подобной ситуации.

Отображение $T(\mu)$ будем задавать при помощи двух отображений $T_1(\mu)$ и $T_2(\mu)$. Отображение $T_1(\mu)$, где $0 < \mu \leq 1$, прямоугольника $\Pi_1 : |x| \leq 1,\ 0 < y \leq 1$, записывается в виде $\bar{x} = f_1(x, y, \mu)$, $\bar{y} = g_1(x, y, \mu)$, где функции f_1 и g_1 являются C^1-гладкими. Будем

[5]При $b = 8/3$ ляпуновская величина при потере устойчивости O_i положительна.

[6]В соответствии с ([8]) граница $\sigma = \sigma_2$ со стороны больших значений σ будет динамически неопределенной опасной границей

предполагать выполненными следующие условия: 1) при всех μ отображение $T_1(\mu)$ имеет грубую неподвижную точку типа седло $M_1^* = (x_1^*(\mu), y_1^*(\mu)), x_1^*(\mu) > 0, y_1^*(\mu) > 0$, корни λ и γ характеристического уравнения в которой положительны; 2) отрезок $y = y_1^*(\mu)$, $|x| \le 1$, принадлежит устойчивому инвариантному многообразию точки M_1^*; 3) функции f_1 и g_1 допускают доопределение по непрерывности на отрезок $y = 0$, $|x| \le 1$, так что

$$\lim_{y\to 0} f_1(x,y,\mu) = x_1^0(\mu), \quad \lim_{y\to 0} g_1(x,y,\mu) = y_1^0(\mu),$$

$$0 < x_1^0(\mu) < 1, \quad -1 < y_1(\mu) < 0;$$

4) выполнены условия

$$\left\|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right\| < 1, \quad \left\|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^{-1}\right\| < 1,$$

$$1 - \left\|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^{-1}\right\| \left\|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right\| > 2\left\{\left\|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right\| \left\|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^{-1}\right\| \left\|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right\|\right\}^{1/2}, \qquad (*)$$

$$\left\|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial f_1}{\partial y}\right\| \left\|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right\| < \left(1 - \left\|\frac{\partial f_1}{\partial x}\right\|\right)\left(1 - \left\|\left(\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)^{-1}\right\|\right).$$

Определим отображение $T_2(\mu)$ прямоугольника $\Pi_2 : |x| \le 1, -1 \le y < 0$ следующим образом: $\bar{x} = f_2(x,y,\mu)$, $\bar{y} = g_2(x,y,\mu)$, где $f_2(x,y,\mu) = -f_1(-x,-y,\mu)$, $g_2(x,y,\mu) = -g_1(-x,-y,\mu)$. Из определения $T_2(\mu)$ непосредственно следует, что неподвижной точкой $T_2(\mu)$ будет точка $(x_2^*(\mu), y_2^*(\mu))$, $x_2^*(\mu) = -x_1^*(\mu)$, $y_2^*(\mu) = -y_1^*(\mu)$ и образом отрезка $y = 0$, $|x| \le 1$ для доопределенного отображения будет точка $(x_2^0(\mu), y_2^0(\mu))$, где $x_2^0(\mu) = -x_1^0(\mu)$, а $y_2^0(\mu) = -y_1^0(\mu)$.

Зададим разрывное отображение $T(\mu)$ следующим образом: $T(\mu) = T_i$ на Π_i, $i = 1, 2$.

Теорема *Предположим, что функция $\varphi(\mu) = y_2^0(\mu) - y_1^*(\mu)$ является монотонной, $\varphi(\mu) > 0$ при $0 < \mu < \mu_0$, $\varphi(\mu) < 0$ при $\mu_0 < \mu \le 1$. Тогда:*

(I) *при $0 < \mu < \mu_0$ отображение $T(\mu)$ будет иметь единственное в $\Pi_1 \cup \Pi_2$ инвариантное множество $\Omega_1(\mu)$, на котором $T(\mu)$ эквивалентно сдвигу в схеме Бернулли из двух символов;*

(II) *при $\mu_0 < \mu \le 1$ единственным устойчивым предельным множеством отображения $T(\mu)$ в $\Pi_1 \cup \Pi_2$ будет одномерное множество $\Omega_2(\mu)$, которое:* 1) *состоит из двух компонент связности;* 2) *является замыканием множества грубых периодических точек отображения $T(\mu)$* 3) *является негрубым;* 4) *для счетного всюду плотного на $[\mu_0, 1]$ множества значений параметра μ отображение $T(\mu)$ на $\Omega_2(\mu)$ допускает конечное марковское разбиение и не допускает для континуума значений μ* [7].

Авторы благодарят Н. В. Рощина за обсуждение, которое позволило установить связь между моделями (1) и (2)[8].

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики

Поступило
17 XII 1976

[7] О существовании марковских разбиений для базисных множеств в системах, удовлетворяющих аксиоме А. Смейла и о том, что указанные множества являются непрерывными образами конечных марковских цепей см. ([12–14]).

[8] Как нам сообщил А.А. Андронов, эта связь была установлена раньше в ([15]).

при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

ЛИТЕРАТУРА

(1) S. Smale, Symp. in Honor of Marston Morse, Princeton, 1965, p. 63. (2) Л.П. Шильников, Матем. сб., т. 74 (116), № 3, 378 (1967). (3) B. Saltzman, J. Atmos. Sci.,. 19, 329 (1962). (4) E.N. Lorenz, ibid., v. 20, 130 (1963). (5) D. Ruelle, The Lorenz atractor and the Problem of Turbulence, Preprint, 1975. (6) А.И. Ораевский, А.В. Успенский, Тр. ФИАН, Квантовая радиофизика, т. 31, 96 (1965). (7) Л.П. Шильников, Матем. сб., т. 77 (119), № 3, 461 (1968). (8) Л.П. Шильников, ДАН, т. 224, № 5, 46 (1975). (9) Л.П. Шильников, Матем. сб., т. 61 (104), 443 (1963). (10) Л.П. Шильников, там же, т. 31 (123), 92 (1970). (11) J.B. McLaughlin, P.C. Martin, Phys. Rev., v. 12, 1, 186 (1975). (12) В.М. Алексеев, УМН, т. 24, № 5, 227 (1969). (13) Я.Г. Синай, Функц. анализ и его прилож., т. 2, № 1, 61 (1968). (14) R. Bowen, Am. Math., v. 92, 725 (1970). (15) H. Haken, Phys. Letters, v. 53A, N 1, 77, (1975)

1982 | Труды Московского Математического Общества | т.44, с. 150-212

Памяти В.М. Алексеева

УДК 517.92

В.С. АФРАЙМОВИЧ, В.В. БЫКОВ, Л.П. ШИЛЬНИКОВ

О ПРИТЯГИВАЮЩИХ НЕГРУБЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ ТИПА АТТРАКТОРА ЛОРЕНЦА

В последнее время широкое внимание специалистов привлечено к известной модели Лоренца

$$\dot{x} = -\sigma \cdot (x - y),\ \dot{y} = r \cdot x - y - x \cdot y,\ \dot{z} = -b \cdot z + x \cdot y, \tag{1}$$

полученной при исследовании конвективного движения жидкости [1,2]. Дело в том, что в ней обнаружено притягивающее предельное множество, траектории которого имеют явно выраженные черты стохастического поведения [2]. Помимо естественного интереса, вызванного гидродинамическим происхождением этих уравнений и попыткой объяснения турбулентности, указанная модель имеет непосредственный интерес и для теории нелинейных колебаний [1], поскольку к (1) сводятся некоторые модели лазеров [18,19], а также (в чем нетрудно убедиться) модель дискового динамо [20]

$$\frac{d\omega}{dt} = R - z \cdot y - \nu \cdot \omega,\quad \frac{dz}{dt} = \omega \cdot y - z,\quad \frac{dy}{dt} = \nu \cdot (x - y). \tag{2}$$

В связи с этим возникает вопрос, как в подобного типа системах может появляться притягивающее множество сложной природы – “странный аттрактор” – и какова его структура. Для системы (1) эта задача была решена с привлечением ЭВМ в нашей работе [19]. В настоящей работе дается как доказательство результатов, анонсированных в [19,21], так и дальнейшее изучение структуры устойчивых предельных множеств, которые могут возникать из аттракторов типа аттрактора Лоренца.

При этом мы не ограничиваемся только симметричным случаем (уравнение (1) инвариантно относительно замены $(x, y) \to (-x, -y)$, а рассматриваем “общее двухпараметрическое” семейство[2]. Кроме того, наряду с вышеописанным случаем возникновения аттрактора Лоренца рассматриваются еще два случая, связанные с рождением петель сепаратрис периодических движений с отрицательными мультипликаторами. В настоящей работе мы ограничиваемся для простоты 3-мерным случаем. Многомерный случай, когда в седле только

[1]Конечно, динамические модели, в которых отмечалось сложное поведение траекторий, встречались и ранее. Однако они не вызывали столь большого интереса либо по причине своей узкой направленности, либо из-за того, что сложные эффекты обнаруживались в нефизической области параметров, либо потому, что такие модели не поддавались сколько-нибудь разумному анализу, поскольку притягивающее множество при малых сдвигах параметров претерпевало чудовищные изменения, сопровождаемые появлением и исчезновением устойчивых периодических движений. Возникающие в таких задачах математические вопросы отчасти отражены в работах [3-17].

[2]Такое рассмотрение представляет не только чисто математический, но и прикладной интерес.

один характеристический корень положителен, а остальные имеют отрицательные реальные части, причем наименьший по модулю из них действителен, полностью аналогичен трёхмерному.

С момента посылки работы [19] в печать нам стал известен и ряд других работ, связанных с изучением негрубых аттракторов. Это прежде всего работы Вильямса и Гукенхеймера, в которых приведены геометрические конструкции негрубых аттракторов типа Лоренца и указаны различающие их инварианты [22,23], а также работа Л.А. Бунимовича и Я.Г. Синая [24], в которой аттракторы изучаются с метрической точки зрения. В связи с тем, что исследование негрубых аттракторов, содержащих состояние равновесия типа "седло", сводится к исследованию разрывных двумерных отображений, усилился интерес к изучению прежде всего одномерных разрывных отображений; здесь отметим работы Косякина и Сандлера [25], Леонова [26], Симонова [27], Рэнда [28], Милнора и Тёрстена [29], Малкина [30].

Среди работ, посвященных численному исследованию модели (1), укажем работы [31-37]. В частности, отметим, что в работе Йорка и Каплана [34] были указаны бифуркационные значения r_1 и r_2, совпадающие с нашими. При оформлении настоящей работы нам стала известна также работа Симонова [38], в которой анонсируется ряд результатов, частично пересекающихся с результатами данной работы.

Авторы выражают благодарность А.А. Андронову, Д.В. Аносову, Н.В. Дерендяеву, Ф.В. Должанскому, Г.М. Заславскому, О.А. Ладыженской, Е.А. Леонтович, С.П. Новикову, Я.Г. Синаю, Б.В. Чирикову, В.И. Юдовичу за полезные обсуждения.

§ 1. **Постановка задачи. Формулировка результатов**

Будем рассматривать пространство $\mathfrak{X}_1(\mathcal{M})$ C^r-гладких векторных полей с C^1-топологией на C^∞-гладком ориентируемом трехмерном многообразии $\mathcal{M}$. Предположим, что в области $U \subset \mathfrak{X}_1(\mathcal{M})$ каждое векторное поле X имеет грубое состояние равновесия O типа "седло". При этом для корней характеристического уравнения поля X в точке O справедливы неравенства: $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$ и седловая величина $\sigma = \lambda_2 + \lambda > 0$. Устойчивое двумерное многообразие седла O обозначим через $W^s(X)$, а неустойчивое, состоящее из O и выходящих из O траекторий Γ_1 и Γ_2, которые будем называть сепаратрисами, через $W^u(X)$. Как известно, $W^s(X)$ и $W^u(X)$ гладко зависят от X на каждом компактном подмножестве. При этом можно считать, что X в некоторой локальной карте $v = \{x_1, x_2, x_3\}$ записывается в виде:

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + P_i(x_1, x_2, x_3); i = 1, 2, 3; P_i \in C^r.$$

Предположим, что для системы $X_0 \subset U$ выполнены следующие условия: $\Gamma_i \subset W^s(X_0), i = 1, 2$, т.е. Γ_i являются двоякоасимптотическими к O.

Для дальнейшего воспользуемся некоторыми понятиями и сведениями из [39,40]. Из условия $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ следует, что неведущее подмногообразие $W_0^s(X)$ многообразия $W^s(X)$, состоящее из точки O и двух траекторий поля X, касающихся оси x_1 в точке O, разделяет $W^s(X)$ на две открытые области $W_+^s(X)$ и $W_-^s(X)$, т.е.

$$W^s(X) \cap v = (W_+^s(X) \cap v) \cup (W_-^s(X) \cap v) \cup (W_0^s(X) \cap v).$$

Для изучения бифуркаций системы X_0 существенно, возвращаются ли в ней Γ_1 и Γ_2 в O с одной стороны, т.е. $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subset W_i^s(X_0)$, $i = +$ либо $i = -$, или же с разных. Ниже

предполагается, что $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \subset W^s_+(X_0)$ (при этом Γ_1 и Γ_2 входят в седло, касаясь оси x_2). Пусть v_1 и v_2 – некоторые достаточно малые окрестности "петель сепаратрис" $\Gamma_1 \cup O$ и $\Gamma_2 \cup O$ (рис. 1). Обозначим через $\mathfrak{M}_i$ компоненту связности пересечения $W^s(X_0)$ с v_i, содержащую $\Gamma_i, i = 1, 2$. Как следует из [40], в общем случае $\mathfrak{M}_i$ есть двумерное C^0-подмногообразие M, гомеоморфное либо цилиндру, либо листу Мёбиуса. Таким образом, возможны три случая: случай A (ориентируемый): $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – цилиндры, случай B (полуориентируемый) $\mathfrak{M}_1$ – цилиндр, $\mathfrak{M}_2$ – лист Мёбиуса, случай C (неориентируемый) $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ – листы Мёбиуса.

Из сделанных предположений следует, что X_0 принадлежит бифуркационному множеству B^2_1 коразмерности 2. При этом B^2_1 есть пересечение двух бифуркационных "пленок" B^1_1 и B^1_2 коразмерности 1 каждая, где B^1_1 соответствует петле $\Gamma_1 \cup O$, а B^1_2 – петле $\Gamma_2 \cup O$. В подобных ситуациях естественно рассматривать двухпараметрическое семейство векторных полей $X(\mu), \mu = (\mu_1, \mu_2)$, $|\mu| \le \mu_0$, $X(0) = X_0$, трансверсальное к B^2_1, считая при этом, что ось μ_i соответствует петле $\Gamma_i \cup O$. Трансверсальность же означает, что Γ_1 "отклоняется" от $W^s(X(\mu))$ на величину порядка μ_1, а Γ_2 – на величину порядка μ_2. Поэтому для удобства мы будем иллюстрировать дальнейшее на плоскости параметров.

Как известно, при сделанных предположениях при переходе к близкой к X_0 системе из петли сепаратрисы может родиться только одно периодическое движение, притом седлового типа. Для определенности будем считать, что из петли $\Gamma_1 \cup O$ рождается периодическое движение L_1 при $\mu_1 > 0$, а из $\Gamma_2 \cup O$ – L_2 при $\mu_2 > 0$. Соответствующую область в U, которая является пересечением областей устойчивости L_1 и L_2, т. е. область, у каждой системы в которой периодические движения L_1 и L_2 являются грубыми, обозначим через U_0. Устойчивое многообразие L_i для системы $X \in U_0$ обозначим через $W^s_i(X)$, а неустойчивое – через $W^u_i(X)$, $i = 1, 2$. В области U_0 для каждого из указанных выше трех случаев имеются также еще две бифуркационные пленки: B^1_3 и B^1_4.

В случае A B^1_3 соответствует включению $\Gamma_1 \subset W^s_2(X)$, B^1_4 – включению $\Gamma_2 \subset W^s_1(X)$. В случае B B^1_3 соответствует $\Gamma_1 \subset W^s_1(X)$, а B^1_4 – $\Gamma_2 \subset W^s_1(X)$. В случае C наряду с указанными рождающимися движениями L_1 и L_2 из конфигурации $\Gamma_1 \cup O \cup \Gamma_2$ рождается седловое периодическое движение L_3, делающее по одному обороту "вдоль" $\Gamma_1 \cup O$ и $\Gamma_2 \cup O$, причем если $W^s_i(X)$ и $W^u_i(X)$ являются вложенными листами Мёбиуса, $i = 1, 2$, то устойчивое $W^s_3(X)$ и неустойчивое $W^u_3(X)$ многообразия периодического движения L_3 – цилиндры. Пленкам B^1_3 и B^1_4 в этом случае соответствуют включения $\Gamma_1 \subset W^s_3(X)$ и $\Gamma_2 \subset W^s_3(X)$.

Предположим, что B^1_3 и B^1_4 пересекаются трансверсально по бифуркационному множеству B^2_2 коразмерности 2. В двухпараметрическом семействе $X(\mu)$ это означает, что кривые B^1_3 и B^1_4 пересекаются в некоторой точке $\mu^1 = (\mu_{11}, \mu_{12}, |\mu^1| < \mu_0)$ (рис. 2).

Область между B^1_3 и B^1_4 обозначим через U_1. В малой окрестности начала координат в случаях A и B уравнения B^1_3 будут иметь вид:

$$\mu_1 = a_1 \mu_2^{1/\alpha}(1 + ...), \mu_1 = b_1 \mu_2^{1/\alpha}(1 + ...),$$

а в случае C: $\mu_1 = c_1 \mu_2^{1/\alpha^2}(1 + ...)$. Уравнения B^1_4 будут: $\mu_2 = a_2 \mu_1^{1/\alpha}(1 + ...)$ в случае A и

$$\mu_2 = b_2 \mu_1^{1/\alpha^2}(1 + ...), \mu_2 = c_2 \mu_1^{1/\alpha^2}(1 + ...)$$

в случаях B и C. Здесь $\alpha = -\lambda_2/\lambda_3 < 1$, $a_1, ..., c_2$ положительны, а многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при стремлении аргумента к нулю. Можно показать (это можно вывести и из [40]), что в U существует такая достаточно малая ε-окрестность U_ε

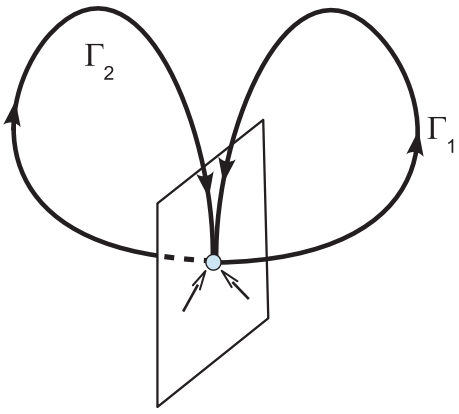


Рис. 1

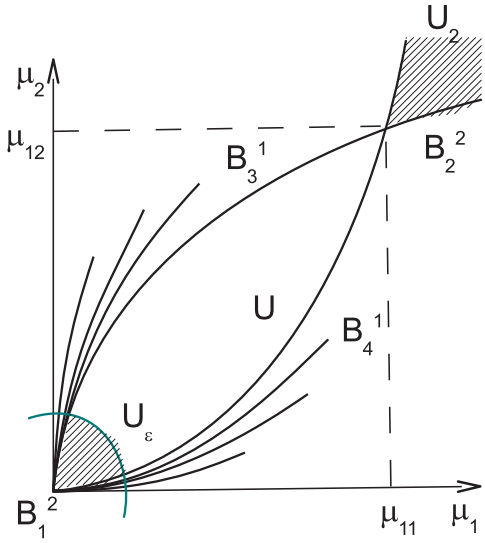


Рис. 2

системы X_0, что для каждой системы $X \in U_\varepsilon \cap U_1$ будет существовать одномерное предельное множество, гомеоморфное надстройке над некоторой топологической марковской цепью. Доказательство этого факта следует из рассмотрения отображения T по траекториям системы X некоторой трансверсальной к траекториям площадки, которую пересекают Γ_1 и Γ_2.

Обобщение этой ситуации требует существования глобальной площадки без контакта. Поэтому предположим, что для каждой системы $X \subset U$ существует площадка без контакта D со следующими свойствами:

1). На D можно ввести евклидовы координаты (x, y) так, что

$$D = \{(x, y)|\ |x| \le 1, |y| \le 2\}.$$

2). Уравнение $y = 0$ описывает компоненту связности S пересечения $W^s(X) \cap D$ такую, что все ω-полутраектории, начинающиеся на S, не имеют точек пересечения с DВ при $t > 0$.

3). По траекториям системы определены отображения $T_1 : D_1 \to D$ и $T_2 : D_2 \to D$, где

$$D_1 = \{(x, y)|\ |x| \le 1, 0 < y \le 1\}, \quad D_2 = \{(x, y)|\ |x| \le 1, -1 \le y < 0\},$$

причем T_i записывается в виде:

$$\bar{x} = f_i(x, y), \quad \bar{y} = g_i(x, y), \ f_i, g_i \in C^r, \quad i = 1, 2.$$

4). f_i и g_i допускают доопределение по непрерывности на S, причем

$$\lim_{y \to 0} f_i(x, y) = x_i^{**}, \quad \lim_{y \to 0} g_i(x, y) = y_i^{**}, \quad i = 1, 2.$$

5). $T_1 D_1 \cap D \subset \Pi_1 \equiv \{(x, y)|\ 1/2 \le x \le 1, |y| < 2\}$,
$T_2 D_2 \cap D \subset \Pi_2 \equiv \{(x, y)|\ -1 \le x \le -1/2, |y| < 2\}$.

Из рассмотрения поведения траекторий вблизи $W^s(X)$ следует [39,40], что в малой окрестности S имеют место следующие представления:

$$f_1 = x_1^{**} + \varphi_1(x, y) y^\alpha, \quad g_1 = y_1^{**} + \psi_1(x, y) y^\alpha,$$
$$f_2 = x_2^{**} + \varphi_2(x, y)(-y)^\alpha, \quad g_2 = y_2^{**} + \psi_2(x, y)(-y)^\alpha,$$

где функции $\varphi_1, ..., \psi_2$ C^r-гладки по x, и, кроме того, справедливы оценки:

$$\left|\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot y^{1-\beta_1}\right| < K_1, ..., \left|\frac{\partial \psi_2}{\partial y} \cdot y^{1-\beta_4}\right| < K_4,$$

где $K_1, ..., K_4$ – константы, $\beta_1, ..., \beta_4$ – положительные числа меньше 1.

Отметим, что точка $P_i(x_i^{**}, y_i^{**})$ есть первая точка пересечения Γ_i с D, $i = 1, 2$. Пусть

$$T = T_i \| D_i, \ \ (f, g) = (f_i, g_i) \ \text{ на } \ D_i, \ i = 1, 2.$$

6). Наложим теперь на T следующие ограничения:

$$\begin{aligned} &\text{а) } \|f_x\| < 1, \quad \text{б) } \|g_y^{-1}\| < 1, \\ &\text{в) } 1 - \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_x\| > \sqrt{\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1} \cdot f_y\|}, \\ &\text{г) } \|g_y^{-1} \cdot f_y\| \cdot \|g_x\| < (1 - \|f_x\|)(1 - \|g_y^{-1}\|). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь и ниже $\| \cdot \| = \sup\limits_{(x,y) \in D \setminus S} | \cdot |$.

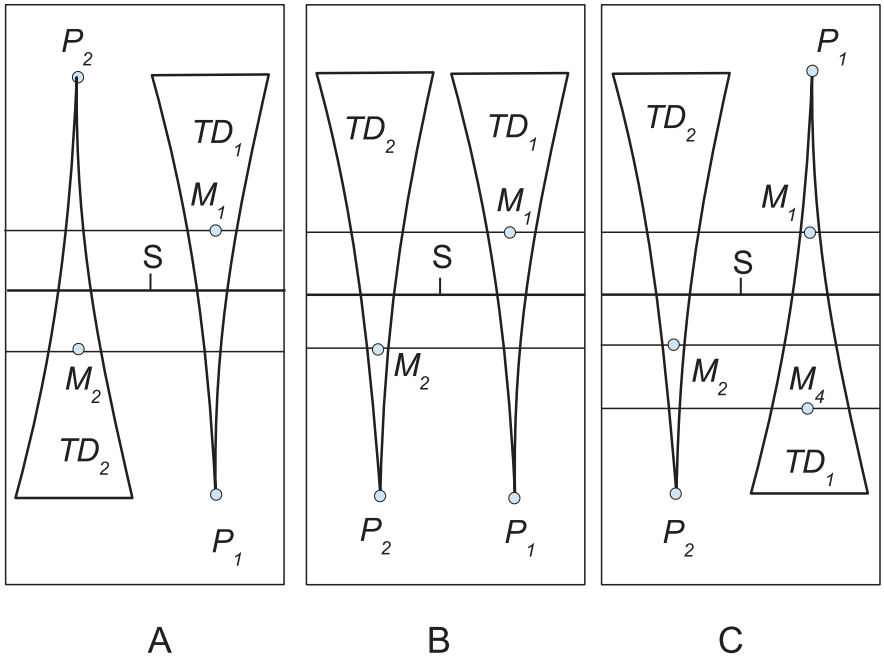


Рис. 3

Отметим, что для системы в малой окрестности U_ε системы X_0 все условия 1)-6) выполнены. Поэтому достаточно естественно требовать, чтобы они были выполнены и для системы из U. В частности, отметим следующее: поскольку в U_ε ψ_1 и ψ_2 не равны нулю и представимы в виде $\psi_i = (-1)^{i+1} a_i + ...,\ i = 1, 2,\ a_i \neq 0$ (многоточия означают члены, стремящиеся к нулю при $y \to 0$, причем для X_0 в случае A: $a_1 > 0, a_2 > 0$; в случае B:

$a_1 > 0, a_2 < 0$; в случае C: $a_1 < 0, a_2 < 0$, то из условия 6) следует, что понятия ориентируемого, полуориентируемого и неориентируемого случая можно распространить на любую систему X из U. При этом получаем, что для существования периодических движений L_1, L_2 в случае A требуется $P_1 \in D_2$, $P_2 \in D_1$; в случае B: $P_1 \in D_2$, $P_2 \in D_2$; а в случае C: $P_1 \in D_1$, $P_2 \in D_2$. Обозначим через $M_i(x_i^*, y_i^*)$ точку пересечения L_i с D, $i = 1, 2$. В случае C выделим также точки пересечения L_3 с D:

$$M_3(x_3^*, y_3^*) \in D_1, \;\; M_4(x_4^*, y_4^*) \in D_2, \;\; TM_3 = M_4, \; TM_4 = M_3.$$

Будем предполагать, что уравнение связной компоненты $W_i^s \cap D$, содержащей точку M_i есть $y = y_i^*$, $i = 1, 2$, а в случае C и уравнение $W_j^s \cap D$, содержащей точку M_j есть $y = y_j^*$, $i = 3, 4$. Вообще говоря, в силу (1.1) эти уравнения могут быть записаны в виде $y = y_i(x)$, $i = 1 \div 4$, однако, как будет видно из дальнейшего, для задачи о существовании и структуре аттрактора это не имеет никакого значения.

В случае $X \in U_1$ взаимное расположение точек и следов на D устойчивых многообразий изображено на рис. 3, т. е. в случае A: $y_2^{**} - y_1^* > 0, y_1^{**} - y_2^* < 0$, в случае B: ординаты точек TP_1 и TP_2 больше y_1^*, а в случае C: $y_3^* - y_1^{**} < 0, y_4^* - y_2^{**} > 0$. Обозначим через Σ замыкание множества точек всех траекторий, целиком содержащихся в D.

Теорема 1. *Отображение T на Σ топологически сопряжено со схемой Бернулли (Ω, σ) из двух символов.*

На самом деле мы будем пользоваться не стандартным представлением схемы Бернулли, а указанным на рис. 4, и обозначать соответствующие ТМЦ через (G, Ω, σ).

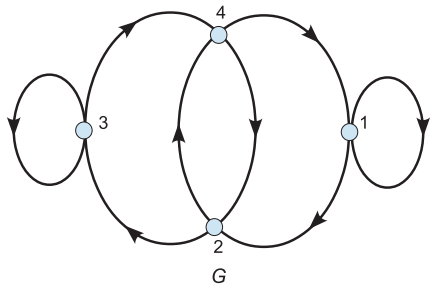


Рис. 4

Из определения B_3^1 и B_4^1 следует, что для $X \in B_3^1 \cap B_4^1 = B_2^2$ для отображения T выполнено следующее:

1) в случае A: $y_2^{**} = y_1^*, y_1^{**} = y_2^*$;

2) в случае B: ординаты точек TP_1 и TP_2 равны y_1^*;

3) в случае C: $y_3^* = y_1^{**}, y_4^* = y_2^{**}$ (рис. 5).

Теорема 2. *При $X \in B_2^2$ Σ одномерно, состоит из двух компонент связности и является образом Ω при непрерывном отображении $\eta : \Omega \to \Sigma$ таком, что η – гомеоморфизм на множестве точек второй категории (из Ω) и диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega \setminus \eta^{-1}(\Sigma \cap S) & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \Sigma \setminus S & \xrightarrow{T} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна. Множество Σ является притягивающим для открытого множества точек из D.

Определим множество U_2 как множество систем из U, для каждой из которых
1) в случае A: $y_2^{**} - y_1^* < 0, \; y_1^{**} - y_2^* > 0$;

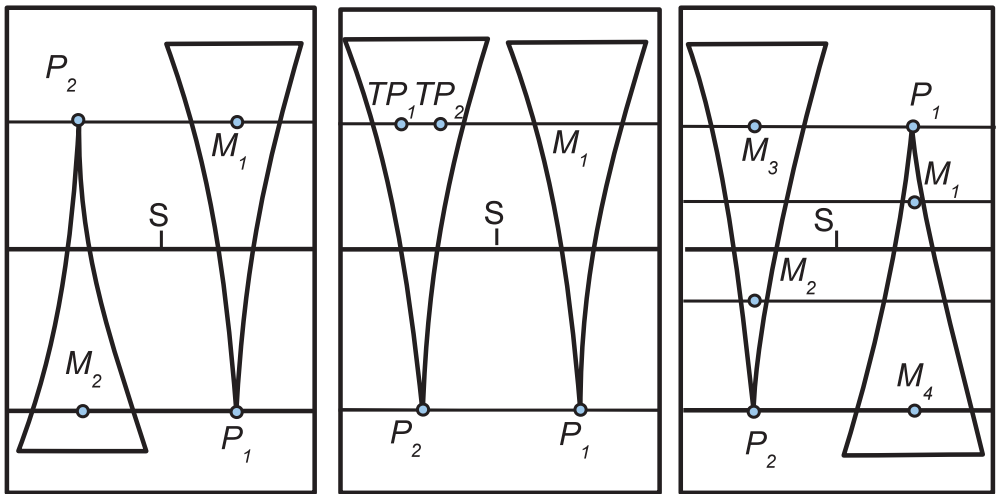


Рис. 5

2) в случае B: ординаты точек TP_1 и TP_2 меньше y_1^*;
3) в случае C: $y_3^* - y_1^{**} > 0,\ y_4^* - y_2^{**} > 0$.

Здесь имеет место следующая

Теорема 3. *Система $X \in U_2$ имеет двумерное предельное множество $\tilde{\Sigma}^+$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *$\tilde{\Sigma}^+$ является негрубым;*
2) *Γ_1, Γ_2 и O принадлежат $\tilde{\Sigma}^+$;*
3) *в $\tilde{\Sigma}^+$ всюду плотны грубые периодические движения;*
4) *исчезновение периодических движений в $\tilde{\Sigma}^+$ при возмущении X происходит путем влипания в петли сепаратрис $\Gamma_1 \cup O$ и $\Gamma_1 \cup O$.*

Формулировку теоремы на языке отображений можно сделать более подробной. В первую очередь выделим область притяжения аттрактора. Именно, положим в случае A

$$D_\Sigma = \{(x, y) \in \Pi_1 \cup \Pi_2,\ a_1 < y < a_2\},$$

где $a_i = y_i^*$, если у T_i есть неподвижная точка, в противном случае $a_1 = -1, a_2 = 1$. В случае B кроме отрезка устойчивого многообразия $y = y_1^*$, содержащего точку M_1 (до тех пор, конечно, пока $L_1 \cap D \neq \emptyset$), выделим отрезок, являющийся его прообразом, т. е. такую кривую $y = y_{12}(x)$, $|x| \leq 1$, которая после применения к ней отображения T переходит в кусок (в Π_2) на кривой $y = y_1^*$. Здесь пусть

$$D_\Sigma = \{(x, y) \in \Pi_1 \cup \Pi_2 |\ y_{12}(x) \leq y < y_1^*\},$$

если $L_1 \cap D \neq \emptyset$ и $|y| < 1$, если $L_1 \cap D = \emptyset$. В случае C $D_\Sigma = \{(x, y) \in \Pi_1 \cup \Pi_2 |\ a_2 \leq y \leq a_1\}$, где $a_i = y_{2+i}^*$, если $L_3 \cap D \neq \emptyset$ и $a_i = (-1)^{i+1}$, если $L_3 \cap D = \emptyset$.

Далее, определим некие натуральные числа, приблизительно означающие то количество итераций, вплоть до которого отображение T^i можно считать непрерывным в окрестностях точек P_1 и P_2. Конкретнее, пусть осуществляется случай A. Как следует из условий (1.1) (и это ниже будет показано), прообразы линий разрыва S при отображении T_i^k имеют уравнения $y = y_i^k(x)$, где $y_i^k(x)$ – липшицируемая функция при $|x| \leq 1$. Пусть при $k = N_1$, $y_1^{N_1}(x_2^{**}) > y_2^{**}$, а при $0 \leq k \leq N_1 - 1$ это условие не выполняется. Точно так же, пусть при $k = N_2$, $y_2^{N_2}(x_1^{**}) > y_1^{**}$, а при меньшем номере k это неравенство не выполнено. В случае B положим $\varepsilon_0 = \{(x, y) \in D_\Sigma |\ y_2^* < y < 0\}$, $\varepsilon_1 = D_\Sigma \backslash \varepsilon_0$ и пусть N_i – первое натуральное число такое, что $T^{N_i} P_i \cap \varepsilon_1 = \emptyset$, в то время как $T^s P_i \cap \varepsilon_1 \neq \emptyset$ для $s = 0, 1, ..., N_{i-1}$. Аналогично, в случае C пусть

$$\varepsilon_0' = \{(x, y) \in D_\Sigma |\ y_2^* < y < y_1^*\} \ \text{ и } \ \varepsilon_1' = D_\Sigma \backslash \varepsilon_0',$$

а N_i – первое натуральное число такое, что $T^{N_i} P_i \cap \varepsilon_1' = \emptyset$, в то время как $T^s P_i \cap \varepsilon_1' \neq \emptyset$ для $s = 0, 1, ..., N_{i-1}$.

Введем в рассмотрение константу

$$q = \frac{1}{2\|g_y^{-1}\|} \cdot \Big(1 + \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| +$$

$$+ \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1} \cdot f_y\|}\ \Big)$$

Из условий (1.1) следует, что $q > 1$.

Теорема 4. *При выполнении условия*

$$q^{N_1+N_2} > q^{N_1} + q^{N_2},\ N_1 > 1,\ N_2 > 1, \tag{1.2}$$

1) *множество Σ есть одномерный аттрактор, состоящий из двух компонент связности, окрестность которого D_Σ расслоена непрерывным устойчивым слоением H^+ на липшицируемые слои, по которым точка притягивается к Σ;* 2) *в Σ всюду плотны седловые периодические точки отображения T;* 3) *существует последовательность T-инвариантных нульмерных множеств Δ_k, $k \in \mathbb{Z}_+$ – таких, что $T|\Delta_k$ топологически сопряжено с конечной ТМЦ с ненулевой энтропией, причем $\Delta_k \subset \Delta_{k+1}$ и $\Delta_k \to \Sigma$ при $k \to \infty$.*

В общем случае имеет место следующая теорема.[3]

Теорема 5. I). *Множество Σ компактно, одномерно, в случаях A и C состоит из двух, а в случае B – из конечного числа компонент связности и является притягивающим в окрестности D_Σ.* II). *Неблуждающее множество $\Sigma_1 \subset \Sigma$ является замыканием седловых периодических точек отображения T и либо $\Sigma_1 = \Sigma$, либо $\Sigma_1 = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, где:*
1) *Σ^+ нульмерно и является образом пространства Ω^- некоторой ТМЦ (G^-, Ω^-, σ) при гомеоморфизме $\beta : \Omega^- \to \Sigma^-$, осуществляющем сопряженность $\sigma|\Omega^-$ и $T|\Sigma^-$.*
2) *Σ^+ компактно, одномерно и либо*
a) *$\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \emptyset$, тогда Σ^+ является притягивающим множеством в любой достаточно малой окрестности; либо*
b) *$\Sigma^+ \cap \Sigma^- \neq \emptyset$ и множество Σ^- – конечно, тогда Σ^+ является ω-предельным для всех точек из любой достаточно малой окрестности, однако неустойчивым, в том смысле,*

[3]В связи с этой теоремой см. [38].

что в сколь угодно малой окрестности Σ^+ найдутся точки, через которые проходят ω-полутраектории, выходящие из некоторой фиксированной окрестности Σ^+; либо
c) *$\Sigma^+ \cap \Sigma^- \neq \emptyset$ и Σ^- бесконечно; в этом случае Σ^+ не локально максимально и является ω-предельным для всех точек из каждой своей малой окрестности, исключая точки из Σ^- и ω-асимптотические к Σ^-.*

Множество Σ будем называть аттрактором Лоренца, если оно совпадает с множеством неблуждающих точек Σ_1. Заметим, что нарушение условия (1.2) еще не означает того, что $\Sigma \neq \Sigma_1$. Просто оно является достаточным условием двухкомпонентности Σ_1. Оно выполняется для всех систем из U_2 достаточно близких к границе U_2.

Обозначим через U_2' множество систем из U_2, для каждой из которых сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 стремятся при $t \to +\infty$ либо к O, либо к периодическим движениям, а через U_2'' – множество систем из U_2', для каждой из которых сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 стремятся при $t \to +\infty$ к O.

Теорема 6. I. *U_2'' плотно в U_2.* II. *Для $X \in U_2''$:* 1) *отображение T допускает конечное марковское разбиение*[4]*, граница которого принадлежит конечному множеству слоев устойчивого слоения H^+;* 2) *для построенной по этому разбиению ТМЦ (G, Ω, σ) существует непрерывное отображение $\beta : \Omega \to \Sigma$, взаимно-однозначное на множестве точек второй категории из Ω такое, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega \setminus \beta^{-1}(\Sigma \cap S) & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \beta\downarrow & & \downarrow\beta \\ \Sigma \setminus S & \xrightarrow{T} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна; 3) *Σ локально гомеоморфно произведению канторова множества на отрезок в каждой точке, не принадлежащей границе марковского разбиения.* III. *Для $X \in U_2''$ неблуждающее множество $\Sigma_1 = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$, причем $\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \emptyset$, т.е. Σ^+ – аттрактор.*
IV. *Для $X \in U_2 \backslash U_2'$ отображение T не допускает конечного марковского разбиения.*

Если $X \in U_2''$, будем говорить, что имеет место рациональный случай, если же $X \in U \backslash U_2''$, то иррациональный. Из утверждения I теоремы сразу следует, что системы в U_2 негрубы. Из определения рационального случая следует,, что с каждой системой $X \in U_2''$ связано бифуркационное множество B_X^2 коразмерности 2, которое является пересечением двух бифуркационных множеств $B_{1\,X}^1$ и $B_{2\,X}^1$ коразмерности 1. Если $X \in U \backslash U_2''$, но хотя бы одна из сепаратрис Γ_i лежит на устойчивом многообразии периодического движения либо возвращается в седло O, то через X также проходит бифуркационная пленка B_X^1. Вообще, для любой системы из U_2 есть бифуркационная поверхность, проходящая через нее, однако эффективное определение ее значительно труднее, поскольку для этого требуется знание топологических инвариантов типа "премешивающих последовательностей", введенных Милнором и Тёрстэном. Тем не менее отсюда уже следует, что в окрестности каждой точки имеется всюду плотное подмножество, расслоенное и на $B_{1\,X}^1$ и $B_{2\,X}^1$. В этом случае естественно ожидать, что существует двухпараметрическое семейство $X(\mu)$, $X(1,1) = X_1$, $X_1 \in B_2^2$, трансверсальное к $\{B_{1\,X}^1\}$ и $\{B_{2\,X}^1\}$. В таком семействе параметры должны входить так, чтобы μ_1 "управляло" сепаратрисой Γ_1, а μ_2 – Γ_2, т. е. при монотонном изменении μ_1 и фик-

[4]О марковских разбиениях в грубой ситуации см. [42-44]

сированном μ_2 семейство $X(\mu)$ монотонно пересекает бифуркационные пленки из $\{B^1_{1\,X}\}$, а при фиксированном μ_1 и изменении μ_2 – пленки $\{B^1_{2\,X}\}$.

Таким образом, получаем, что в общем случае при рассмотрении однопараметрического семейства X_τ, $0 \le \tau \le 1$, такого, как, например, изображенное на рис. 6, будут в случае A осуществляться: 1) бифуркации, связанные с появлением петли сепаратрисы $\Gamma_1 \cup O$ и рождением из нее цикла L_1; 2) с появлением петли сепаратрисы $\Gamma_2 \cup O$ и рождением из нее цикла L_2; 3) бифуркация, связанная с появлением нетривиального одномерного множества, претерпевающего бифуркации при дальнейшем изменении τ (эта бифуркационная кривая на рис. 6 не указана); 4) бифуркация, связанная с тем, что L_2 ложится на $W^s_1(X)$. Последняя бифуркация и будет приводить к появлению аттрактора Лоренца. Аналогично (с учетом специфики) описываются соответствующие бифуркации в случаях B и C.

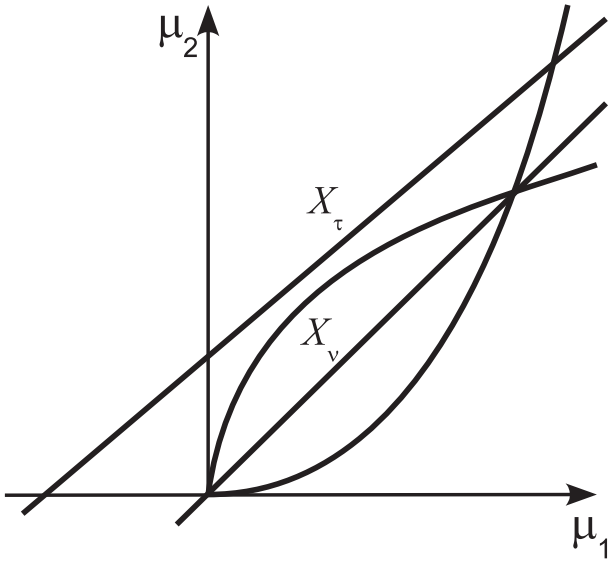


Рис.6

В частном случае однопараметрического семейства X_ν указанного на рис. 6, имеются только две бифуркации: 1) бифуркация, связанная с одновременным появлением двух петель сепаратрис, и 2) возникновение аттрактора. Именно этот случай имеет место в модели Лоренца, как было отмечено в введении. Для модели Лоренца это обусловлено тем, что она допускает симметрию $(x, y) \to (-x, -y)$.

Поэтому мы выделим симметричные подслучаи A и C равенствами

$$f_2(x, y) = -f_1(-x, -y),\ g_2(x, y) = -g_1(-x, -y),$$

а в случае B:

$$f_2(x, y) = -f_1(-x, -y),\ g_2(x, y) = g_1(-x, -y),$$

где (f_i, g_i) – формулы отображения T_i на Π_i. Здесь можно утверждать следующее: все сформулированные выше результаты остаются справедливыми для подпространства симметричных векторных полей. При этом условие (1.2) переходит в условие: $q^n > 2$.[5]

Содержание работы по параграфам следующее. В § 2 доказываются теоремы 1 и 2. В § 3 установлено существование инвариантного устойчивого слоения H^+. В § 4 рассмотрен рациональный случай. В § 5 доказывается достаточность условия (1.2) для "полного растяжения" – такого свойства, из которого в дальнейшем выводится неблуждаемость точек в Σ. Здесь также приводятся примеры отображений, имеющих (при нарушении условия (1.2)) в множестве Σ блуждающие точки. В § 6 доказана теорема о приближении отображения T "рациональными" отображениями. § 7 посвящен изучению иррационального случая. В § 8 рассмотрены симметричные отображения. В § 9 (наряду с другими обсуждениями) приводится простейшая схема эволюции аттрактора Лоренца.

[5]В [19] правильно не $\mu_0 < \mu \le 1$, а $\mu_0 \le \mu \le \mu_1 \le 1$. Последнее следует из неравенства $q^n > 2$.

§ 2. **Доказательства теорем 1 и 2.**

Поскольку никакой принципиальной разницы в доказательствах указанных теорем для случаев A , B и C нет, приведем доказательство для случая A, а затем укажем на отличия, имеющиеся в случаях B и C. Пусть $\Pi_{i1} = \{(x,\, y) \in \Pi_i \cap D_1\,,\ 0 < y \le y_1^*\},\ i = 1,\, 2\,,\qquad \Pi_{i2} = \{(x,\, y) \in \Pi_i \cap D_2\,,\quad y_2^* \le y < 0\},\quad i = 1,\, 2$. Обозначим через $H_{i1}(L)$ пространство кривых, лежащих в $\bar{\Pi}_{i1}$, уравнение каждой из которых $x = h(y),\ 0 < y \le y_1^*$, причем функция h удовлетворяет условию Липшица с константой L, а через $H_{i2}(L)$ – пространство кривых, каждая из которых лежит в $\bar{\Pi}_{i2}$, имеет уравнение $x = h(y),\ y_2^* \le y < 0$, функция h удовлетворяет условию Липшица с константой L Очевидно, $H_{ij}(L)$ – полные компактные метрические пространства (относительно обычной C^0-метрики).

Сейчас мы покажем, что образ (при отображении T) каждой кривой из $H_{ij}(L)$, пересеченной с некоторой областью $\Pi_{i_1 j_1}$ является элементом пространства $H_{i_1 j_1}(L)$. Предварительно заметим, что при выполнении, условий (1.1) по теореме о неявной функции равенства $\bar{x} = f(x,\, y),\ \bar{y} = g(x,\, y)$, где $(x,\, y) \in (D_1 \cup D_2) \setminus S$, можно переписать в виде

$$\bar{x} = f_0(x,\, \bar{y}),\ \ y = g_0(x,\, \bar{y}) \tag{2.1}$$

причем имеют место тождества $f_0(x,\, \bar{y}) \equiv f(x,\, g_0(x,\, \bar{y}))$, $\bar{y} \equiv g_0(x,\, g_0(x,\, \bar{y}))$. Следующие оценки тривиальны:

$$\begin{gathered} \|g_{0\,x}\| \le \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|, \quad \|g_{0\,\bar{y}}\| \le \|g_y^{-1}\|, \\ \|f_{0\,x}\| \le \|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|, \quad \|f_{0\,\bar{y}}\| \le \|f_y \cdot g_y^{-1}\| \end{gathered} \tag{2.2}$$

Л е м м а 2.1. *Существует такое $L > 0$, что определены отображения τ_{j1}^{1i} : $H_{j1}(L) \to H_{1i}(L)$, $i,\, j \in \{1,\, 2\}$, τ_{j2}^{2i} : $H_{j2}(L) \to H_{2i}(L)$, $i,\, j \in \{1,\, 2\}$ являющиеся сжимающими.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для определенности построим оператор τ_{22}^{21} (остальные строятся аналогично).

1°. Пусть кривая $h \in H_{22}(L)$, и ее уравнение $x = h(y)$. По определению $H_{22}(L)$ верхний конец кривой h принадлежит S, а нижний конец – устойчивому многообразию $y = y_2^*$ точки M_2. Поэтому множество $\overline{T(\operatorname{int} h)}$ будет являться кривой, один из концов которой есть точка P_2, а другой - по-прежнему принадлежит устойчивому многообразию точки M_2 и эта кривая целиком содержится в Π_2.

2°. Покажем, что существует такое $L > 0$, что кривая $T(\operatorname{int} h) \cap \Pi_{21}$ будет являться элементом пространства $H_{21}(L)$. Действительно, в силу предположений теорем 1 и 2 $y_2^{**} \le y_1^*$, поэтому во втором из равенств

$$\bar{x} = f(h(y),\, y), \qquad \bar{y} = g(h(y),\, y), \tag{2.3}$$

которым удовлетворяют координаты точек $\overline{T(\operatorname{int} h)}$, для каждого $\bar{y},\ 0 \le \bar{y} \le y_1^*$ найдется хотя бы одно y такое, что это равенство становится верным. Покажем, что такое y единственно. Предположим противное, пусть для некоторого $\bar{y}$ имеются два значения y_1 и y_2, удовлетворяющих второму из равенств (2.3). Тогда $\bar{y} = g(h(y_1), y_1) = g(h(y_2), y_2)$. Отсюда

$$y_1 - y_2 = -\tilde{g}_y^{-1} \cdot \tilde{g}_x \cdot (h(y_1) - h(y_2))\,. \tag{2.4}$$

При выполнении условия

$$\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\| \cdot L < 1 \tag{2.5}$$

из (2.4) получаем $y_1 = y_2$. Таким образом, при выполнении (2.5) второе из равенств (2.3) определяет y как однозначную функцию $\bar{y} \ : \ y = y(\bar{y})$. Подставляя ее в первое из равенств (2.3), получим однозначную функцию $x = H(\bar{y}) = f(h(y(\bar{y})), y(\bar{y}))$, график которой (доопределенный по непрерывности) и является пересечением образа кривой $\bar{x} = H(\bar{y})$ с Π_{21}. Это пересечение будем обозначать через τ_{22}^{21}.

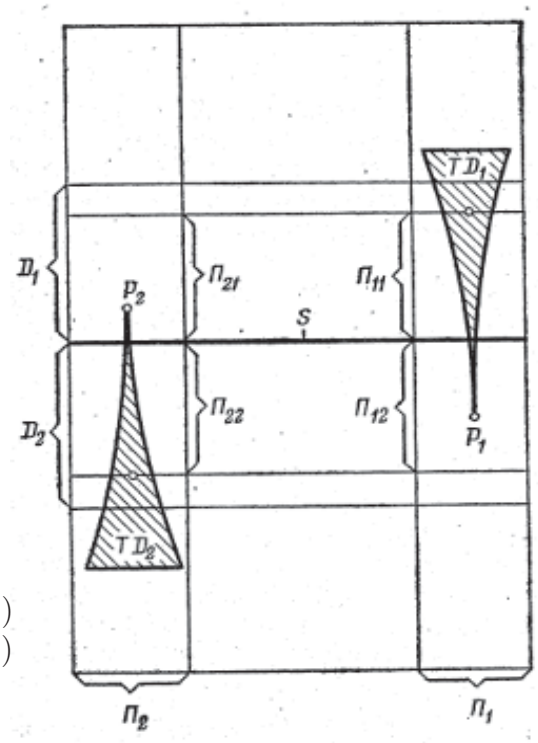


Рис. 7

Найдем константу Липшица функции H. Для этого удобно воспользоваться представлением (2.1) отображения T. Координаты точек кривых $\bar{x} = H(\bar{y})$ и $x = h(y)$ удовлетворяют соотношениям: $\bar{x} = f_0(h(y), \bar{y})$, $\quad y = g_0(h(y), \bar{y})$. Из равенств

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = f_0(h(y_1), \bar{y}_1) \\ y_1 = g_0(h(y_1), \bar{y}_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{x}_2 = f_0(h(y_2), \bar{y}_2) \\ y_2 = g_0(h(y_2), \bar{y}_2) \end{cases}$$

получим:

$$|y_1 - y_2| \le \frac{\|g_{0\bar{y}}\|}{1 - \|g_{0x}\| L} \cdot |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|,$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \le \|f_{0x}\| L |y_1 - y_2| + \|f_{0\bar{y}}\| \cdot |\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \le$$

$$\le \frac{\|f_{0\bar{y}}\| + L(\|f_{0x}\|\|g_{0\bar{y}}\| - \|f_{0\bar{y}}\|\|g_{0x}\|)}{1 - \|g_{0x}\| \cdot L} \cdot |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|.$$

Используя (2.2), эти оценки можно переписать следующим образом:

$$|y_1 - y_2| \le \frac{\|g_y^{-1}\|}{1 - \|g_x\|\|g_y^{-1}\| L} \cdot |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|, \tag{2.6}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \le \frac{\|f_y \cdot g_y^{-1}\| + L\|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|}{1 - \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|} |\bar{y}_1 - \bar{y}_2|. \tag{2.7}$$

Функция H будет удовлетворять условию Липшица с той же константой, что и функция h, если

$$\frac{\|f_y \cdot g_y^{-1}\| + L\|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|}{1 - \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| L} < L \tag{2.8}$$

или

$$L^2 \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| - (1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|) L + \|f_y \cdot g_y^{-1}\| < 0. \tag{2.9}$$

Для того чтобы неравенство (2.9) имело положительные решения, достаточно выполнения неравенства

$$1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| > 2\sqrt{\|f_y \cdot g_y^{-1}\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\|},$$

а это не что иное, как условие (1.1)в). Как легко видеть, сумма корней квадратного трехчлена в левой части (2.9) меньше, чем $(\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\|)^{-1} \cdot (1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)$, т. е. для решения неравенства (2.9) неравенство (2.5) выполнено. Следовательно, $\tau_{22}^{21}\,(H_{22}(L)) \subset H_{21}(L)$.

3°. Покажем, что τ_{22}^{21} – сжимающий оператор. Пусть $h_1,\ h_2$ – элементы пространства $H_{22}(L)$. Из тождеств (в которых y_1 и y_2 являются функциями $\bar{y}$)

$$\left\{\begin{array}{lcl} \bar{x}_1 & = & f_0(h_1(y_1),\, \bar{y}) \\ y_1 & = & g_0(h_1(y_1),\, \bar{y}) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \bar{x}_2 & = & f_0(h_2(y_2),\, \bar{y}) \\ y_2 & = & g_0(h_2(y_2),\, \bar{y}) \end{array}\right.$$

получаем

$$\|y_1 - y_2\| \le \|g_{0x}\|\, L\, \|y_1 - y_2\| + \|g_{0x}\|\ \ \|h_1 - h_2\|$$

или

$$\|y_1 - y_2\| \le \frac{\|g_{0x}\|}{1 - \|g_{0x}\| \cdot L}\ ,$$

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le \|f_{0x}\|\, L\, \|y_1 - y_2\| + \|f_{0x}\|\ \ \|h_1 - h_2\|\,. \tag{2.10}$$

и с учетом (2.8)

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le \left(\frac{\|f_{0x}\| \cdot \|g_{0x}\|\, L}{1 - \|g_{0x}\| \cdot L} + \|f_{0x}\|\right) \cdot \|h_1 - h_2\|\,,$$

Используя (2.2), эту оценку можно переписать следующим образом:

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le \left(\frac{\|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot L + \|f_y \cdot g_y^{-1}\|}{1 - \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot L} \cdot \|g_x\| + \|f_x\|\right) \cdot \|h_1 - h_2\|\,,$$

откуда, учитывая (2.8), получим

$$\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| \le (\,\|f_x\| + \|g_x\| \cdot L\,) \cdot \|h_1 - h_2\|\,, \tag{2.11}$$

Для сжимаемости оператора τ_{22}^{21} достаточно, чтобы

$$L\ <\ \frac{1 - \|f_x\|}{\|g_x\|}\,. \tag{2.12}$$

Для существования положительных L, удовлетворяющих (2.9) и (2.12), достаточно, чтобы

$$\frac{1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| - \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4 \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|}}{2\,\|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|}\ \le\ \frac{1 - \|f_x\|}{\|g_x\|}\,,$$

или

$$1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| - 2\,\|g_y^{-1}\|\ <\ \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4 \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|}\,.$$

Если выражение в левой части этого неравенства неположительно, то неравенство верно. Если же левая часть положительна, то, возводя обе части в квадрат, приводя подобные члены и сокращая на $4\,\|g_y^{-1}\|$, получим условие (1.1) г).

Таким образом, оператор τ_{22}^{21} – сжимающий.

О П Р Е Д Е Л Е Н И Е . *Последовательность кривых* $(\ldots,\, h_{-1},\, h_0,\, \ldots,\, h_k,\, \ldots)$ *будем называть инвариантным неустойчивым слоем, если каждая*

кривая h_k принадлежит одному из пространств $H_{ij}(L)$, определенных выше, и для любой пары последовательных кривых h_k, h_{k+1} найдется оператор $\tau_{i_1\,i_1}^{j_1\,j_2}$, определенный в лемме 2.1 такой, что $\tau_{i_1\,i_1}^{j_1\,j_2}\cdot h_k = h_{k+1}$.

Лемма 2.2. *Существует взаимно-однозначное отображение $\varkappa$ пространства Ω_A ТМЦ $(G_A\,,\,\Omega_A\,,\,\sigma)$ на множество всех инвариантных неустойчивых слоев такое, что*
1) если для $\omega\in\Omega_A$ $\varkappa(\omega)=(...,\,h_{-1},\,h_0,...,\,h_k,...)$, то $\varkappa(\sigma\,\omega)=(...,\,h'_{-1},\,h'_0,...,\,h'_k,...)$, где $h'_k=h_{k+1}$;
2) отображение $\pi_i\circ\varkappa$ непрерывно для любого $i\in\mathbb{Z}_+$, где π_i – проекция на i-ю координату, т. е. отображение, ставящее в соответствие инвариантному неустойчивому слою его i-ю координату – элемент пространства $H_{k\,j}(L)$.

Доказательство. Отождествим состояния ТМЦ $(G_A\,,\,\Omega_A\,,\,\sigma)$ с пространствами $H_{i\,j}(L)$ следующим образом:

$$\{1\}\rightleftarrows H_{11}(L),\ \{2\}\rightleftarrows H_{12}(L),\ \{3\}\rightleftarrows H_{22}(L),\ \{4\}\rightleftarrows H_{21}(L),$$

Тогда каждому переходу $i\to j$ однозначно соответствует одно из отображений, определенных в лемме 2.1, которое мы переобозначим через τ_{ij}. Следовательно, каждой точке $\omega=(...,\,i_{-1},\,i_0,...,\,i_k,...)$ из Ω_A однозначно соответствует последовательность пространств и отображений

$$\ldots H_{i_{-1}}\xrightarrow{\tau_{i_{-1}i_0}}H_{i_0}\xrightarrow{\tau_{i_0i_1}}H_{i_1}\to\ \ldots,$$

где каждое H_{ij} – одно из пространств $H_{ks}(L)$. Поскольку все пространства – полные, а все операторы – сжимающие, то по лемме из [45] существует единственный инвариантный неустойчивый слой $(...,\,h_{-1},\,h_0,...,\,h_k,...)$. Обратно, каждому инвариантному неустойчивому слою соответствует точка $\omega\in\Omega_A$, т. е. отображение $\varkappa$ определено, причем в силу единственности $\varkappa^{-1}\circ\varkappa=\mathrm{id}$. Непрерывность $\pi_i\circ\varkappa$ следует из принципа сжатых отображений. Действительно, диаметр образа пространства H_{i_m} при сквозном отображении $H_{i_m}\to H_{i_n}$ не превосходит q_0^{n-m}, где q_0 – общая константа сжатия операторов τ_{ij} . Лемма доказана.

Замечание 1. Константа Липшица произвольного элемента инвариантного неустойчивого слоя не превосходит любого L из интервала решений неравенства (2.9). Следовательно, она не превосходит меньшего корня квадратного трехчлена в левой части (2.9), равного

$$L_0=\frac{1-\|f_x\|\cdot\|g_y^{-1}\|-\sqrt{(1-\|f_x\|\cdot\|g_y^{-1}\|)^2-4\cdot\|g_x\|\cdot\|g_y^{-1}\|\cdot\|f_y\cdot g_y^{-1}\|}}{2\,\|g_x\|\cdot\|g_y^{-1}\|}\,.$$

Замечание 2. При $X\in B_2^2$ элементы различных инвариантных неустойчивых слоев могут либо совпадать, либо пересекаться лишь в точках из S и в $T^k(P_1\cup P_2)$, $k=0,\,1,\,\ldots$. Действительно, если $\emptyset\not\equiv(h'_{k'}\cap h_{k'})\in S\cup(\bigcup\limits_{k\geq 0}T^k\,(P_1\cup P_2))$, то последовательности пространств и операторов

$$\ldots H_{k'-1}\to H_{k'}\to\ldots\quad\text{и}\quad\ldots\to H_{k''-j}\to\ldots\to H_{k''}\to\ldots$$

для слоев $(...\,h'_{k'-1}\,,\,h'_{k'}\,...)$ и $(...\,h''_{k''-1}\,,\,h''_{k''}\,...)$ должны в силу их построения быть одними и теми же. Поэтому $h'_{k'}=h''_{k''}$.

Зафиксируем произвольный инвариантный неустойчивый слой $(...\,,\,h_{-1},\,h_0,\,...\,\ldots,\,h_k,\,\ldots)$. Непосредственно из определений инвариантного неустойчивого слоя и отображений τ_{ij} следует, что для любых двух кривых h_k, h_{k+1} выполнено включение $T^{-1}(\mathrm{int}\,h_{k+1})\subset h_k$. Кроме того, если ∂h_{k+1} содержит точку P_i , $i\in\{1,\,2\}$, то $T^{-1}P_i$ полагается равным $T\,h_{k-1}\cap S$.

Для удобства изложения будем называть последовательность точек Q_k траекторией отображения T на слое, если : 1) $Q_k \in h_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$; 2) $TQ_k = Q_{k+1}$, если $Q_k \in h_k \setminus S$; 3) $TQ_k = Th_k \cap (P_1 \cup P_2)$, если $Q_k \in S$.

Будем называть последовательность $\{ Q_k \}$ траекторией отображения T , если $TQ_k = Q_{k+1}$ при $Q_k \notin S$ и $Q_{k+1} \in (P_1 \cup P_2)$ при $Q_k \in S$.

Лемма 2.3. *При выполнении условий (1.1) для любого инвариантного неустойчивого слоя существует единственная траектория отображения T, целиком содержащаяся в этом слое.*

Доказательство. Пусть $(\ldots, h_{-1}, h_0, \ldots \ \ldots, h_k, \ldots)$ – произвольный инвариантный неустойчивый слой. Справедливы равенства

$$\begin{cases} \bar{y} &= g(h_k(y), y)\,, \\ \bar{x}_k &= h_{k+1}(y) = f(h_k(y), y)\,. \end{cases}$$

Пусть $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ – ординаты концов кривой h_{k+1}. Тогда

$$\bar{y}_1 = g(h_k(y_1), y_1)\,, \qquad \bar{y}_2 = g(h_k(y_2), y_2)\,,$$

и

$$\bar{y}_1 - \bar{y}_2 = \tilde{g}_x\,(h_k(y_1) - h_k(y_2)) + \tilde{g}_y\,(y_1 - y_2)\,,$$

т. е.

$$y_1 - y_2 = -\tilde{g}_y^{-1}\,\tilde{g}_x\,(h_k(y_1) - h_k(y_2)) + \tilde{g}_y^{-1}\,(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$$

и

$$|y_1 - y_2| \le \frac{\|g_y^{-1}\|}{1 - \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|\,L}\,|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|\,. \tag{2.13}$$

Проверим, что

$$L_0 \,<\, \frac{1 - \|g_y^{-1}\|}{\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\|}\,, \tag{2.14}$$

т.е.

$$\frac{1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| - \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4 \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|}}{2\,\|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|} < \frac{1 - \|g_y^{-1}\|}{\|g_y^{-1}\|\|g_x\|}\,,$$

или

$$\sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4 \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \,>\, 2\|g_y^{-1}\| - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| - 1\,.$$

Если правая часть положительна, то, возводя в квадрат обе части и приводя подобные члены, получим условие (1.1)г). Таким образом, $|y_1 - y_2| < q_1|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|$, $0 < q_1 < 1$. Следовательно, при $k > i$ $T^{-(k-i)}h_k$ – кривая, расстояние между ординатами которой не превосходит q_1^{k-i} . А так как любая траектория, целиком лежащая на слое, должна иметь точку в $T^{-(k-i)}h_k$, то в силу произвольности k получаем, что эта траектория единственна. Лемма доказана.

Таким образом, мы показали, что

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| > q|y_1 - y_2|\,,$$

$$1 < q = \frac{1 + \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| + \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4 \cdot \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|}}{2\,\|g_y^{-1}\|}. \qquad (2.15)$$

Константа q, очевидно, оценивает и локальное растяжение по инвариантному неустойчивому слою.

Каждой точке $\omega \in \Omega_A$ поставим в соответствие точку Q_0 траектории отображения T на слое на кривой h_0 инвариантного неустойчивого слоя $\varkappa(\omega) = (\ldots, h_{-1}, h_0, \ldots \ldots, h_k, \ldots)$, соответствующего ω по лемме 2.2. Таким образом, в силу леммы 2.3 определено отображение $\eta : \Omega_A \to \Sigma$, где Σ – множество всех точек (рассматриваемое в относительной топологии) траекторий отображения T на слоях.

Лемма 2.4. *1. При $X \in \bar{U}_1$ отображение η непрерывно и диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_A & \xrightarrow{\sigma} & \Omega_A \\ \eta \downarrow & & \downarrow \eta \\ \Sigma & \xrightarrow{T} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна.

2. При $X \in U_1$ отображение η является гомеоморфизмом.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из доказательства лемм 2.3 и 2.4 как следствие принципа сжатых отображений. Для доказательства второго утверждения достаточно установить взаимную однозначность η при $X \in U_1$. Пусть $\omega_1 \not\equiv \omega_2$. Тогда существует k такое, что кривые $\pi_k(\varkappa(\omega_1))$ и $\pi_k(\varkappa(\omega_2))$ являются элементами разных пространств и, следовательно, могут иметь общую точку лишь на S. Но при $X \in U_1$ образ S при всех доопределениях отображения T не имеет общих точек с $\overline{\bigcup\limits_{i,j=1}^{2} \Pi_{ij}}$. Следовательно, если даже кривые $\pi_k(\varkappa(\omega_1))$ и $\pi_k(\varkappa(\omega_2))$ и пересекаются, то лишь по точке, не принадлежащей никакой траектории на слое – разным точкам из Ω_A соответствуют разные точки Σ.

Лемма 2.5. *На Σ всюду плотны периодические точки отображения T.*

Доказательство. В случае, если $X \in U_1$ утверждение следует из всюду плотности в Ω_A периодических точек и непрерывности отображения η.

Пусть теперь $X \in \partial U_1$. Так как по лемме 2.3 на каждом инвариантном неустойчивом слое лежит единственная траектория, а в силу замечания 2 к лемме 2.2 кривые различных инвариантных неустойчивых слоев могут склеиваться лишь в точках $S \cup T^k(P_1 \cup P_2)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, то при отображении η могут склеиваться лишь точки, лежащие на траекториях, одновременно асимптотических к неподвижным точкам (... , 1, 1, 1, ...) и (... , 3, 3, 3, ...). Разные же периодические точки σ переходят в разные периодические точки T.

Лемма 2.6. *Множество точек всех траекторий отображения T, целиком содержащихся в $\overline{\bigcup\limits_{i,j=1}^{2} \Pi_{ij}}$, совпадает с Σ.*

Доказательство. Пусть траектория $(\ldots, h_{-1}, h_0, \ldots, h_k, \ldots)$ содержится в $\overline{\bigcup\limits_{i,j=1}^{2} \Pi_{ij}}$. Тогда либо 1) $Q_k \in \{P_1 \cup P_2\}$ для любого $k \leq \mathbb{Z}_+$, либо 2) существует $k \in \mathbb{Z}_+$

такое, что $Q_{k_0} = P_1$ или $Q_{k_0} = P_2$.

В первом случае последовательность Q_k однозначно определяет последовательность пространств $H_{ij}(L)$ и отображений $\tau_{k,\,k+1}$ (именно точке $Q_k \in \Pi_{ij}$ ставится в соответствие пространство $H_{ij}(L)$). Следовательно, последовательности $\{Q_k\}$ соответствует инвариантный неустойчивый слой
$(\dots,\, h_{-1},\, h_0,\, \dots,\, h_k,\, \dots)$. Точка Q_k обязана принадлежать кривой h_k, что можно установить следующим рассуждением. Проведем через каждую точку $Q_k \in \Pi_{ij}$ кривую $h_k^{(1)} \in H_{ij}(L)$: получим некоторую последовательность кривых $(\dots,\, h_{-1}^{(1)},\, h_0^{(1)},\, \dots)$; применим к каждой из них отображение $\tau_{k,\,k+1}$, определяемое парой Q_k, Q_{k+1}, получим новую последовательность кривых
$(\dots,\, h_{-1}^{(2)},\, h_0^{(2)},\, \dots,\, h_k^{(2)},\, \dots)$ и т. д. В силу сжимаемости операторов $\tau_{k,\,k+1}$ последовательные приближения $(\dots,\, h_{-1}^{(s)},\, h_0^{(s)},\, \dots)$ должны сходиться к единственному инвариантному неустойчивому слою. Так как все приближения $h_k^{(s)}$ содержат точку Q_k, то ее содержит и предельная кривая h_k, т. е. $Q_k \in \Sigma,\ \ k \le \mathbb{Z}_+$.

В случае 2) (который может реализоваться лишь при $X \in \partial U_1$) то же рассуждение применимо для точек Q_k при $k \ge k_0$. Но поскольку α-полутраектория $\{Q_k\}_{k \ge k_0}$ принадлежит инвариантному неустойчивому слою, то непосредственно из его определения и того, что $Q_k \in \overline{\bigcup\limits_{i,\,j=1,2} \Pi_{ij}}$, следует, что $Q_k \in \Sigma$ при $k \ge k_0$.

Следующие две леммы относятся лишь к случаю $X \in \partial U_1$.

Лемма 2.7. *Множество Σ совпадает с множеством точек кривых всех инвариантных неустойчивых слоев.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку Q_0, принадлежащую какой-то кривой h_0 инвариантного неустойчивого слоя $(\dots,\, h_{-1},\, h_0,\, \dots,\, h_k,\, \dots)$. Нам нужно найти инвариантный неустойчивый слой, на котором лежит траектория точки Q_0, тогда по определению множества Σ точка Q_0 будет принадлежать Σ. Но α-полутраектория точки Q_0 уже содержится на инвариантном неустойчивом слое. Множество же Th_0 можно представить как объединение двух кривых из пространств $H_{ij}(L)$, хотя бы на одной из которых лежит точка TQ_0 – эту кривую мы обозначим через h_1'; Th_1' тоже является объединением двух кривых, хотя бы на одной из которых лежит точка T^2Q_0, – эту кривую мы обозначим через h_2', $\dots$. Получаем инвариантный (по сравнению) неустойчивый слой $(\dots,\, h_{-1},\, h_0,\, h_1',\, \dots,\, h_k',\, \dots)$, на котором лежит траектория $(\dots,\, Q_{-1},\, Q_0,\, \dots,\, Q_k,\, \dots)$ отображения T, проходящая через Q_0. Следовательно, $Q_0 \in \Sigma$.

Лемма 2.8. *Множества $\Sigma \cap \Pi_1$ и $\Sigma \cap \Pi_2$ связны и одномерны.*

Доказательство. Связность множества $\Sigma \cap \Pi_1$ следует из леммы 2.7 и следующих двух пунктов.

1°. Пусть $h_i \subset \Sigma \cap \Pi_1$ – произвольная кривая какого-то инвариантного неустойчивого слоя, принадлежащая $H_{12}(L)$. Тогда существует кривая h_{i-1} такая, что $\tau_{i-1,\,i} \cdot h_{i-1} = h_i$, поэтому одной из граничных точек кривой h_i является точка P_1. Таким образом, все кривые всех инвариантных неустойчивых слоев, лежащие в $H_{12}(L)$, имеют своей общей точкой точку P_1.

2°. Пусть h_i – произвольная кривая инвариантного неустойчивого слоя $(\dots, h_{i-1},\, h_i, \dots)$, принадлежащая $H_{11}(L)$. Тогда существует инвариантный неустойчивый слой

$$(\dots,\, h_{i-1},\, h_i',\, \dots), \quad \text{где} \quad h_i' \in H_{12}(L) \text{ и } h_i \cup h_i' = T\, h_{i-1}\,,$$

т. е. кривая h_i имеет общую точку на линии разрыва S с кривой h_i' из пространства $H_{12}(L)$. Следовательно, множество $\Sigma \cap \Pi_1$ связно.

Так как это множество, кроме того, замкнуто, то оно не менее чем одномерно. Покажем, что оно не может быть двумерным. Для этого более чем достаточно показать, что локально (кроме окрестности точки P_1 и окрестностей точек $T^k P_1$, $k \leq \mathbb{Z}_+$) $\Sigma \cap \Pi_1$ гомеоморфно подмножеству прямого произведения канторова множества на отрезок. Действительно, зафиксируем кривую l : $y = \mathrm{const}$ (для определенности). Пересечение $\overline{T\,(\Pi_{11} \cup \Pi_{21})} \cap l$ – это два непересекающихся отрезка. На каждом из них образ множества $\overline{T\,(\Pi_{12} \cup \Pi_{21})} \cap \Pi_{21} \cup \overline{T(\Pi_{21} \cup \Pi_{11})} \cap \Pi_{11}$ при отображении T высекает по два непересекающихся отрезка и т. д., т. е. на l идет процесс построения канторова множества. Очевидно, кривые из множества Σ пересекают l лишь по точкам, принадлежащим этому канторову множеству. Из замечания 2 к лемме 2.2 следует локальное взаимно-однозначное соответствие множества Σ с прямым произведением канторова множества в l на отрезок, а из второго утверждения леммы 2.2 – непрерывность этого соответствия.

Теоремы 1 и 2 вытекают из доказанных лемм.

Обратимся теперь к случаям B и C. Здесь нам нужно ввести пространства кривых, определить оператор и установить связь с ТМЦ.

С л у ч а й B. Положим

$$\Pi_{i1} = \{(x,\, y) \in \Pi_i \cap D_1\,,\ \ 0 < y \leq y_3^*\}\,,$$

$$\Pi_{i2} = \{(x,\, y) \in \Pi_i \cap D_2\,,\ \ y_{12}(x) \leq y \leq 0\}\,,\ \ i = 1,\, 2.$$

Пространства $H_{i1}(L)$ вводятся так же, как в случае A , а $H_{12}(L)$ $(H_{22}(L))$ – это пространство кривых, лежащих в Π_1 (Π_2), уравнение каждой из которых $x = h(y)$, $y_1^{**} \leq y \leq 0$, $(y_2^{**} \leq y \leq 0)$, причем $h(y_1^{**}) = x_1^{**}$, $(h(y_2^{**}) = x_2^{**})$ и h удовлетворяет условию Липшица с константой L. Состояния ТМЦ $(G,\, \Omega,\, \sigma)$ отождествляются с пространствами $H_{ij}(L)$ так же, как в случае A, и так же вводятся операторы $\tau_{i_2 i_2}^{j_1 j_2}$.

С л у ч а й C. Здесь положим

$$\Pi_{i1} = \{(x,\, y) \in \Pi_i \cap D_1\,,\ \ 0 \leq y \leq y_3^*\}\,,$$

$$\Pi_{i2} = \{(x,\, y) \in \Pi_i \cap D_2\,,\ \ y_4^* \leq y \leq 0\}\,,\ \ i = 1,\, 2,$$

каждой области Π_{ij} поставим в соответствие пространство $H_{ij}(L)$ и определим операторы $\tau_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$ так же, как в случае A.

Легко проверить, что каждому переходу в ТМЦ $(G,\, \Omega,\, \sigma)$ однозначно соответствует единственный оператор $\tau_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}$. Проводя доказательства в случаях B и C по той же схеме, что и в случае A, убеждаемся, что они совершенно аналогичны доказательствам в случае A.

§ 3. **Теорема о существовании устойчивого слоения**

Т е о р е м а *Для любой $X \in U_2$ в области D_2 существует непрерывное устойчивое слоение, инвариантное в том смысле, что для любого слоя h кривая Th также принадлежит некоторому слою этого слоения.*

Доказательство теоремы будем проводить для случая A, поскольку для B и C оно проводится аналогично. Разобьем доказательство на несколько лемм.

Л е м м а 3.1. *Существует такая константа M, что любая лежащая в Π_{2i} , (в Π_{1j}), $j = 1, 2$, и пересекающаяся с $T(\bigcup_{i,j=1}^{2} \Pi_{ij})$ кривая, уравнение которой $y = h(x)$, где $-1 \le x \le -1/2$ $(1/2 \le x \le 1)$ и функция h удовлетворяет условию Липшица с константой M, имеет в своем прообразе относительно T две кривые h_1 и h_2, причем h_k, $k = 1, 2$, принадлежит одной из областей Π_{ij}, является графиком функции $y = h_k(x)$, $-1 \le x \le -1/2$ или $1/2 \le x \le 1$, также удовлетворяющей условию Липшица с константой M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $y = h(x)$ – уравнение произвольной кривой указанного в формулировке леммы класса. Для определенности пусть $h \subset \Pi_{21}$ и $h \cap T\Pi_{22} = \emptyset$. Так как кривая h имеет точки и вне множества $T\Pi_{22}$, то она обязательно пересекается с образом отрезка прямой $x = -1$, входящего в границу Π_{22}. Из доказательства леммы 2.1 следует, что этот образ является кривой, записывающейся в виде $x = H(y)$, где H обладает константой Липшица L, определенной в § 2. Наложим на M следующее условие:

$$ML < 1 \tag{3.1}$$

При его выполнении кривая h пересекает кривую H в единственной точке. Действительно, пусть таких точек больше одной, т. е. уравнение $x = H(h(x))$ имеет больше одного корня: $x_1 = H(h(x_1))$, $x_2 = H(h(x_2))$. Но тогда $|x_1 - x_2| \le ML|x_1 - x_2|$, $ML \ge 1$, что противоречит (3.1). Отсюда, так как кривая h делит Π_{21} на две области, то точка P_2 находится выше кривой h. Следовательно, h имеет точки в множестве $T\Pi_{22}$, и уравнение $y = h(x)$, т. е.

$$g(x, y) = h(f(x, y)), \tag{3.2}$$

имеет для каждого фиксированного x, $-1 \le x \le -1/2$ или $1/2 \le x \le 1$, хотя бы одно решение. Это решение единственно в силу представления (2.1) отображения T . Действительно, первое из соотношений

$$y = h_0(f_0(x, \bar{y})), \;\; y = g_0(x, \bar{y})$$

будет определять $\bar{y}$ как функцию x при условии $M\,\|f_{0\,\bar{y}}\| < 1$ или (по (2.2))

$$M < \frac{1}{\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \; . \tag{3.3}$$

Таким образом, при выполнении (3.3) уравнение (3.2) определяет функцию $y = h_1(x) \equiv g_0(x, \bar{y}(x))$. Покажем, что она удовлетворяет условию Липшица. Из тождеств $y_1 = h(f_0(x_1, \bar{y}_1))$,

$$\bar{y}_1 = g_0(x_1, \bar{y}_1), \; bary_2 = h(f_0(x_2, \bar{y}_2)), \; y_2 = g_0(x_2, \bar{y}_2)$$

получим с учетом (2.2)

$$|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| \le \frac{(\|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|)M}{1 - M\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \; |x_1 - x_2|$$

и

$$|y_1 - y_2| \le \frac{M\|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| + \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|}{1 - M\|f_y \cdot g_y^{-1}\|}\ |x_1 - x_2|\ .$$

Для того чтобы h_1 удовлетворяла условию Липшица с константой M, достаточно, чтобы

$$\frac{M\|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| + \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|}{1 - M\|f_y \cdot g_y^{-1}\|}\ <\ M \tag{3.4}$$

т.е.

$$M^2\|f_y \cdot g_y^{-1}\| - (1 - \|f_x\|\|g_y^{-1}\|)M + \|g_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|, <\ 0\ . \tag{3.5}$$

Существование положительных M, удовлетворяющих (3.5), следует из условия (1.1). Существование положительных M, удовлетворяющих одновременно (3.5) и (3.3), следует из того, что сумма корней квадратного трехчлена, стоящего в левой части (3.5), равная $(1 - \|f_x\|\|g_y^{-1}\|)\,(\|f_y \cdot g_y^{-1}\|)^{-1}$ меньше выражения, стоящего в правой части (3.3). Осталось удовлетворить условию (3.1). Константа L удовлетворяет неравенству (2.9), а константа M - неравенству (3.5), т. е. $L_1 < L < L_2$, $M_1 < M < M_2$, причем $M_2\, L_1 = 1$, $M_1\, L_2 = 1$. Отсюда $M_1\, L_1 = L_1\, L_2^{-1} < L_1\, L_1^{-1} = 1$. Таким образом, $M_1\, L_1 < 1$, и существует M , удовлетворяющее (3.5) и (3.1). Лемма доказана.

Пусть

$$l(i) = S \cap \Pi_i\,,\ l(i,\, k) = T^{-1}\, l(i)\ \cap \Pi_k\,, \quad i,\, k = 1,\, 2.$$

По индукции, если $l(i_1,\, i_2,\, \dots, i_s) \cap T\,\Pi_{ij} \ne \emptyset$, имеем

$$l(i_1,\, i_2,\, \dots, i_s,\, i_{s+1}) = T^{-1}\, l(i_1,\, i_2,\, \dots, i_s)\ \cap \Pi_{ij}\,, \quad i_{s+1} = i, \qquad i_j \in \{1,\, 2\}.$$

Таким образом, некоторым конечным упорядоченным наборам символов $(i_1,\, \dots, i_s)$, $i_j \in \{1,\, 2\}$, $1 \le s < \infty$, ставятся в соответствие кривые $l(i_1,\, i_2,\, \dots, i_s)$, которые будем называть прообразами линий разрыва. Множество точек таких кривых обозначим через H_0 , а множество самих кривых – через H_0^* .

Лемма 3.2. *Для $X \in \bar{U}_2$ множество H_0 всюду плотно в $\overline{T\,(\bigcup\limits_{i,\,j} \Pi_{ij}\,)}$.*

Доказательство . Предположим,что в окрестности точки $Q \in \overline{T\,(\bigcup\limits_{i,\,j} \Pi_{ij}\,)}$ нет бесконечного множества точек из H_0. Точку Q можно считать не совпадающей с P_1 или P_2 и не лежащей в H_0. Тогда существует отрезок $h:\ x = \varphi(y),\ \ y_0^1 \le y \le y_0^2$, кривой $h \subset T\,(\bigcup \Pi_{ij})$, $h \cap H_0 = \emptyset$ и φ удовлетворяет условию Липшица с константой L.

Рассмотрим точки $Q_1 = (\varphi(y_0^1),\, y_0^1)$ и $Q_2 = (\varphi(y_0^2),\, y_0^2)$. Так как отрезок h не пересекается с S , то $T\,Q_1$ и $T\,Q_2$ обязаны принадлежать одному и тому же множеству Π_{ij} . Кроме того, ординаты $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ точек $T\,Q_1$ и $T\,Q_2$ в силу (2.15) удовлетворяют оценке $|\bar{y}_1 - \bar{y}_2| > q\,|y_0^1 - y_0^2|$. Относительно кривой Th применимы те же рассуждения, что и для кривой h, так как $T\,(H_0 \setminus S)\ \subset\ H_0$, и т. д. Приходим к противоречию, так как, с одной стороны, длина кривой $T^k\, h$ обязана в силу (2.15) возрастать до бесконечности, а с другой – оставаться ограниченной, поскольку кривая $T^k\, h,\ \ k \in \mathbb{Z}_+$ принадлежит только одному из множеств Π_{ij} и является липшицируемой с константой L , не зависящей от k.

Отметим, что прообразы линий разрыва не пересекаются между собой. Это легко следует из того, что они являются следами на секущей D устойчивого многообразия точки O, которое есть образ плоскости при инъективной иммерсии [6]. Покажем, что прооб-

[6]Этот факт несложно установить и прямым доказательством.

разы линий разрыва включаются в некоторое инвариантное слоение. Зафиксируем точку $Q \in T(\bigcup_{i,j} \Pi_{ij})$, не лежащую в H_0. Рассмотрим полутраектррию $(Q_0, Q_1, \ldots)$ точки Q_0, $Q_k = T^k Q_0$. Введем множество пространств $\{H_k^+\}$ таких, что H_k^+ состоит из всех кривых, каждая из которых содержит точку Q_k, содержится в Π_1 или в Π_2, в зависимости от того, где находится точка Q_k, и записывается в виде $y = h(x)$, $-1 \le x \le -1/2$ или $1/2 \le x \le 1$, причем функция h удовлетворяет условию Липшица с константой M из леммы 3.1. Отображение T^{-1} переводит точку Q_k в точку Q_{k-1} и одновременно действует на кривые из H_k^+, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пространства H_k^+ с обычной C^0-метрикой являются, очевидно, полными.

Лемма 3.3. *Отображение T^{-1} индуцирует отображение $\tau_{k,k-1} : H_k^+ \to H_{k-1}^+$, удовлетворяющее принципу сжатых отображений.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $k \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим кривую $h \in H_k^+$. По лемме 3.1 точка Q_{k-1} лежит на кривой, принадлежащей $T^{-1}h$ удовлетворяющей условию Липшица с константой M. Обозначим эту кривую через h' и определим оператор $\tau_{k,k-1} : H_k^+ \to H_{k-1}^+$ соотношением $\tau_{k,k-1}h = h'$. Покажем его сжимаемость. Для двух произвольных кривых $h_1 \in H_k^+$, $h_2 \in H_k^+$ из тождеств

$$\begin{gathered} \bar{y}_1 = h_1(f_0(x, \bar{y}_1)), \quad y_1 = g_0(x, \bar{y}_1) \\ \bar{y}_2 = h_2(f_0(x, \bar{y}_2)), \quad y_2 = g_0(x, \bar{y}_2), \end{gathered} \tag{3.6}$$

используя (2.2), получим

$$\begin{gathered} \|\bar{y}_1(x) - \bar{y}_2(x)\| \le \frac{1}{1 - \|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \|h_1 - h_2\|, \\ \|y_1(x) - y_2(x)\| \le \frac{\|g_y^{-1}\|}{1 - \|f_y \cdot g_y^{-1}\| M} \|h_1 - h_2\|, \end{gathered} \tag{3.7}$$

Для сжимаемости оператора $\tau_{k,k-1}$ достаточно, чтобы

$$M < \frac{1 - \|g_y^{-1}\|}{\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \tag{3.8}$$

Для существования положительных M, удовлетворяющих неравенствам (3.5) и (3.8), достаточно, чтобы

$$1 - \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_x\| - \sqrt{(1 - \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_x\|)^2 - 4\|f_y \cdot g_y^{-1}\| \|g_x\| \|g_y^{-1}\|} < \frac{1 - \|g_y^{-1}\|}{\|f_y \cdot g_y^{-1}\|}$$

или

$$\sqrt{(1 - \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_x\|)^2 - 4\|f_y \cdot g_y^{-1}\| \|g_x\| \|g_y^{-1}\|} > 2\|g_x^{-1}\| - \|g_y^{-1}\| \cdot \|f_x\| - 1,$$

а это то же неравенство, что и в лемме 2.3, которое является верным в силу условия (1.1).

Таким образом, имеется последовательность полных пространств H_k^+ и сжимающих операторов

$$\tau_{k,k-1} : H_k^+ \to H_{k-1}^+, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

По лемме из [45] получаем, что через каждую точку полутраектории $(Q_0, ..., Q_k, ...)$ проходит единственная кривая указанного выше типа, т. е. слой. Если же $Q_0 \in H_0$, то Q_0 лежит на кривой, являющейся прообразом линии разрыва. Таким образом, через каждую точку $Q \in \overline{T\,(\bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}\,)}$ проходит слой. Обозначим объединение всех этих слоев через H^+. Если положить $T\,(l(1) \cup l(2)) = P_1 \cup P_2$, то из лемм 3.1 и 3.3 получим, что для любой кривой h из H^+, $Th \subset h_1$, $h_1 \in H^+$.

Лемма 3.4. *Кривые из H^+ образуют непрерывное слоение на* $\overline{\bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}}$.

Доказательство. Достаточно показать, что слои, проходящие через точки множества $\overline{T\,(\bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}\,)}$, либо не пересекаются, либо совпадают и непрерывно зависят от точки.

1°. Пусть $h_1, h_2 \subset H^+$ и $h_1 \cap h_2 \neq \emptyset$, $h_1 \neq h_2$. Из леммы 3.2, используя лемму Жордана, легко вывести, что существует такой прообраз h линии разрыва, что $h \cap (h_1 \cap h_2) \neq \emptyset$. Для определенности пусть $h \cap h_1 \neq \emptyset$ (очевидно, $h \in H_0^*$). Тогда существует $k \in \mathbb{Z}_+$, что $T^k\, h_1 \cap l(i) \neq \emptyset$, $i \in \{1, 2\}$.

Проведем отрезок h^- кривой вида $x = h^-(y)$, где функция h^- удовлетворяет условию Липшица с константой L из § 2, причем

$$T^k\, h_1 \cap h^- \neq \emptyset, \quad l(i) \cap h^- \neq \emptyset, \quad \text{и } h^- \cap (T^k\, h_1 \cap l(i)) \neq \emptyset$$

(рис. 8). Тогда кривые $T^{k+1}h_1$ и $T\,h^-$ имеют по крайней мере две общие точки (одна из которых P_j, $j = \{1, 2\}$). С другой стороны, $T^{k+1}h_1$ в силу леммы 3.3 лежит на кривой, удовлетворяющей условию Липшица с константой M, а кривая $T\,h^-$ в силу леммы 2.1 удовлетворяет условию Липшица с константой L. И так как $M \cdot L < 1$, то они обязаны пересекаться в единственной точке.

2°. Для доказательства непрерывности полученного слоения H^+ рассмотрим произвольную последовательность точек $Q_k \in \bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}$, сходящуюся в точке $Q_0 \in \bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}$, и покажем, что последовательность слоев h_k, $H^+ \ni h_k \ni Q_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ сходится к слою $h_0 \ni Q_0$. Можно (применяя, если необходимо, отображение T к последовательности $\{Q_k\}$) считать, что точки $Q_k \in T\,(\bigcup\limits_{i,j} \Pi_{ij}\,)$, $k = 0, 1, \ldots$. Возможны два случая: а) существует целое неотрицательное n такое, что $T^n\, Q_0 \in S$; б) для любого $n \in \mathbb{Z}_+$ $T^n\, Q_0 \notin S$.

В случае б) отображение непрерывно в каждой точке полутраектории $\{T^n Q_0\}_{n \geq 0}$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ найдутся $\delta > 0$ и $N_0 \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $\rho(T^j\, Q_i,\ T^j\, Q_0) < \delta$ при $0 \leq j \leq k$ и $i \geq N_0$, где ρ – расстояние на D. Следовательно, точки $T^k Q_s$ и $T^k Q_0$ принадлежат одному и тому же множеству Π_{ij} при $s \geq N_0$. Рассмотрим слои $h_i^k \ni T^k Q_i$ и $h_0^k \ni T^K Q_0$. В силу леммы 3.3 расстояние между h_i, $Q_i \in h_i \subset T^{-k} h_i^k$ и h_0, $Q_0 \in h_0 \subset T^{-k} h_0^k$ будет в q_0^k раз меньше, чем расстояние между h_i^k и h_0^k, где q_0 – общая константа сжатия операторов $\tau_{k-1,k}$. Так как k может быть сделано произвольно большим при достаточно большом i, то $d_{C^0}(h_i,\, h_0) \to 0$ при $i \to \infty$.

В случае а) достаточно доказать непрерывность, когда $Q_0 \in l(1) \cup l(2)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $Q_0 \in l(1)$ и $Q_i \to Q_0$, оставаясь с одной стороны от $l(1)$, например, сверху. Пусть последовательность $\{h_i (\in Q_i)\}$ не сходится к $l(1)$. Тогда

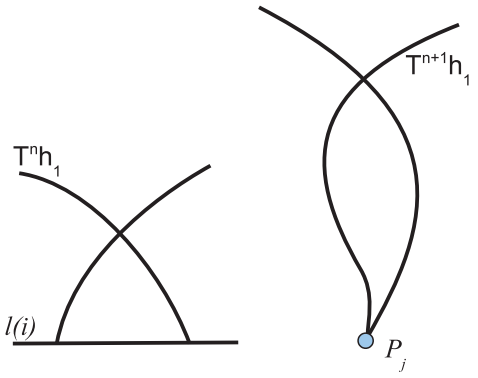


Рис.8

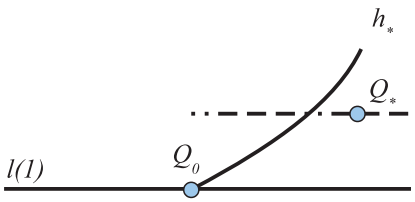


Рис. 9

в ней существует подпоследовательность $\{h_{ik}\}$ такая, что $d_{C^0}(h_{ik}, l(1))$ больше некоторой константы $\delta > 0$. Так как последовательность слоев h_i компактна (все h_i имеют одну и ту же константу Липшица), то из подпоследовательности h_{ik} можно выбрать сходящуюся (в C^0) подпоследовательность $h(i_{k_s})$. Пусть $h_* = \lim\limits_{s\to\infty} h(i_{k_s})$. Так как $h_* \neq l(1)$, то существует точка Q_*, лежащая "между" h_* и $l(1)$ (рис. 9). Через Q_* проходит слой слоения H^+, который по лемме Жордана обязан (не совпадая) иметь общие точки либо с $l(1)$, либо с $h(i_{k_s})$ для достаточно больших s, что невозможно по пункту 1^0) доказательства. Лемма доказана.

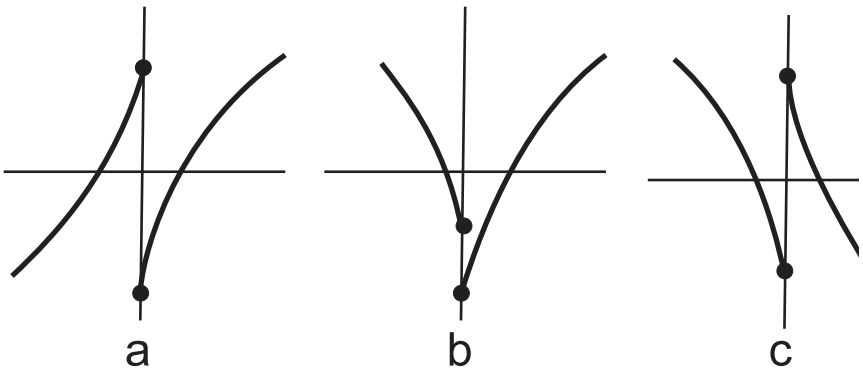


Рис. 10

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема позволяет интерпретировать топологические свойства двумерного отображения на языке разрывного одномерного отображения. Однако следует иметь в виду, что слоение H^+ в общем случае только лишь непрерывно, поэтому одномерные отображения будут кусочно-непрерывными. Одномерные отображения, соответствующие случаям А, Б. и В, выглядят так, как указано на рис. 10,

§ 4. **Рациональный случай**

Напомним, что рациональным мы назвали тот случай, когда обе сепаратрисы возвращаются в седло O. Характерная особенность этого случая заключается в том, что для

описания предельного множества здесь достаточно аппарата конечных марковских разбиений, что для негрубых множеств является исключительным обстоятельством. В случае A обозначим через $h_{11},\ h_{12},\ h_{21},\ h_{22}$ слои слоения H^+ , проходящие через точки $TP_2,\ P_1,\ P_2$ и TP_1 соответственно. Предположение о существовании двух петель сепаратрис на языке точечных отображений означает, что слои h_{ij} являются прообразами линии разрыва, т. е. $h_{ij} \subset H_0$, $i,\, j \in \{1,\, 2\}$. Всюду в этом параграфе будем предполагать эти включения выполненными. Отсюда следует, что существуют такие натуральные числа r и s (будем считать их наименьшими), что для некоторых наборов индексов $(n_1,\, \dots, n_r)$) и $(m_1,\, \dots, m_s)$, $m_i,\, n_j \in \{1,\, 2\}$, выполнены включения: $P_1 \in l(n_1,\, \dots, n_r)$, $P_2 \in l(m_1,\, \dots, m_s)$. Для определенности будем считать, что $r \geq s$. Пусть

$$\tilde{\Pi}_1 = \{(x,\, y) \mid\ 1/2 \leq x \leq 1,\ \ h_{12}(x) \leq y \leq h_{11}(x)\}\,,$$

$$\tilde{\Pi}_2 = \{(x,\, y) \mid\ -1 \leq x \leq -1/2,\ \ h_{22}(x) \leq y \leq h_{21}(x)\}\,.$$

Очевидно, $T\,(\,(\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2\,) \setminus S\,) \subset \tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2$ Рассмотрим множество $\mathfrak{N} = \{(n_1,\, \dots, n_i),\ 1 \leq i \leq r\}$ всех наборов индексов, что $l(n_1,\, \dots, n_i) \cap (\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2) \neq \emptyset$. Множество устойчивых слоев $\{l(n_1,\, \dots, n_i) \mid (n_1,\, \dots, n_i) \in \mathfrak{N}\}$ перенумеруем, обозначив их через $l_{ij}(\subset \tilde{\Pi}_i)$, $i \in \{1,\, 2\}$, $1 \leq j \leq k_i$, где k_i – натуральное число, не превосходящее 2^r. Кривыми l_{ij} множество $\tilde{\Pi}_i$ разделяется на замкнутые подмножества $\tilde{\Pi}_i^{(1)}, \dots, \tilde{\Pi}_i^{(k_l-1)}$, причем нумерация произведена так, что

$$\tilde{\Pi}_i^{(j)} \cap \tilde{\Pi}_i^{(j+1)} = l_{ij},\ \ j = 1,\, \dots, k_i - 1,\ \ i \in \{1,\, 2\}\,.$$

Множество точек $\{l_{ij}\}$ кривых l_{ij} инвариантно в том смысле, что $T(\{l_{ij}\} \setminus S) \subset \{l_{ij}\}$. Поэтому образ "любого прямоугольника" $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$ при (соответствующим образом доопределенном) отображении T так пересекает другие прямоугольники, что если $T(\operatorname{int} \tilde{\Pi}_i^{(j)}) \cap \operatorname{int} \tilde{\Pi}_m^{(n)} \neq \emptyset$, то $\overline{T(\operatorname{int} \tilde{\Pi}_i^{(j)})}$ пересекается и с верхним и с нижним основаниями $\tilde{\Pi}_m^{(n)}$, следовательно, множества $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$ являются элементами марковского разбиения для отображения T (точнее говоря, множества $\tilde{\Pi}_i^{(j)} \cap \Sigma$ будут являться элементами марковского разбиения $T\,|_{\Sigma}$, где Σ – замыкание множества точек траекторий отображения T, целиком остающихся в $\overline{\bigcup\limits_{i,\,j} \tilde{\Pi}_i^{(j)}}$.

Каждой области $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$ поставим в соответствие пространство $H_i^{(j)}$ всех кривых, лежащих в $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$, уравнение каждой из которых $x = h(y)$, h удовлетворяет условию Липшица с константой L из § 2 , а концы кривой h лежат на l_{ij} и $l_{i\,j+1}$. В пространстве $H_i^{(j)}$ введем следующую метрику:

$$\tilde{\rho}(h_1,\, h_2) = \sup_{h^+ \in H^+,\, h^+ \subset \tilde{\Pi}_i{}^{(j)}} |x(h_1,\, h^+) - x(h_0,\, h^+)|\,,$$

где $x(h_i,\, h^+)$ – абсцисса точки пересечения кривой h_i со слоем

$$h^+ \in H^+,\ \ i \in \{1,\, 2\}.$$

Лемма 4.1. *$\tilde{\rho}$ является метрикой, в которой пространство $H_i^{(j)}$ полное.*

Доказательство. 1°. Покажем, что $\tilde{\rho}$ – метрика. Пусть $\tilde{\rho}(h_1,\, h_2) = 0$, тогда $x(h_1,\, h^+) = x(h_2,\, h^+)$ для любого слоя h^+. Координаты точки пересечения h_i с h^+ удовлетворяют условию $y_i = h^+(x(h_i,\, h^+))$, $i = 1,\, 2,$, поэтому $y_1 = y_2$. Неравенство треугольника очевидно.

2°. Покажем, что $H_i^{(j)}$ – полное пространство. Пусть $\{h_k\}$ – последовательность Коши, т. е. $\tilde{\rho}(h_k,\, h_{k+m}) < \varepsilon$ при $k > N(\varepsilon),\ m \in \mathbb{Z}_+$. Зафиксируем произвольный слой h^+, лежащий в $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$. Так как последовательность $x(h_k,\, h^+)$ является последовательностью Коши на отрезке $[-1,\, 1]$, то она сходится в точке, которую мы обозначим через $x_0(h^+)$. Покажем, что множество

$$h_0 \equiv \bigcup_{h^+ \subset \tilde{\Pi}_i^{(j)}} (x_0(h^+),\ h^+(x_0(h^+)))$$

является кривой, записываемой в виде $x = h_0(y)$. Это следует из того, что каждая прямая $y = const$, пересекающая h_k во внутренней точке множества $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$ пересекается с h_k (в силу (3.1)) по единственной точке Q_k стремящейся к некоторой точке $Q_0 \in h_0$. Таким образом, каждому "внутреннему" y соответствует единственное x , т. е. имеем функцию $x = h_0(y)$, которая единственным образом доопределяется по непрерывности на замкнутый интервал.

Покажем, что h_0 удовлетворяет условию Липшица с константой L. Достаточно проверить это условие во внутренней точке. Пусть $(x_s,\, y_s) \in \operatorname{int} \tilde{\Pi}_i^{(j)},\ s = 1,\, 2$. Начиная с некоторого k, $(h_k(y_s),\, y_s) \in \operatorname{int} \tilde{\Pi}_i^{(j)}$. Поэтому

$$|h_0(y_1) - h_0(y_2)| \le |h_0(y_1) - h_k(y_1)| + |h_k(y_2) - h_0(y_2)| + |h_k(y_1) - h_k(y_2)| \le L|y_1 - y_2| + \alpha_k,$$

где $\alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$. Так как левая часть этого неравенства не зависит от k, то

$$|h_0(y_1) - h_0(y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|.$$

Определим топологическую марковскую цепь следующим образом. Состояния цепи (вершины графа G) отождествим с пространствами $H_i^{(j)}$. Будем говорить, что из состояния $H_{i_1}^{(j_1)}$ в состояние $H_{i_2}^{(j_2)}$ есть переход (в графе G существует ребро с началом в вершине $H_{i_1}^{(j_1)}$ и концом в вершине $H_{i_2}^{(j_2)}$), если $T(\operatorname{int} h) \cap \operatorname{int} \tilde{\Pi}_{i_2}^{(j_2)} \ne \emptyset$ для $h \in H_{i_1}^{(j_1)}$. Непосредственно из построения областей $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$ следует, что каждая вершина графа G является началом некоторого ребра. Может оказаться, что существуют вершины, не являющиеся концом никакого ребра. Откинем их вместе с ребрами, в них начинающимися. Полученный новый граф (чтобы не усложнять обозначений) по-прежнему обозначим через G, а соответствующую топологическую марковскую цепь – через $(G,\, \Omega,\, \sigma)$. Она уже будет консервативной [46]. Переобозначим пространства $H_i^{(j)}$ (области $\tilde{\Pi}_i^{(j)}$) через $H_1,\, \dots,\, H_k$ $(V_1,\, \dots,\, V_k)$, а состояния марковской цепи – через $1,\, 2,\, \dots,\, k$.

Л е м м а 4.2. *Каждому переходу топологической марковской цепи* $(G,\, \Omega,\, \sigma)$. *соответствует оператор* $\tau_{ij} : H_i \to H_j$ *, являющийся сжимающим.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольную кривую $h \in H_i$. Так как существует переход $i \to j$, то $T(\operatorname{int} h) \cap \operatorname{int} V_j \ne \emptyset$. Положим $\tau_{ij}(h) = T\, h \cap V_j$. Точно так же, как в лемме 2.1, показывается, что $\tau_{ij}(h) \in H_j$. Покажем, что τ_{ij} – сжимающий оператор. Пусть $h_1,\, h_2$ – две произвольные кривые из H_i. Абсциссу пересечения кривой h_k с произвольным слоем h^+ обозначим через x_k, а абсциссу пересечения кривой $\tau_{ij}(h_k)$ со слоем $\bar{h}^+,\ \bar{h}^+ \subset Th^+$, обозначим через $\bar{x}_k,\ k = 1,\, 2$. Выполнены равенства $\bar{x}_k = f_0(x_k,\, \bar{h}^+(x_k)),\ k = 1,\, 2$, отсюда

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \le \frac{\|f_{0x}\|}{1 - \|f_{0y}\| M}\ |x_1 - x_2|\,, \quad \text{и по (2.2)}$$

$$|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \le \frac{\|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|}{1 - \|f_y \cdot g_y^{-1}\| M} \; |x_1 - x_2|, . \tag{4.1}$$

Потребуем, чтобы

$$M < \frac{1 - (\|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|)}{\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \tag{4.2}$$

Положительные значения M, удовлетворяющие (4.2) и (3.5), существуют, если

$$\frac{1 - (\|f_x\|\|g_y^{-1}\| - \sqrt{(1 - \|f_x\|\|g_y^{-1}\|)^2 - 4\|g_y^{-1}\|\|g_x\|\|f_y \cdot g_y^{-1}\|}}{\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} <$$

$$< \frac{1 - (\|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|)}{\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} \; ,$$

или

$$\sqrt{(1 - \|f_x\|\|g_y^{-1}\|)^2 - 4\|g_y^{-1}\|\|g_x\|\|f_y \cdot g_y^{-1}\|} > -1 + \|f_x\|\|g_y^{-1}\| + 2(\|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|) \, .$$

Если правая часть этого неравенства положительна, то после возведения обеих частей в квадрат, приведения подобных членов и сокращения на $4\|f_x\| + \|g_x\| \cdot \|f_y \cdot g_y^{-1}\|$ получим условие г) (1.1), которое предполагается выполненным.

Таким образом, $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| \le q_0 |x_1 - x_2|$ для любой кривой h^+ и $q_0 < 1$. Отсюда $\tilde{\rho}(\tau_{ij}\, h_1, \;\; \tau_{ij}\, h_2) \le q_0\, \tilde{\rho}(h_1, \, h_2)$.

З а м е ч а н и е. Из леммы 4.2 следует экспоненциальная сближаемость итераций точек на устойчивых слоях при положительном направлении итерирования.

Как и в § 2, введем определение. *Последовательность кривых* $(..., h_{-1}, h_0, \, ..., h_i, ...)$ *будем называть инвариантным неустойчивым слоем, если каждая* h_i *принадлежит одному из пространств* $H_j, \;\; j \in \{1, \, 2, \, ..., k\}$ *и для любой пары* $h_i, \, h_{i+1}$ *найдется оператор* τ_{mn}, *определенный в лемме* 4.2, *такой, что* $\tau_{mn}\, h_i = h_{i+1}$.

Л е м м а 4.3. *Существует взаимно-однозначное отображение* $\varkappa$ *множества* Ω *на множество всех инвариантных неустойчивых слоев такое, что*

1) если $\varkappa(\omega) = (..., \, h_{-1}, \, h_0, \, ..., \, h_i, \, ...), \;\; \omega \in \Omega, \; ,$ *то*

$$\varkappa(\sigma\omega) = (..., \, h'_{-1}, \, h'_0, \, ... \, , \, h'_i, , ...),$$

причем $h'_i = h_{i+1}$ *;*

2) отображение $\pi_i \odot \varkappa$ *непрерывно в метрике* $\tilde{\rho}$, *где* π_i *проекция инвариантного неустойчивого слоя на* i*-ю координату.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.2.

Л е м м а 4.4. *Для любого инвариантного неустойчивого слоя существует единственная траектория отображения* T *на этом слое.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.3.

Каждой точке $\omega \in \Omega$ поставим в соответствие точку $\eta(\omega) = Q_0$ траектории $(..., Q_{-1}, \, Q_0, \, ... \, Q_i, \, ...)$ отображения T на слое $(..., \, h_{-1}, \, h_0, \, ..., \, h_i, \, ...)$, соответствующем точке ω по лемме 4.3, и обозначим $\bigcup\limits_{\omega \in \Omega} \eta(\omega)$ через Σ. Как и в лемме 2.4, доказывается, что

отображение $\eta : \Omega \to \Sigma$ непрерывно и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\sigma} & \Omega \\ \downarrow \eta & & \downarrow \eta \\ \Sigma & \xrightarrow{T} & \Sigma \end{array}$$

коммутативна.

Точно так же, как в лемме 2.6, показывается, что Σ совпадает с множеством точек всех траекторий, целиком содержащихся в $\operatorname{int} \bigcup\limits_{i,\, j=1}^{2} \Pi_{ij}$; как в лемме 2.7, устанавливается, что Σ совпадает с множеством точек всех инвариантных неустойчивых слоев. Непосредственной проверкой убеждаемся, что для случаев B и C доказательства соответствующих утверждений совершенно аналогичны. Следует лишь дать определения множествам $\tilde{\Pi}_1$ и $\tilde{\Pi}_2$. Среди множества точек $\{T^k P_1 \bigcup T^s P_2\}_{k,s\in\mathbb{Z}_+}$ существует точка, через которую проходит устойчивый слой $y = h_{i_1}(x)$, $(y = h_{i_2}(x))$, лежащий выше (ниже) слоев, проходящих через остальные точки этого множества. Положим

$$\bar{\Pi}_i = \{(x,\, y) \in \Pi_i \mid h_{i_2}(x) \le y \le h_{i_1}(x)\}\,, \quad i = 1,\, 2.$$

Лемма 4.5. *Множество Σ одномерно.*

Доказательство не двумерности Σ такое же, как в лемме 7.4. С учетом этого одномерность в случаях B и C ċследует, из того, что неустойчивое многообразие неподвижной точки отображения T, существование которой легко установить, обязано принадлежать Σ. В случае же A оно такое же, как в лемме 7.4.

Лемма 4.6. *В случаях A и C множество $\Sigma \cap \Pi_i$, $i \in \{1,\, 2\}$ связно.*

Доказательство. 1°. Случай A. Покажем сначала, что все точки $\{T^k P_1 \bigcup T^k P_2\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$, лежащие в Π_i принадлежат одной и той же компоненте связности множества Σ, а именно той же, которой принадлежит точка P_i, $i = \{1,\, 2\}$. Доказательство будем проводить по индукции.

Шаг 1. Существует отрезок $h_i \subset \Sigma$, являющийся конечным объединением отрезков инвариантных неустойчивых слоев, граничными точками которого будут точки P_i и $TP_{\bar{i}}$, $\bar{i} = 3 - i$. Докажем это. Пусть $\Pi_{ij} = \tilde{\Pi}_i \cap \Pi_{ij}$, H_{ij} – пространство кривых (с метрикой $\tilde{\rho}$), каждая из которых является пересечением кривой из $H_{ij}(L)$ из § 2 с множеством $\tilde{\Pi}_{ij}$, $i, j \in \{1,\, 2\}$. Определим операторы $\tau_1 : \tilde{H}_{21} \to H_{12}$ и $\tau_2 : \tilde{H}_{12} \to H_{21}$ следующим образом: для $h \in \tilde{H}_{21} : \tau_1 h = Th \cap \tilde{\Pi}_{12}$ и для $h \in \tilde{H}_{12} : \tau_2 h = Th \cap \tilde{\Pi}_{21}$. Совершенно аналогично доказательствам лемм 2.1, 5.2 проводится доказательство включений $\tau_1 \tilde{H}_{21} \subset \tilde{H}_{12}$, $\tau_2 \tilde{H}_{12} \subset \tilde{H}_{21}$ и доказательство сжимаемости операторов τ_1 и τ_2. Поэтому суперпозиция

$$\tau_1 \circ \tau_2 : \tilde{H}_{12} \to \tilde{H}_{12} \quad (\tau_2 \circ \tau_1 : \tilde{H}_{21} \to \tilde{H}_{21})$$

имеет единственную неподвижную точку – кривую $h_{12} \in \tilde{H}_{12}$ (кривую $h_{21} \in \tilde{H}_{21}$. Из определения множества Σ вытекает, что $h_{12} \cup h_{21} \subset \Sigma$. Искомые кривые $h_1 \equiv \overline{Th_{21}}$, $h_2 \equiv \overline{Th_{12}}$. Таким образом, точка $T\,P_{\bar{i}}$ принадлежит той же компоненте связности множества, что и точка P_i, $i \in \{1,\, 2\}$

Шаг 2. Множество $\overline{T \cdot h_1}$ состоит из двух отрезков, один из которых h_1^1 соединяет точки $T^2 P_2$ и P_1, а другой – точки TP_1 и P_2 ; множество $\overline{T \cdot h_1^1}$ (при $n_1 > 2$) также состоит из двух

отрезков, один из которых h_1^2 соединяет точки T^3P_2 и P_1, а другой – точки P_2 и TP_1 и т. д. Таким образом, все точки T^iP_2 до тех пор, пока $T^iP_2 \in \Pi_1$, т. е. при $i \geq i_0 = n_1 + 1$, лежат в той же компоненте связности множества Σ, что и точка P_1. Аналогично до тех пор, пока $T^jP_1 \in \Pi_2$, т. е. при.$j \leq j_0 = n_2 + 1$, точки T^jP_1 принадлежат той же компоненте связности, что и точка P_2.

Шаг 3. Отсюда сразу следует, что точка $T\,(T^j \cdot P_1)$ и $T\,P_2$ принадлежат компоненте связности множества Σ, содержащей точку P_1, так как существует отрезок в Σ, соединяющий точки $T\,P_2$ и $T^{j_0+1} \cdot P_1$. Аналогично точки $T\,(T^{i_0} \cdot P_2)$ и $T\,P_1$ принадлежат компоненте связности, содержащей точку P_2.

Дальнейшие рассуждения аналогичны уже приведенным.

2°. Рассмотрим произвольную точку $Q_0 \in \Sigma,\ \ Q_0 \in V_j$. Пусть $h_0 \in H_j$ – отрезок инвариантного неустойчивого слоя, содержащий точку Q_0 , и $h_k \in H_{j_1}$ – отрезок инвариантного неустойчивого слоя, содержащий точку $T^{-k}\,Q_0 \in V_{j_1}$. Так как модуль разности ординат концов любых кривых из пространств H_j отделен от нуля, то существуют $i_0,\ \ k_0 \in \mathbb{Z}_+,\ \ 0 < i_0 < k_0$, такие, что в образе $T^{i_0}\,h_{k_0}$ имеется компонента связности, пересекающая S . А это означает, что h_0 принадлежит отрезку (или совпадает с ним), один из концов которого принадлежит $\bigcup\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} T^s\,(P_1 \bigcup P_2)$. Отсюда и из пункта 1° доказательства следует, что точка $Q_0 \in \Pi_i$ принадлежит той же компоненте связности, что и точка $P_i,\ \ i = \{1,\,2\}$. Следовательно, множество $\Sigma \bigcap \Pi_i$ обязано быть связным, $i = \{1,\,2\}$.

С л у ч а й С. 1°. Как и в случае А , покажем сначала, что все точки пересечения $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ с D, т. е. точки $\{T^kP_1\} \cup \{T^sP_1\}_{k,\,s\in\mathbb{Z}_+}$, лежащие в Π_i , принадлежат одной и той же компоненте связности множества Σ – той, которой принадлежит точка $P_i,\ \ i = \{1,\,2\}$.

Из определения области U_2 и условий (1.1) следует, что у отображения T в рассматриваемом случае есть неподвижные точки M_1 и M_2. У отрезка неустойчивого многообразия, содержащего точку M_i , одним концом является точка P_i, а другим – точка TP_i , которые тем самым становятся принадлежащими компоненте $\Sigma \cap \Pi_i$. По индукции, пусть точки из множества $X_{k\,i} = \bigcup\limits_{s=1}^{k}(T^s\,P_1 \cup T^s\,P_2) \cap \Pi_i$ принадлежат одной компоненте связности Σ, точнее говоря, содержатся в одномерном комплексе Y_{ki}, состоящем из конечного множества отрезков, каждый из которых является замыканием компоненты связности неустойчивого многообразия точки M_1 или M_2 и имеет граничными точками точки из $X_{k\,i}$. Покажем, что то же справедливо для точек из $X_{k+1\,i}$. Пусть $Q \in (T^k\,P_1 \cup T^k\,P_2) \cap X_{k\,i}$. Следовательно, Q является граничной точкой отрезка h из $Y_{k\,i}$, другой граничной точкой которого обязана быть точка Q_1 из $X_{k-1\,i}$. Если $T\,Q_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{2} X_{k\,i}$, то $T\,h$ имеет концами точки TQ и $T\,Q_1 \subset \bigcup\limits_{i=1}^{2} X_{k\,i}$. Если же $\operatorname{int} h \cap S \neq \emptyset$, то TQ является концом отрезка из $Y_{k+1\,i}$, другим концом которого является точка из $(P_1 \cup P_2)$, т. е. точка из $X_{k\,i}$. По индуктивному предположению в обоих случаях, если $TQ \in \Pi_j$, то $TQ \in Y_{ki+1\,j}$, отсюда получаем справедливость утверждения.

2°. Доказательство того, что произвольная точка $Q_0 \in \Sigma$ принадлежит отрезку, состоящему из элементов инвариантных неустойчивых слоев, один из концов которого принадле-

жит $\bigcup\limits_{s\in\mathbb{Z}_+} T^s\,(P_1 \cup P_2)$, проводится так же, как в п. 2° доказательства для случая A. Лемма доказана.

В случае B ситуация значительно сложнее. Приведем пример, показывающий, что множество Σ может иметь три компоненты (и вообще, сколь угодно большое число компонент) связности (рис. 11). Стрелками показана ориентация образов отрезка EF при итерировании его отображением T. Граф ТМЦ, отвечающий марковскому разбиению, изображен на этом же рис. 11.

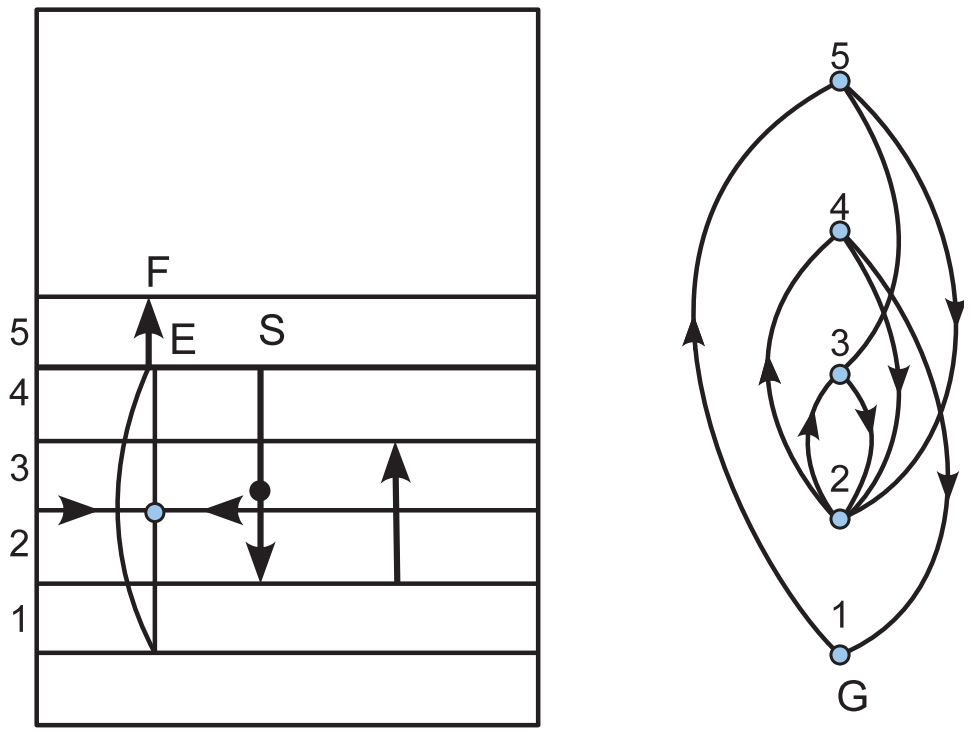


Рис. 11

В случае B справедлив следующий результат.

Л е м м а 4.7. *Множество $\Sigma \cap \Pi_1$ связно, а $\Sigma \cap \Pi_2$ состоит из конечного числа компонент связности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Если $(\Sigma \cap D_1) \cap \Pi_1 = \emptyset$, тогда $\Sigma \cap \Pi_1 = = T(\Sigma \cap \Pi_2) \cap D_1$ в силу свойств отображения T , и сколько бы компонент связности, ни имело множество $(\Sigma \cap \Pi_2) \cap D_1$, их образы имеют общую точку P_1. Таким образом, $\Sigma \cap \Pi_1$ связно. До тех пор, пока $T^i(\Sigma \cap \Pi_1) \cap S = \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots, T^{i+1}(\Sigma \cap \Pi_1) \subset \Pi_2$ каждое из множеств $T^s(\Sigma \cap \Pi_1)$ является компонентой связности множества $\Sigma \cap \Pi_2$, $s = 1, 2, \ldots, i+1$. Пусть i_0 – первый номер такой, что $T^{i_0}(\Sigma \cap \Pi_1) \cap S \neq \emptyset$. Тогда

$$\overline{T\left(T^{i_0}(\Sigma \cap \Pi_1) \cap D_2\right)}$$

содержит точку P_2 и поэтому принадлежит той же компоненте Σ, что и точка P_2. Далее, из свойства T легко следует, что любая компонента Σ, не содержащая P_2 и пересекающаяся с Π_2, является образом $\Sigma \cap \Pi_1$ для некоторой степени отображения T, следовательно, она является одним из множеств $T^s(\Sigma \cap \Pi_1)$ для $0 < s < i_0$. Поэтому число компонент Σ равно $i_0 + 1$.

2°. Если $\overline{(\Sigma \cap D_1)} \cap \Pi_1 \neq \emptyset$, тогда, так как $\Sigma \cap \Pi_1 = \overline{T\,(\Sigma \cap \Pi_2 \cap D_1)}$, следовательно, $\Sigma \cap \Pi_1$ – связное множество, во-первых, и $\overline{T\,(\Sigma \cap \Pi_1 \cap D_2)}$ содержит точку P_2 , во-вторых, откуда следует, что Σ состоит из двух компонент связности. Лемма доказана.

Дальнейшие результаты докажем для случая A , поскольку они практически без изменений переносятся на случаи B и C.

Доказанные леммы характеризуют множество Σ всех траекторий отображения T, целиком содержащихся в $\mathrm{int}(\overline{\bigcup\limits_{i,\,j=1}^{2} \Pi_{i\,j}})$. Однако множество неблуждающих точек отображения T, содержащихся в $\mathrm{int}(\overline{\bigcup\limits_{i,\,j} \Pi_{i\,j}})$, может не совпадать с Σ. Для ответа на вопрос, каким оно может быть, проанализируем более подробно структуру пространства Ω ТМЦ $(G,\,\Omega,\,\sigma)$. Из теоремы 3.3 в [46] следует, что неблуждающие множества $\Omega_1 \subset \Omega$ разбивается на три подмножества: источник Ω^- представляемый подграфом G^- графа G , "седловое" множество Ω^0 , представляемое подграфом G^0 графа G , и сток Ω^+, соответствующий подграфу $G^+ \subset G$. Если цепь транзитивна, условимся считать $\Omega^- = \Omega^0 = \emptyset$.

Пусть $\Sigma^+ = \eta(\Omega^+)$; $\Sigma^- = \eta(\Omega^- \cup \Omega^0)$, если ТМЦ $(G,\,\Omega,\,\sigma)$ не транзитивна, а $\Sigma^- = \emptyset$ в противном случае.

Лемма 4.8. *Периодические точки отображения T всюду плотны в Σ^+.*

Доказательство. 1°. Вершинам графа G^+ соответствует (по построению) набор областей $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$, объединение которых обозначим через V^+. Установим транзитивность ТМЦ $(G^+,\,\Omega^+,\,\sigma)$). Действительно, так как все точки в Ω^+ неблужадющие, то достаточно установить связность графа G^+. А это следует из того, что образ любой кривой (для некоторой степени T) из $H_{mn}(V_{mn} \subset V^+)$ пересечет $l(i)$, $i \in \{1,\,2\}$, в своей внутренней точке и поэтому при следующей итерации распадается на два отрезка, граничной точкой одного из которых будет P_1 а другого – P_2. Если $P_1 \in \partial V_{i'}$, а $P_2 \in \partial V_{i''}$, то, таким образом, из любой вершины графа G^+ есть путь в вершины, отвечающие $V_{i'}$ и $V_{i''}$ соответственно.

2°. Топологическая энтропия $\sigma \mid \Omega^+ > 0$. Это следует из п. 1° и из того, что хотя бы из одного состояния цепи $(G,\,\Omega,\,\sigma)$ есть переход по крайней мере в два (например, в состояния, соответствующие $V_{i'}$ и $V_{i''}$). Таким образом, в Ω^+ всюду плотны периодические точки, которых счетное множество.

Рассмотрим две различные периодические траектории
$A = (\ldots, \omega_1, \ldots, \omega_2, \ldots)$ и $A' = (\ldots, \omega_1', \ldots, \omega_2', \ldots)$ из Ω^+ и предположим, что $\eta(\omega_1) = \eta(\omega_1')$. Так как по лемме 4.3 (см. также замечание 2 к лемме 2.2) кривые h_0 и h_0', являющиеся нулевыми компонентами инвариантных неустойчивых слоев $\varkappa(\omega_1)$ и $\varkappa(\omega_1')$, могут пересекаться лишь в точках границы марковского разбиения, то точка $\eta(\omega_1) = \eta(\omega_1')$ обязана принадлежать одной из кривых l_{ij}. Поэтому существует целое неотрицательное $n < \min\{k,\,k^1\}$ такое, что

$$T^n\,\eta(\omega_1) = \eta(\omega_1) = T^n\,\eta(\omega_1') = \eta(\omega_1') \in S\,.$$

Если кривые h_0 и h_0' лежат с одной стороны от кривой $l_{ij} \ni \eta(\omega_1) = \eta(\omega_1')$, то отсюда нетрудно вывести, что все кривые инвариантных неустойчивых слоев $\varkappa(\omega_1)$ и $\varkappa(\omega_1')$ принадлежат одной и той же последовательности областей $\{V_{j\,m}\}$, поэтому $\varkappa(\omega_1) = \varkappa(\omega_1')$ и $\omega_1 = \omega_1'$. Если же кривые h_0 и h_0' лежат по разные стороны от $l_{ij} \ni \eta(\omega_1) = \eta(\omega_1')$, то $T\,\eta(\omega_n) = \eta(\omega_{n+1}) = P_i\,, T\,\eta(\omega_n') = \eta(\omega_{n+1}') = P_{\bar{i}}$, где $\bar{i} = 3 - i$, а отображение T доопределяется в каждом случае с соответствующей стороны. Отсюда легко получить, что числа k и k^1 ограничены сверху константой, зависящей лишь от r и s. Действительно, поскольку $T^{r-1}P_1 \in l(i),\ T^{s-1}P_2 \in l(j),\ i,\, j = \{1,\, 2\}$, то кривые инвариантного неустойчивого слоя $\varkappa(\omega_1)$ лежат в периодически повторяющейся последовательности областей $\{V_{j\,m}\}$, причем период повторяемости не превосходит числа $(\max\{r,\, s\} + 1)$. То же имеет место для кривых слоя $\varkappa(\omega_1')$. Поэтому существует всего две конкретные периодические траектории в Ω^+, которые могут (и то лишь частично) склеиваться. (Период одной из них – r г, а другой – s). Ссылка на непрерывность отображения η , осуществляющего полусопряженность $\sigma\,|_{\Omega^+}$ и $T\,|_{\Sigma^+}$, завершает доказательство.

Лемма 4.9. *Множество Σ^+ одномерно а локально гомеоморфно произведению канторова совершенного множества на отрезок в каждой точке, не принадлежащей границе марковского разбиения.*

Доказательство. 1°. Покажем, что $\Sigma^+ = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega^+} \varkappa(\omega)$. Включение $\Sigma^+ \subset \bigcup\limits_{\omega\in\Omega^+} \varkappa(\omega)$ очевидно. Пусть точка Q_0 принадлежит кривой h_0 инвариантного неустойчивого слоя $\varkappa(\omega_1)$, $\omega \in \Omega^+$. Траектория $\{Q_k\}_{k,\in\mathbb{Z}_+}$ отображения T, проходящая через Q_0, лежит, очевидно, на $\varkappa(\omega)$ и в силу леммы 4.4 совпадает с той единственной траекторией, которая и может на нем лежать. Поэтому $Q_0 = \eta(\omega)$. Отсюда следует, что Σ^+ одномерно.

2°. Рассмотрим произвольный устойчивый слой $h^+ \in H^+,\ h^+ \subset V_i$, не принадлежащий границе марковского разбиения $\{l_{ij}\}$. Этот слой пересекает все элементы пространства H_j, следовательно, все отрезки $H_j \cap \Sigma^+$. Рассмотрим цилиндр $[j]$, т. е. множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей – точек из Ω^+, у которых на нулевом месте стоит символ "j". В силу леммы 4.3 отображение $\pi_0 \cdot \varkappa : [j] \to H_j \cap \Sigma^+$ непрерывно и взаимно-однозначно, а так как (по (3.1)) h^+ пересекает все кривые из $H_j \cap \Sigma^+$ трансверсально, то определено взаимно-однозначное отображение $[j] \to H_j \cap \Sigma^+ \cap h^+$, являющееся непрерывным. Отсюда и из того, что ТМЦ $(G,\, \Omega,\, \sigma)$ обладает ненулевой топологической энтропией, вытекает искомое утверждение.

Лемма 4.10. *Множество неблуждающих точек отображения T, целиком содержащихся в* $\operatorname{int}(\bigcup\limits_{i,\,j=1}^{2} \Pi_{i\,j})$, *есть объединение $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$. При этом: 1) Σ^+ является аттрактором ; 2) если $\Omega^- \cup \Omega^0 \neq \emptyset$, то Σ^- – гомеоморфно $\Omega^- \cup \Omega^0$.*

Доказательство. 1°. Предположим, что $\Omega^- \cup \Omega^0 \neq \emptyset$. Докажем, что $\eta|_{\Omega^-\cup\Omega^0}$ – гомеоморфизм (отсюда, в частности, будет следовать, что Σ^- нуль-мерно). Достаточно установить взаимную однозначность $\eta\,|_{\Omega^-\cup\Omega^0}$. А это легко следует из соотношения $\Sigma^- \cap \{l_{ij}\} = \emptyset$. Докажем, что множество Σ^- не пересекается с границей марковского разбиения. Напомним, что $P_1 \in (n_1,\, \dots, n_r),\ \ P_2 \in (m_1,\, \dots, m_s)$. Логически возможны два случая: $m_1 \neq n_1,\ \ m_1 = n_1$. Докажем утверждение в предположении, что осуществляет-

ся второй случай (если осуществляется первый, доказательство аналогичное). Пусть для определенности $m_1 = n_1 = 1$. Так как $TV^+ \subset V_+$, то из леммы 3.2 легко вывести, что $l(1) \subset \overline{\mathrm{int} V^+}$. Рассмотрим кривую h_0 инвариантного неустойчивого слоя $\varkappa$, $\omega \in \Omega^- \cup \Omega^0$. Ясно, что $\mathrm{int}\, h_0 \not\subset V^+$. Граничные точки кривой h_0 принадлежат кривым $l_{i_1 j_1}$ и $l_{i_2 j_2}$, причем $T^{k_\nu}(l_{i_\nu j_\nu}) \subset l(1)$ для некоторых $k_\nu \in \mathbb{Z}_+$, $\nu = \{1, 2\}$. (Здесь имеется в виду доопределенное отображение T; доопределение диктуется кривой h_0.) Следовательно, каждая граничная точка кривой h_0 попадает вместе с окрестностью в множество V^+ за конечное число итераций отображения T, т. е. точки из Σ^-, которые лежат на h_0, не накапливаются к кривым $l_{i_1 j_2}$, $l_{i_2 j_2}$. Отсюда следует утверждение 2 леммы.

2°. Из леммы 4.8, п. 1° доказательства следует, что точки в $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ являются неблуждающими. Осталось показать, что других неблуждающих точек в Σ нет. Для этого достаточно доказать, что блуждающая траектория в Ω переходит в блуждающую траекторию в Σ. Рассмотрим произвольную блуждающую траекторию A из Ω. Она обязана иметь своим α-предельным множеством некоторое "базисное" множество Ω_1 , а ω-предельным – множество Ω_2, причем $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_i представляется подграфом G_i графа G, $i \in \{1, 2\}$ и множество вершин графа G_1 не пересекается с множеством вершин графа G_2. (Это вытекает из теоремы 3.3 в [46]). Следовательно, траектория $\eta(A)$ проводит свое прошлое в объединении одних областей $\{V_i\}$, а будущее – в объединении совершенно других, откуда и из того, что η – отображение **на**, следует, что она является блуждающей.

3°. Из пп. 1°, 2° доказательства леммы 4.9 и существования устойчивого слоения нетрудно вывести, что множество Σ^+ имеет открытую окрестность ω такую, что $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} T^n \omega = \Sigma^+$, т.е. Σ^+ – аттрактор.

Множество Σ^+, как уже говорилось, содержится в области V^+. Компоненту связности множества $(\Pi_1 \cup \Pi_2) \setminus V^+$ будем называть лакуной. (В ситуации § 4 каждая лакуна является объединением примыкающих друг к другу областей V_{ij}, не принадлежащих V^+). В § 5 мы укажем достаточные условия отсутствия лакун, а при их невыполнении приведем некоторые примеры.

§ 5. **Лемма о полном растяжении. Примеры**

Рассмотрим отрезок h_1 кривой произвольно малой длины, уравнение которой $x = h_1(y)$, где h_1 удовлетворяет условию Липшица с константой L из § 2 , и будем следить за последовательностью его итераций. До тех пор, пока одна из итераций этого отрезка не пересечет в своей внутренней точке линию разрыва S, каждая из этих итераций $T^s h_1$, $0 < s < s_1$ будет состоять из одной компоненты связности, а как только $\mathrm{int}(T^s h_1) \cap S \neq \emptyset$ (а это обязательно произойдет в силу леммы 3.2), то будет состоять из двух компонент связности. Пусть $T^{s_1} h_1 = h_{11} \cup h_{12}$, где h_{11} лежит "ниже" S, а h_{12} – "выше" S, причем $h_{11} \cap h_{12} \in S$. Теперь будем следить за итерациями отрезков h_{11} и h_{12}. Пусть $\mathrm{int}(T^{s_2} h_1) \cap S \neq \emptyset$ для некоторого $s_2 \in \mathbb{Z}_+$, тогда $h_{11} \equiv h_{111} \cup h_{112}$, где по-прежнему h_{111} – ниже S, а h_{112} – выше S. То же самое, если $\mathrm{int}(T^{s_2} h_2) \cap S \neq \emptyset$, то $T^{s_2} h_{12} \equiv h_{121} \cup h_{122}$ и т. д. (см. рис. 13).

Возникает вопрос, существует ли такой набор индексов $(i_1, \dots, i_n)$, $i_j = \{1, 2\}$, что отрезок $h_{i_1, \dots, i_n}$ пересекает все эти слои слоения H^+, которые имеют непустое пересечение с $\overline{T\Pi_{21} \cap \Pi_{12}}$ или с $T\Pi_{22} \cap \Pi_{21}$ (иными словами, заполняют ли ординаты всевозможных образов точек отрезка h отрезок $[y_1^{**}, y_2^{**}]$). Ясно, что в случае А такой набор индексов

будет существовать, если какой-то отрезок $h_{i_1,\dots,i_k}$ будет пересекать оба граничных отрезка "фундаментальной" области G, т. е. области G такого типа, который изображен на рис. 12. На рис. слева граничными отрезками области G, например, будут кривые $l\,(2,\,2,\,2)$ и $l\,(2,\,2,\,2,\,2)$, а справа – кривые $l\,(1,\,1,\,1)$ и $l\,(1,\,1,\,1,\,1)$. Область $T\Pi_{21}\cap\Pi_{11}$ пересекают N_1 прообразов линии разрыва вида $l\,(\underbrace{1,\,\dots,1}_{s})$, $1\le s\le N_1$, а область $T\Pi_{12}\cap\Pi_{22}$ пересекают N_2 прообразов вида $l\,(\underbrace{1,\,\dots,1}_{s})$, $1\le s\le N_2$ (на рис. 12 $N_1=3$, $N_2=4$).

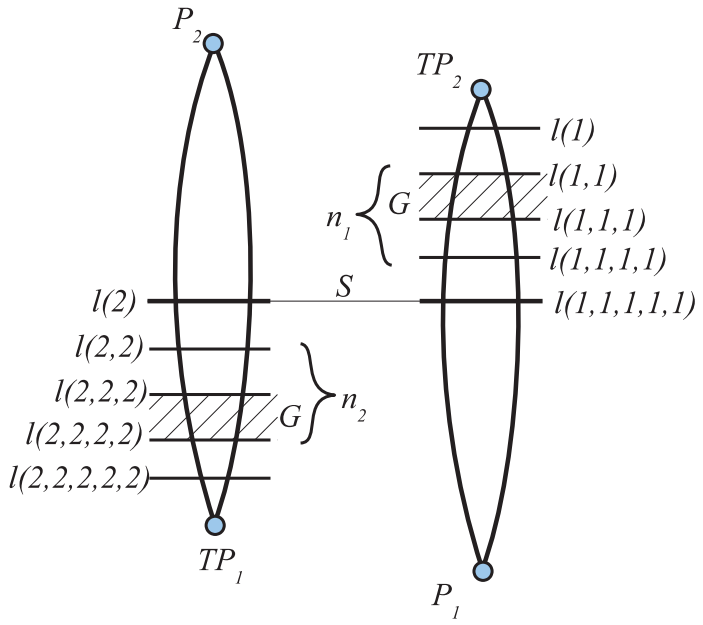


Рис. 12

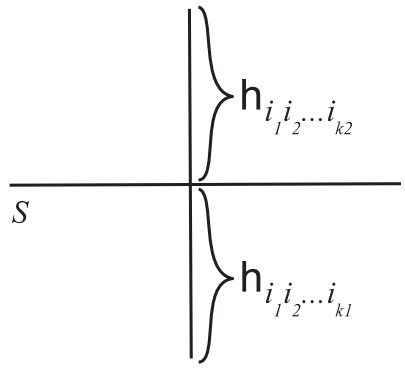


Рис. 13

Напомним (см. § 1), что в случае B N_i равно первому натуральному числу такому, что $T^{N_i}P_i\cap\varepsilon_1'=\emptyset$, в то время как $T^sP_i\cap\varepsilon_1'\ne\emptyset$ для $s=0,\,1,\,\dots,N_i-1$. Аналогично в случае C N_i – первое натуральное число такое, что $T^{N_i}P_i\cap\varepsilon_1'=\emptyset$, а $T^sP_i\cap\varepsilon_1'\ne\emptyset$ для $s=0,\,1,\,\dots,N_i-1$.

Л е м м а о п о л н о м р а с т я ж е н и и. *Пусть выполнено неравенство*

$$q^{N_1=N_2}>q^{N_1}+q^{N_2}\,,\;\;N_1>1,\;N_2>1, \tag{5.1}$$

где q – константа растяжения из (2.15). Тогда для любого отрезка h, записываемого в виде $x=h(y)$, где функция h удовлетворяет условию Липшица с константой L из § 2 , найдется такой набор индексов $(i_1,\,\dots,i_n)$, $i_j=\{1,\,2\}$, что компонента связности образа $T^k\,h$, определяемая этим набором, пересечет любой слой слоения H^+, который имеет непустое пересечение с $\tilde\Pi_i$, $i=1,\,2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С л у ч а й A. 1°. От противного, пусть существует отрезок h, что любая компонента связности $T^k\,h$ для любого $k\in\mathbb{Z}_+$ не пересекает граничные

отрезки никакой фундаментальной области. В силу леммы 3.2 можно сразу считать, что $h = h_1 \cup h_2$ и $h_1 \cap h_2 \in S$ (как на рис. 13). Тогда, прежде чем образ отрезка h_i пересечет S, пройдет не менее $n(i)$ итераций, $i = \{1, 2\}$, и, вообще, прежде чем образ отрезка $h_{i_1, \dots, i_k}$ снова пересечет S, также пройдет не менее $n(i)$ итераций $i = \{1, 2\}$. Обозначим через $d_{i_1, \dots, i_k}$ модуль разности ординат концов отрезка $h_i, \dots, h_{i_k}$. В силу сказанного (с учетом неравенств (2.15)) выводим, что

$$d_{i_1, \dots, i_k 1} + d_{i_1, \dots, i_k 2} \ > \ q^{n(i_k)} \, d_{i_1, \dots, i_k} \, , \tag{5.2}$$

$$d_{i_1, \dots, \bar{i}_k 1} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k 2} \ > \ q^{n(\bar{i}_k)} \, d_{i_1, \dots, \bar{i}_k} \, , \tag{5.3}$$

где $\bar{i}_k = 3 - i_k$.

В левой части неравенства (5.2) стоит, как легко видеть, модуль разности ординат концов отрезка, являющегося образом $h_{i_1, \dots, i_k}$ при отображении T^s, где s таково, что $\mathrm{int}(T^s \, h_{i_1, \dots, i_k}) \cap S \neq \emptyset$.

2°. Покажем, что существует такое число $\bar{q} > 1$ (не зависящее от k), что либо

$$q^{n(i_k)} \, d_{i_1, \dots, i_k} \ > \ (\, d_{i_1, \dots, i_k} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k}) \, \tilde{q} \, ,$$

либо

$$q^{n(\bar{i}_k)} \, d_{i_1, \dots, \bar{i}_k} \ > \ (\, d_{i_1, \dots, i_k} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k}) \, \tilde{q} \, .$$

Пусть это не так, т. е. для каждого $\tilde{q} > 1$ найдется номер k такой, что

$$q^{n(i_k)} \, d_{i_1, \dots, i_k} \ \leq \ (\, d_{i_1, \dots, i_k} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k}) \, \tilde{q} \, ,$$

$$q^{n(\bar{i}_k)} \, d_{i_1, \dots, \bar{i}_k} \ \leq \ (\, d_{i_1, \dots, i_k} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k}) \, \tilde{q} \, .$$

Умножим первое неравенство на $q^{n(\bar{i}_k)}$, второе – на $q^{n(i_k)}$, сложим и сократим на число $(\, d_{i_1, \dots, i_k} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k})$ (не равное, очевидно, нулю). Получим неравенство

$$q^{n(i_k) + n(\bar{i}_k)} \ \leq \ \tilde{q}(q^{n(i_k)} + q^{n(\bar{i}_k)})$$

т. е. $q^{N_1 + N_2} \leq \tilde{q}(q^{N_1} + q^{N_2})$, откуда в силу произвольности $\tilde{q}$ получаем противоречие с (5.1).

3°. Из п. 1° и 2° доказательства следует, что для фиксированного $\tilde{q} > 1$ либо

$$d_{i_1, \dots, i_k 1} + d_{i_1, \dots, i_k 2} \ > \ \tilde{q} \, (d_{i_1, \dots, i_k} \ + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k}),$$

либо

$$d_{i_1, \dots, \bar{i}_k 1} + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k 2} \ > \ \tilde{q} \, (d_{i_1, \dots, i_k} \ + d_{i_1, \dots, \bar{i}_k}),$$

т. е. длина хотя бы одного из отрезков $h_{i_1, \dots, i_k}$ обязана неограниченно расти с ростом k, что невозможно.

С л у ч а и В и С. 1°. Как и в случае А, область в Π_i будем называть фундаментальной, если ее верхнее и нижнее основания являются прообразами линий разрыва, один – из $T^{-k} \, S$, другой – из $T^{-(k+1)} \, S$. Очевидно, если отрезок к h с константой L из § 2 пересекает верхнее и нижнее основания какой-либо фундаментальной области, то в образе $T^s h$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}_+$ найдется компонента связности, пересекающая все слои устойчивого слоения, имеющие непустое пересечение с $\tilde{\Pi}_1$ (или $\tilde{\Pi}_2$).

2°. Рассмотрим отрезок h произвольно малой длины, являющийся графиком функции $x = h(y)$, удовлетворяющей условию Липшица с константой L. Без ограничения общности можно считать, что $h = h_1 \cup h_2$ и $h_1 \cap h_2 \in S$.

С л у ч а й С. Пусть $\operatorname{int} h_i \subset \bar{D},\ i = 1,\, 2$. Предположим, что в образе $T^k\, h_i$ нет компоненты, пересекающей нижнее и верхнее основания какой-либо фундаментальной области. Тогда, прежде чем образ h_i пересечет снова S, пройдет не менее чем N_i итераций, , $i = 1,\, 2$. Пусть, как и в случае А , $h_{i_1,\dots,i_k} \subset \bar{D}_{i_k}$, тогда, прежде чем образ этого отрезка пересечет S, тоже должно пройти не менее N_i итераций отображения T. Поэтому

$$\begin{aligned} d_{i_1,\dots,i_k 1} + d_{i_1,\dots,i_k 2} \ &> \ q^{N_(i_k)}\, d_{i_1,\dots,i_k}\,, \\ d_{i_1,\dots,\bar{i}_k 1} + d_{i_1,\dots,\bar{i}_k 2} \ &> \ q^{N_(\bar{i}_k)}\, d_{i_1,\dots,\bar{i}_k} \end{aligned} \quad , \tag{5.4}$$

$\bar{i}_k = 3 - i_k,\ d_{i_1,\dots,i_k}$ – модуль разности ординат концов отрезка $h_{i_1,\dots,i_k}$. Так же, как и в случае А (с учетом (2.1)), показывается, что существует константа $\tilde{q}$ такая, что для любого k либо

$$q^{N_{i_k}}\, d_{i_1,\dots,i_k} \ > \tilde{q}\,(\, d_{i_1,\dots,i_k} + d_{i_1,\dots,\bar{i}_k})\,,$$

либо

$$q^{N_{\bar{i}_k}}\, d_{i_1,\dots,\bar{i}_k} \ > \tilde{q}\,(\, d_{i_1,\dots,i_k} + d_{i_1,\dots,\bar{i}_k})\,.$$

Отсюда и из (2.2) следует, что длина хотя бы одного отрезка $h_{i_1,\dots,i_k}$ в процессе итерирования должна возрастать, и, следовательно (в противоречии с предположенным), он должен пересечь верхнее и нижнее основания какой-либо фундаментальной области и в дальнейшем растянуться на всю "высоту" области $\tilde{\Pi}_i$.

В случае В доказательство дословно повторяет доказательство для случая С.

С л е д с т в и е. Если система X достаточно близка к границе области U_2, то неравенство (5.1) выполнено, и, следовательно, лемма о полном растяжении имеет место.

Аналогичный вопрос в связи с изучением разрывных отображений возникает и в одномерном случае. Здесь условие, подобное (5.1) ($q > \sqrt{2}$), было указано в [22, 23, 28] [7].

Сейчас мы приведем несколько примеров, иллюстрирующих возможные ситуации, осуществляющиеся при невыполнении свойства полного растяжения. Начнем с простейшего случая. Предположим, что отображение T в области D записывается в виде $\bar{x} = f(x,\, y),\ \ \bar{y} = g(x,\, y)$, где f и g удовлетворяют конечно условиям (1.1) [8]. В этом случае устойчивое слоение H^+ состоит из отрезков прямых $y = \mathrm{const}$, поэтому с отображением T естественно связать отображение T_2 прямой в прямую: $\bar{y} = g(y)$.

Предположим, что T_2 кусочно-линейно и симметрично [9] , т. е.

$$g(y) \equiv \{ky + 1 \ \text{ при } \ y < 0, \quad ky - 1 \ \text{ при } \ y > 0\}.$$

Отсюда сразу следует, что ордината точки P_1 равна (-1), а ордината точки P_2 равна $(+1)$. Положим $k = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$. [10] Прямой проверкой убеждаемся, что $q = k,\ N_1 = N_2 = 1$; поэтому условие (5.1) не выполнено. Далее, легко проверить, что $T_2^5(+1) = 0,\ T_2^5(-1) = 0$, т. е. точки P_1 и P_2 принадлежат прообразам линии разрыва – осуществляется ситуация

[7] В [22, 23] свойство полного растяжения носит название "$le0$", в [25] же оно названо региональной транзитивностью.

[8] Топологические инварианты такого типа отображений изучались в [22, 23, 28-30].

[9] Кусочно-линейные симметричные отображения подобного типа рассматривались в [26].

[10] Из этого примера следует, что доказательство теоремы 1 в [47] неверно.

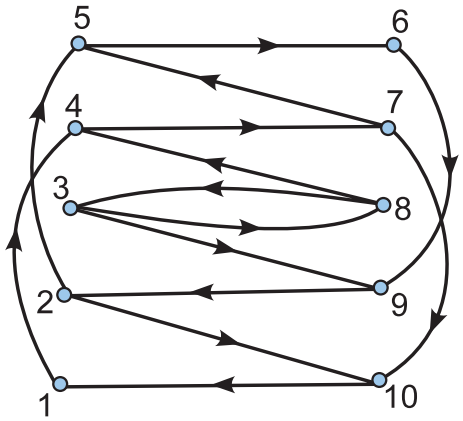


Рис. 14

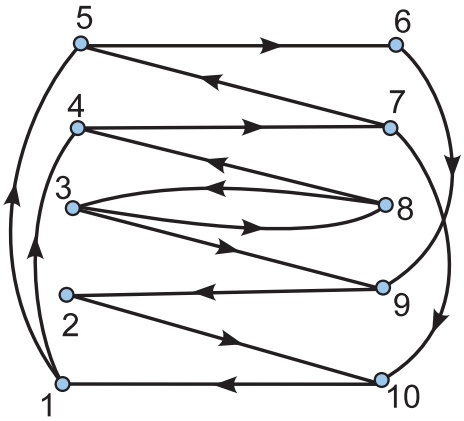


Рис. 15

§ 4. При этом множество $\tilde{\Pi}_1$ является прямоугольником: $1/2 \le x \le 1, \ \ -1 \le y \le k-1$, а $\tilde{\Pi}_2 = \{(x, y) \mid -1 \le x \le -1/2, \ -k+1 \le y \le 1\}$. Здесь кривые l_{ij} – отрезки прямых $y = y_n$, $y_n \in E = \bigcup\limits_{i=0}^{5} (T_2^i(+1) \cup T_2^i(-1))$. Они разделяют множество $\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2$ на области V_j, которые определяют элементы марковского разбиения для отображения T. Прямо проверяется, что граф G соответствующей этому разбиению ТМЦ такой, как на рис. 15.

Из рис. 15 видно, что ТМЦ (G, Ω, σ) нетранзитивна, в ней имеется источник – периодическая траектория (...3838...) – и сток. Из § 4 следует, что источнику соответствует периодическая траектория A отображения T периода 2. Она проектируется на ось ординат в две точки: $y = 1/k + 1, \ y = -1/k + 1$. Стоку же Ω^+ в ТМЦ (G, Ω, σ) соответствует аттрактор Σ^+ отображения T, проекция которого на ось y есть объединение трех отрезков $[-1, \, k^2-k-1] \cup [-k+1, \, k-1] \cup [-k^2+k+1, \, 1]$ (легко убедиться, что $\Sigma^+ \cap A = \emptyset$). Лакуны проектируются на множество, содержащее интервалы $(k^2-k-1, \, -k+1)$ и $(k-1, \, -k^2+k+1)$.[11]

Для $k = \sqrt[4]{2}$ получается аналогичная картина. Здесь граф ТМЦ будет таким, как на рис. 14. Периодическая траектория отображения T, соответствующая источнику ТМЦ, здесь также проектируется в точки $y = 1/k + 1, \ y = -1/k + 1$ и находится на конечном расстоянии от аттрактора, проектирующегося в объединение отрезков $[-1, \ y_2] \cup [-y_1, \ y_1] \cup$

[11]В ситуации, когда g не зависит от x, к излучению множества Σ можно подходить и по-другому. Продемонстрируем этот подход на только что разобранном примере. Множество E определяет марковское разбиение отображения T_2 на отрезке $[-1, 1]$, что позволяет с помощью обычной процедуры доказать полусопряженность $T_2 \mid [-1, 1]$ с односторонней ТМЦ G, $\tilde{\Omega}$, $\tilde{\sigma}$, граф G которой отвечает этому марковскому разбиению – он, естественно, такой, как на рис. 14, т. е. со сдвигом $\tilde{\sigma}$ в пространстве $\tilde{\Omega}$ допустимых относительно G бесконечных в одну сторону символических последовательностей. Далее, можно было бы перейти от рассмотрения односторонней ТМЦ $(G, \tilde{\Omega}, \tilde{\sigma})$ к рассмотрению двусторонней ТМЦ (G, Ω, σ) с тем же самым графом G. (Такой переход есть не что иное, как операция взятия предела обратного спектра пространств $\tilde{\Omega}$ и отображений $\tilde{\sigma}$.) При этом автоматически получается, что предел обратного спектра отображений T_2 и пространств, каждое из которых есть отрезок $[-1, 1]$, полусопряжен с ТМЦ (G, Ω, σ). А так как этот предел полусопряжен и с отображением $T \mid_\Sigma$ при помощи некоторого непрерывного отображения, склеивающего концы отрезков в точки $T^k P_i, \ k \in \mathbb{Z}_+, \ i = 1, 2$ (что установить сравнительно несложно), то тем самым мы получили бы полусопряженность $T \mid_\Sigma$ с ТМЦ (G, Ω, σ), т. е. результат § 4 для этого частного вида отображений. Приблизительно так делается в работах [22, 23] при $q > \sqrt{2}$.

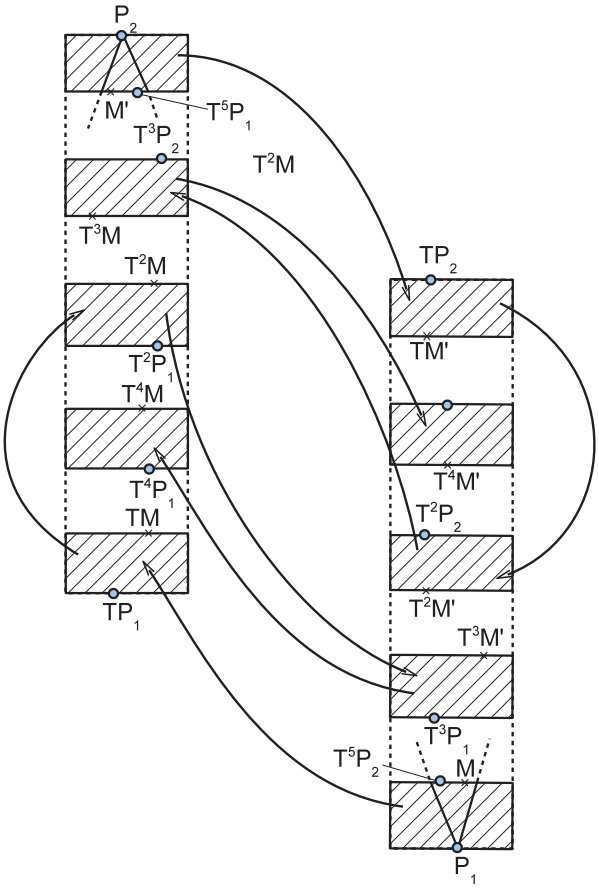


Рис. 16

$[-y_2,\ 1]$, где $y_1 = \sqrt[4]{2}-1$, $y_2 = \sqrt[4]{4}-\sqrt[4]{2}-1$. Отличие от случая $k = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ заключается лишь в том, что если там марковское разбиение определяли прообразы линии разрыва, то теперь оно определяется прообразами устойчивого многообразия периодических точек периода 4, ординаты которых $y_3 = 1 + \sqrt[4]{8} - \sqrt{2} - \sqrt[4]{2}$ и $(-y_3)$ соответственно. В самом деле, легко проверяется, что $T_2^4(y_3) = y_3$, $T_2^4(-y_3) = -y_3$ и $(-1) \in T_2^{-3}(-y_3)$, $(+1) \in T_2^3(-y_3)$.

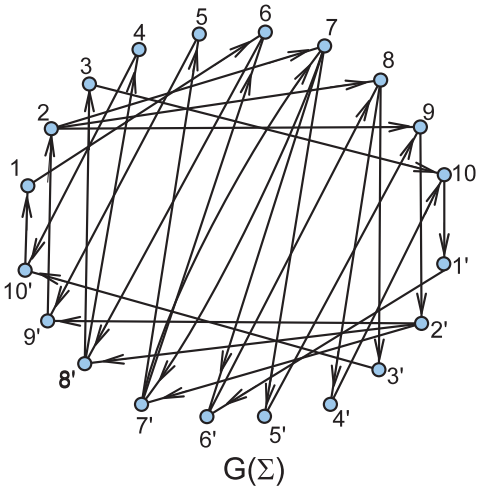


Рис. 17

Если в приведенном примере неблуждающее множество в лакунах состояло из одной периодической траектории, то в примерах, приводимых ниже, оно окажется нетривиальным. Отметим, что примеры мы будем описывать лишь геометрически, хотя в данной ситуации не представляет особого труда построить по марковскому разбиению гладкое в $(\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^1)$ отображение, допускающее это

разбиение и обладающее всеми требуемыми свойствами.

С и м м е т р и ч н ы й п р и м е р с нетривиальным нульмерным множеством. На рис. 16 в заштрихованных областях расположен аттрактор, в незаштрихованных областях – лакунах – нульмерное множество, стрелки показывают, как отображаются компоненты аттрактора. При этом точка T^5P_2 принадлежит компоненте устойчивого многообразия, содержащей периодическую точку M периода 5, а $T^{5n}P_1 \to M'$ при $n\infty$ и $T^5M' = M'$. В границу марковского разбиения входят линия разрыва S и прообразы устойчивых многообразий точек M и M'. Граф соответствующей ТМЦ, описывающей множество Σ, а также графы аттрактора Σ^+ и нуль-мерного множества Σ^- изображены на рис. 17,18. Из рис. 18 видно (это можно доказать и формально), что топологическая энтропия ТМЦ (G^+, Ω^+, σ) меньше топологической энтропии ТМЦ (G^-, Ω^-, σ)(0 ,Й-,. а), что является косвенным свидетельством существенной "нелинейности" приведенного примера.

Н е с и м м е т р и ч н ы й п р и м е р. Если в предыдущем примере в границу марковского разбиения входили куски устойчивых многообразий двух периодических точек периода 5, то в этом случае в границу разбиения будут входить устойчивые многообразия двух периодических точек разных периодов: точки M периода 4 и точки M' периода 5 (рис. 19). Несимметричность, кроме всего прочего, сказывается здесь и Р1И,С- 1(7 в том, что отрезок* 1(2) отделен от точек аттрактора. Отметим, что $T^{4n+5}P_2 \to M$ при $n \to \infty$, а $T^{5n+4}P_1 \to M'$ при $n \to \infty$. Графы, описывающие множества Σ, Σ^+ и Σ^-, приведены на рис. 20.

В заключение приведем пример существования нетривиального множества Σ^- в случае С (рис. 21).

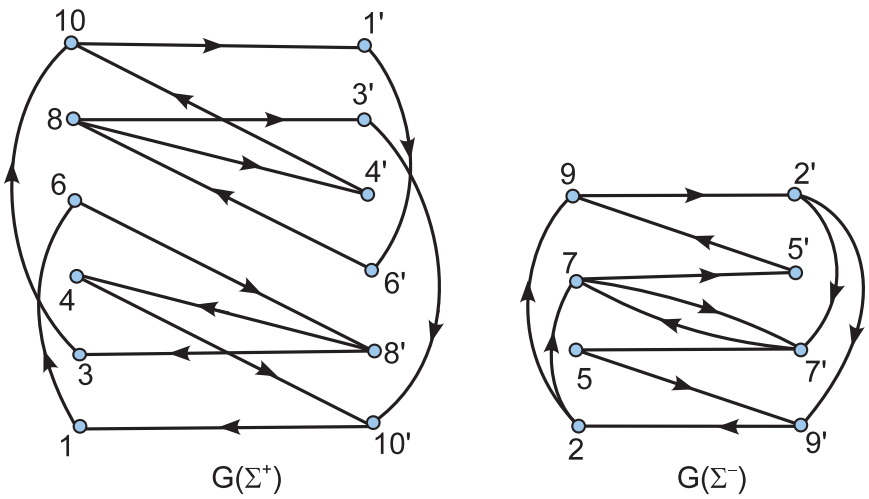


Рис. 18

§ 6. **Леммы о замыкании сепаратрис. Теорема аппроксимации**

В § 4 было построено конечное марковское разбиение в случае, когда одномерные сепаратрисы идут из седла в седло, т. е. когда система является негрубой. Но может осуществиться и другая ситуация, когда хотя бы одна из сепаратрис в седло не возвращается.

В настоящем параграфе мы покажем, что тогда сколь угодно малым возмущением можно сделать сепаратрису двоякоасимптотической к седлу (доказав тем самым негрубость системы и в этом случае). Рассмотрение будем вести в рамках точечного отображения, однако не представляет труда указать соответствующие добавки и для потока. Построим последовательность отображений T_k, сходящуюся к отображению T в C^1-метрике. При этом каждое из отображений T_k будет удовлетворять условиям § 4 (т. е. обладать конечным марковским разбиением) и, следовательно, иметь одномерное притягивающее множество.

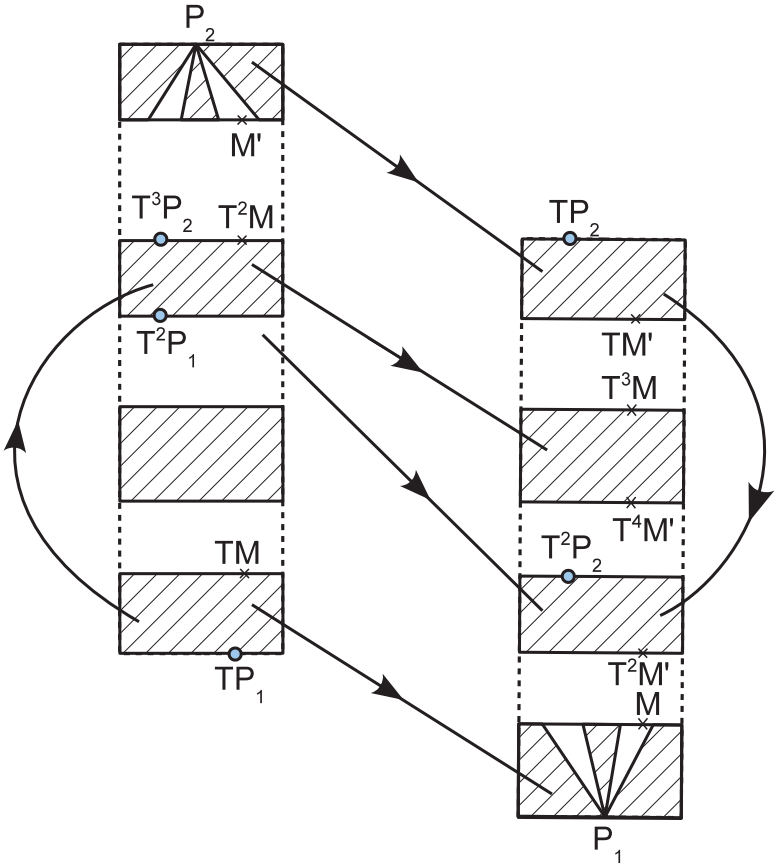


Рис. 19

Предположим, что $P_1 \notin H_0$, т. е. не существует такого $k \in \mathbb{Z}_+$, что $T^k P_1 \in S$. Построим функцию

$$\omega_\chi(x,\, y), \quad 1 \le \omega_\chi(x,\, y) \le 1 + \chi^4\,,$$

$$\omega_\chi = \begin{cases} 1+\chi^4 & , \quad (x,\, y) \in A_{\chi^2}\,, \\ 1 & , \quad (x,\, y) \notin A_\chi\,. \end{cases}$$

где $A_\alpha = \{(x,\, y) \mid |x - x_1^{**}| \le \alpha,\ |y - y_1^{**}| \le \alpha\}$, $\alpha = \chi$ или $\alpha = \chi^2$, $(x_1^{**},\, y_1^{**})$ – координаты точки P_1 . Положим $\omega_\chi(x,\, y) = 1 + \alpha_\chi(x)\beta_\chi(y)$, $0 \le \alpha_\chi \le \chi^2$, $\alpha_\chi(x) = \chi^2$ при $|x - x_1^{**}| \le \chi^2$; $\alpha_\chi(x) = 0$ при $|x - x_1^{**}| \ge \chi$; $\beta_\chi(y) = \chi^2$ при $|y - y_1^{**}| \le \chi^2$; $\beta_\chi(y) = 0$ при $|y - y_1^{**}| \ge$

χ. Известно, что $|d\alpha_\chi/dx| \to 0$, $|d\beta_\chi/dx| \to 0$, при $\chi \to 0$. Поэтому первые производные функции $\omega_\chi(x,\, y)$ стремятся к 0 при $\chi \to 0$.

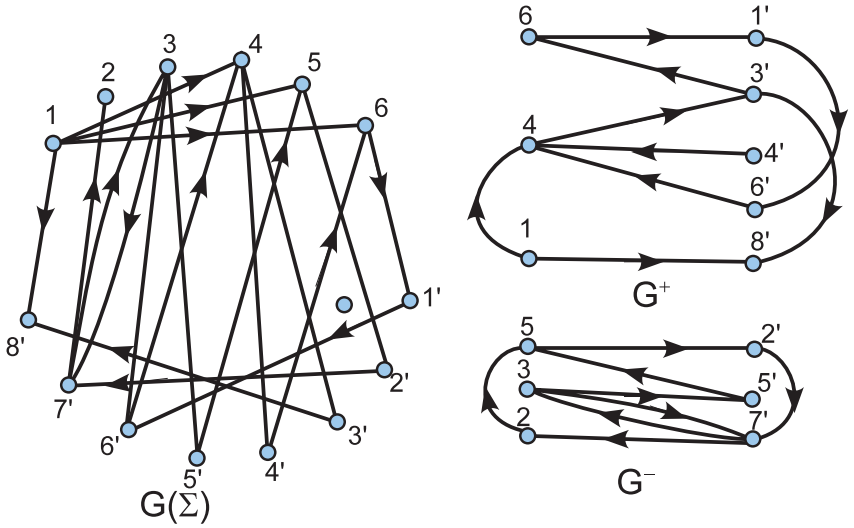


Рис. 20

Зададим возмущение T_χ отображения T следующей формулой

$$\bar{x} = f(x,\, y)\,; \quad \bar{y} = \omega_\chi(x,\, y) \cdot g(x,\, y)\,.$$

Очевидно, $T_\chi \to T$ в C^1-метрике при $\chi \to 0$.

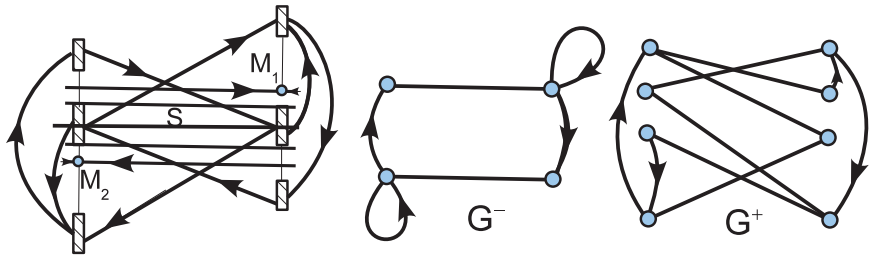


Рис. 21

Л е м м а 6.1. *Для любого $\chi_0 > 0$ существует χ_1, $0 < \chi_1 < \chi_0$, такое, что при $\chi = \chi_1$ точка P_1 принадлежит H_0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1°. Покажем, что для любого $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ существует $\chi_0 > 0$ такое, что для любого χ, $0 < \chi < \chi_0$, из включений $(Q \cup T^n Q) \in A_\chi$ следует неравенство $n > n_1$. Действительно, так как $d\,(P_1,\, \bigcup\limits_{i=1}^{n_1} T^i\, P_1) > 0$, то, по непрерывности, для достаточно

малого $\chi_0 > 0$ и $d\,(A_\chi,\ \bigcup\limits_{i=1}^{n_1} T^i\,A_\chi) > 0$ при , $0 < \chi < \chi_0$. Пусть n_1 настолько велико, что

$$q^{n_1}\ >\ 1 + q^m\,, \tag{6.1}$$

где m будет выбрано ниже.

Пусть L_0 – минимальная константа Липшица неустойчивых слоев (§ 2). Зафиксируем $L_1 > L_0$ из интервала допустимых констант Липшица. Константа растяжения $q = q(L)$ вдоль неустойчивых слоев, вообще говоря, зависит от L. Пусть $\bar{q} = \inf\limits_{L_0 \le L \le L_1} q(L)$. Попрежнему будем обозначать $\bar{q}$ через q. Выберем m, а по нему n_1 настолько большим, чтобы наряду с (6.1) выполнялось также неравенство

$$L_0 \cdot \exp\,[\,q^m\,(\,q^m - 1)^{-2}] < L\,, \tag{6.2}$$

и по этому n_1 зафиксируем χ_0 , существование которого только что установлено.

2°. Точки TP_1 и $T_{\chi_0}P_1$ лежат на прямой $x = f(x_1^{**},\, y_1^{**})$, ограничивая на ней отрезок I_0.

Обозначим через d_{i-1} модуль разности ординат точек $T^i_{\chi_0}P_1$ и $T^i\,P_1$, а через I_i – отрезок $T^i\,I_0$ [12].

До тех пор, пока хотя бы одна из точек $T^i_{\chi_0}P_1$, $T^i\,P_1$ не попадет в A_{χ_0} в силу оценки (2.15) расстояние d_1 экспоненциально растет, т. е. $d_i\ >\ q^{i-1}\,d_i$.

Пусть для $i_1 \in \mathbb{Z}_+$ либо $T^{i_1}_{\chi_0}\,P_1\ \in\ A_{\chi_0}$, либо $T^{i_1}\,P_1 \in A_{\chi_0}$, либо обе принадлежат A_{χ_0}.

Если $T^{i_1}_{\chi_0}\,P_1\ \in\ A_{\chi_0}$, $T^{i_1}\,P_1\ \notin\ A_{\chi_0}$, то точки $T^{i_1+1}_{\chi_0}P_1$ и $T^{i_1+1}\,P_1$ ограничивают отрезок $T_{\chi_0}\,I_1$, так как $T^{i_1+1}\,P_1 = T_{\chi_0}\,T^{i_1}\,P_1$ и поэтому $d_{i_1+1} > q\,d_{i_1}$ (можно без ограничения общности считать, что константа растяжения q одна и та же для всех $0 < \chi \le \chi_0$). Если же $T^{i_1}_{\chi_0}\,P_1\ \notin\ A_{\chi_0}$, $T^{i_1}\,P_1 \in A_{\chi_0}$, то точки $T^{i_1+1}_{\chi_0}P_1$ и $T^{i_1+1}\,P_1$ ограничивают отрезок $T\,I_{i_1}$, так как $T^{i_1+1}_{\chi_0}\,P_1\ =\ T\,T^{i_1}\,P_1$, поэтому тем более $d_{i_1+1} > q\,d_{i_1}$.

3°. Рассмотрим теперь случай $T^{i_1}_{\chi_0}\,P_1 \cup T^{i_1}\,P_1\ \subset\ A_{\chi_0}$. Пусть $Q_1 = T^{i_1}_{\chi_0}\,P_1$, $Q_2 = T^{i_1}\,P_1$. Точки $T_{\chi_0}\,Q_1$ и $T_{\chi_0}\,Q_2$ ограничивают отрезок $T_{\chi_0}\,I_{i_1-1}$, поэтому [13]

$$|y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T_{\chi_0}\,Q_2)| > q\,d_{i_1} > q^{i_1}\,d_1.,\tag{6.3}$$

Приведем схему, иллюстрирующую самую неприятную логическую возможность расположения точек $T_{\chi_0}\,Q_1$, $T_{\chi_0}\,Q_2$, $T_{\chi_0}\,Q_3$ (рис. 22).

Утверждение 1. *Существует настолько малое $\chi_0 > 0$, что для любого $0 \le \chi \le \chi_0$*

$$|y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T\,Q_2)| > q^m\,d_1.,\tag{6.4}$$

Доказательство. $|y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T\,Q_2)| \ge |y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T_{\chi_0}\,Q_2)| - |y(T_{\chi_0}\,Q_2) - y(T\,Q_2)| \ge$ (в силу (6.3) и так как точки $T_{\chi_0}\,Q_2$ и $T\,Q_2$ лежат на прямой $x = \mathrm{const}$) $\ge q^{i_1}d_1 - (\omega_{\chi_0}(x(Q_2),\, y(Q_2)) - 1)\,|g(x(Q_2),\, y(Q_2))| \ge$ (в силу построения функции ω_{χ_0})

$$\ge q^{i_1}|g(x(P_1),\, y(P_1))| \cdot \chi_0^4 - \chi_0^4 \cdot |g(x(P_1),\, y(P_1))|$$

$$\frac{|g(x(P_1),\, y(P_1))| + \|g_x\|\,|x(P_1) - x(Q_1)| + \|g_y\|\,|x(P_1) - y(Q_1)|}{|g(x(P_1),\, y(P_1))|} \ge$$

[12] В силу определения, $d_1 = |\chi_0^4 \cdot g(x_1^{**},\, y_1^{**})|$

[13] В дальнейшем $x(R)$ – абсцисса, а $y(R)$ – ордината точки R.

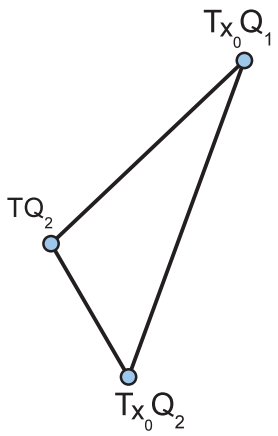


Рис. 22

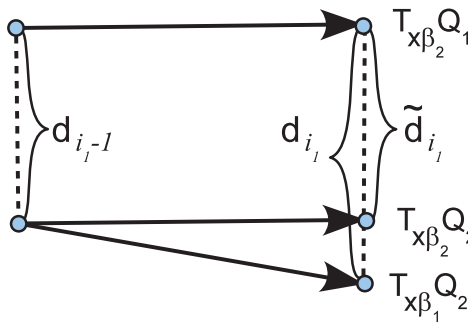


Рис. 23

$\geq$ (по определению d_1) $\geq q^{i_1} - \left(1 + \dfrac{C\,\chi_0}{|g(x(P_1),\, y(P_1))|}\right) d_1$. Отсюда при достаточно малых χ_0 в силу (6.1) получаем (6.4). (Здесь $C = \|d_x\| + \|d_y\|$).

Утверждение 2. *Отрезок прямой, соединяющий точки $T\,Q_2$ и $T_{\chi_0}\,Q_1$ имеет константу Липшица, не превосходящую выражения*

$$L_0 \left[1 + \frac{1}{q^m} \left(1 + \frac{C\,\chi_0}{|\,g(x(P_1),\, y(P_1))\,|} \right) \right]. \tag{6.5}$$

Доказательство.

$$\left| \frac{x(T_{\chi_0}\,Q_1) - x(T\,Q_2)}{y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T\,Q_2)} \right| = \left| \frac{x(T_{\chi_0}\,Q_1) - x(T_{\chi_0}\,Q_2)}{y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T_{\chi_0}\,Q_2)} \right| \cdot \left| \frac{y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T_{\chi_0}\,Q_2)}{y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T\,Q_2)} \right| \leq$$

(поскольку отрезок прямой, соединяющий точки $T_{\chi_0}\,Q_2$ и $T_{\chi_0}\,Q_1$, имеет константу Липшица, не превосходящую таковой для кривой $T\,I_{i_1-1}$, которая не превосходит L_0)

$$\leq\ L_0 \left(1 + \left| \frac{y(T_{\chi_0}\,Q_2) - y(T_{\chi_0}\,Q_2)}{y(T_{\chi_0}\,Q_1) - y(T\,Q_2)} \right| \right) \leq$$

(в силу (6.4) и свойств функции ω_χ)

$$\leq\ L_0 \left(1 + \frac{\chi_0^4 \cdot |\,g(x(Q_2),\, y(Q_2))\,|}{q^m \cdot d_1} \right) \leq$$

(по определению d_1)

$$\leq L_0 \left[1 + q^{-m} \left(1 + \frac{C\,\chi_0}{|\,g(x(P_1),\, y(P_1))\,|} \right) \right].$$

Утверждение доказано.

Легко проверить, что выражение (6.5) не превосходит (6.2), поэтому, продолжая этот процесс, получим, что при $i_2 \in \mathbb{Z}_+$, если точки $Q_1^1 = T_{\chi_0}^{i_2} P_1$ и $Q_2 = T^{i_2} P_1$ попадут обе в A_{χ_0}, то $|y(T_{\chi_0} Q_1^1) - y(T Q_2^1)| > q^{2m} d_1$, и точки $T_{\chi_0} Q_1^1$, $T Q_2^1$ будут соединяться отрезком прямой $x = \varphi(y)$, причем константа Липшица функции φ не превосходит

$$L_0 (1+\alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{q^m}\right),$$

где $\alpha = \dfrac{1}{q^m} \left(1 + \dfrac{C\chi_0}{|\, g(x(P_1),\, y(P_1))\,|}\right)$. На следующем шаге она не будет превосходить

$$L_0 (1+\alpha) \left(1 + \frac{\alpha}{q^m}\right) \left(1 + \frac{\alpha}{q^{2m}}\right) \quad \text{и т. д.,}$$

Оценим $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{i=0}^{n} \left(1 + \dfrac{\alpha}{q^{i\,m}}\right)$, считая χ_0 настолько малым, что $\alpha < 1$. Логарифмируя и раскладывая в ряды, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\alpha}{q^m}\right) = \alpha + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^3}{3} + ... \frac{\alpha}{q^m} + \frac{\alpha^2}{2q^{2m}} + \frac{\alpha^3}{3q^{3m}} + ... + \frac{\alpha}{q^{2m}} + \frac{\alpha^2}{2q^{4m}} + \frac{\alpha^3}{3q^{6m}} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n\left(1 - \frac{1}{q^{mn}}\right)} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{1 - \frac{1}{q^m}} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1}{1 - q^{-m}}\,.$$

При $\chi_0 = 0 \quad \alpha = q^{-m}$; отсюда и из (6.2) получаем следующее утверждение;

Существует настолько малое χ_0, что при всех $0 < \chi \le \chi_0$ константа Липшица кривой, соединяющей точки $T_{\chi_0}^i P_1$ и $T^i P_1$ для любого $i \in \mathbb{Z}_+$ не превосходит L_1:

Это означает, что расстояние между ординатами указанных точек с возрастанием i возрастало бы до бесконечности, если бы для $i = j_1$ они не очутились (впервые) по разные стороны от S. Устремляя χ_0 к нулю и используя тот факт, что точка $T_{\chi_0}^{j_1} P_1$ непрерывна по χ_0 при $\chi_0 = 0$, устанавливаем существование значения χ_1 такого, что $T_{\chi_1}^{j_1} P_1 \in S$. Лемма доказана.

Совершенно аналогично строим функцию $\omega_\beta(x,\, y)$:

$$\omega_\beta = \begin{cases} 1 + \beta^4 \quad , & (x,\, y) \in B_{\beta^2}\,, \\ 1 \quad , & (x,\, y) \notin B_\beta\,. \end{cases}$$

(где $B_\alpha = \{(x,\, y) \mid |x - x_2^{**}| < \alpha,\ |y - y_2^{**}| < \alpha\}$; $\alpha = \beta$ или $\alpha = \beta^2$, $(x_2^{**},\, y_2^{**})$ – координаты точки P_2) и рассматриваем возмущение $T_{\chi\beta}$ отображения T вида

$$\bar{x} = f(x,\, y)\,,\ \ \bar{y} = \omega_\beta(x,\, y)\, \omega_\chi(x,\, y)\, g(x,\, y)\,.$$

Ясно, что так как $d\left(\bigcup\limits_{i=0}^{j_1} T_{\chi_1}^i P_1\,,\, P_2\right) > 0$, то при достаточно малом β_0 для всех $0 < \beta < \beta_0$ и $d\left(\bigcup\limits_{i=0}^{j_1} T_{\chi_1}^i P_1\,,\, B_\beta\right) > 0$, поэтому для всех таких $\beta T_{\chi_1\beta}^i = T_{\chi_1}^i T_1 \in S$. Совершенно

аналогично лемме 6.1 доказывается утверждение о существовании β_1 такого, что $T^{j_1}_{\chi_1\beta_1}P_2$. Отсюда вытекает

Теорема 6.1. *Существует последовательность отображений T_k, совпадающих с T в некоторой окрестности S, таких, что $d_{C^1}(T_k, T) \to 0$ при $k \to \infty$, и для каждого T_k существуют j_1 и j_2 такие, что $T^{j_1}_k P_1 \in S$, $T^{j_2}_k P_2 \in S$.*

Рассмотрим теперь вопрос о структуре множества параметров, при которых семейство T_β имеет петлю сепаратрисы. Именно докажем следующую теорему.

Теорема 6.2. *В C^1-окрестности отображения T существует двухпараметрическое семейство отображений $T_{\chi\beta}$, $0 \le \chi \le \chi_0$, $0 \le \beta \le \beta_0$, такое, что 1) $T_{00} = T$; 2) для каждого фиксированного $\chi \in (0, \chi_0)$ множество значений $\{\beta\}$ на отрезке $[0, \beta_0]$, при каждом из которых точка P_2 принадлежит некоторому прообразу (относительно $T^{k(\beta)}_{\chi\beta}$) линии разрыва, счетно и всюду плотно; 3) для каждого фиксированного $\beta \in (0, \beta_0)$ множество значений $\{\chi\}$ на $[0, \chi_0]$, при каждом из которых точка P_1 принадлежит некоторому прообразу линии разрыва, также счетно и всюду плотно.*

В настоящей работе доказательство теоремы проведем лишь для случая A. Покажем, что для построенного выше семейства T_β утверждения теоремы выполнены. Достаточно установить истинность второго утверждения, так как первое выполнено по определению, а третье доказывается аналогично второму.

1°. Всюду плотность значений $\{\beta\}$, при каждом из которых $T^{k(\beta)}_{\chi\beta}P_2 \subset S$, устанавливается следующим образом. Для фиксированного β_0 пусть β_1 и β_2 $(0 < \beta_1 < \beta_2 \le \beta_0)$ – произвольные фиксированные значения. Точки $T_{\chi\beta_1}$ и $T_{\chi\beta_2}$ лежат на прямой $x = f(x_2^{**}, y_2^{**})$, ограничивая на отрезок I_0, Как и при доказательстве леммы 6.1, обозначим через d_1 модуль разности ординат точек $T^{i+1}_{\chi\beta_1}P_2$ и $T^{i+1}_{\chi\beta_2}P_2$. Как уже говорилось, до тех пор, пока обе точки $T^i_{\chi\beta_1}P_2$ и $T^i_{\chi\beta_2}P_2$ одновременно не попадут в A_{β_0}, расстояние d_i экспоненциально растет, т. е. $d_i > q^{i-1}d_1$. Пусть для $i \in \mathbb{Z}_+$ $(T^{i_1}_{\chi\beta_1}P_2 \cup T^{i_1}_{\chi\beta_2}P_2) \subset A_{\beta_0}$. В случае А, в условиях которого мы находимся, для точек

$$T_{\chi\beta_2}Q_1 = T^{i_1+1}_{\chi\beta_1}P_2\,,\ T_{\chi\beta_2}Q_2 = T^{i_1}_{\chi\beta_1}P_2 \text{ и } T_{\chi\beta_1}Q_2 = T^{i_1+1}_{\chi\beta_1}P_2$$

в силу построения функции $\omega(\beta)$ может осуществиться лишь такая картина их расположения (в отличие от случая, рассмотренного в лемме 6.1) как на рис. 23. Поэтому ордината точки $T_{\chi\beta_2}Q_1$ меньше ординаты точки $T_{\chi\beta_2}Q_2$, т. е. $d_{i_1} > \tilde{d_{i_1}} > qd_{i_1-1}$.

Чтобы применить предыдущие рассуждения, к оценке d_{i_1+1} и т. д. нужно, чтобы точки $T_{\chi\beta_2}Q_1$ и $T_{\chi\beta_1}Q_2$ соединялись кривой, удовлетворяющей условию Липшица с константой L. Это так, а именно, искомая кривая – это отрезок $T^{i_1}_{\chi\beta_2}I_0$, объединенный с отрезком прямой $x = f(x(Q_2)\,y(Q_2)$. [14]

Таким образом, d_i возрастало бы неограниченно, если бы точки $T^{i_0}_{\chi\beta_1}P_2$ и $T^{i_0}_{\chi\beta_2}P_2$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_+$ не очутились по разные стороны от S.

Отсюда следует, что существует первое, т. е. наиболее близкое к β_2 значение β_3, $\beta_1 < \beta_3 < \beta_2$, для которого $T^{i_0}_{\chi\beta_3}P_2 \in S$.

[14]Очевидно, удовлетворяющие условию Липшица с одной и той же константой L функции $y = f_1(x)$, $x \in [a, b]$, и $y = f_2(x)$, $x \in [b, c]$, $f_1(b) = f_2(b)$, образуют функцию на $[a, c]$, также удовлетворяющую условию Липшица с той же самой константой L.

2°. Установим счетность таких значений $\{\beta\}$ на отрезке $[0,\, \beta_0]$. Зафиксируем код прообраза линии разрыва (конечно, при отображении $T^{-i_0}_{\chi\beta_2}P_2$, которому принадлежит точка P_2). Пусть это будет кривая $l(i_1\,,\, ...,\, i_k)$. Из п.1° доказательства вытекает, что на интервале $(\beta_3,\, \beta_2)$ нет значения β_4 , для которого точка P_2 принадлежала бы кривой типа $l(i_1\,,\, ...,\, i_k)$. (В противном случае β_3 обязано было бы равняться β_4 .) А отсюда легко следует, что и на всем отрезке $[0,\, \beta_0]$ таких точек β не более счетного множества. (Это можно установить, например, устраивая фильтрацию таких точек по длинам отрезков, примыкающих к ним).

Теорема доказана, так как кодов прообразов линии разрыва счетное множество.

Рассмотрим теперь (в случае А) симметричное отображение T, т. е. предположим, что имеют место тождества

$$f(x,\, y) \,=\, -f(-x,\, -y)\,, \quad g(x,\, y) \,=\, -g(-x,\, -y)\,.$$

Конечно, для этого частного случая все предыдущие результаты справедливы. Цель дальнейшего рассмотрения - прояснить, что происходит при изменении параметра в однопараметрическом семействе симметричных отображений.

Теорема 6.3. *Существует однопараметрическое семейство T_χ, $0 \le \chi \le \chi_0$, C_1-гладких симметричных отображений $\tilde\Pi_1 \cup \tilde\Pi_2 \to \tilde\Pi_1 \cup \tilde\Pi_2$, непрерывно зависящих от χ в C_1-топологии, совпадающих с T в некоторой окрестности S , C_1-близких к T, и таких, что: 1) $T_{\chi=0} \,=\, T$; 2) на отрезке $[0,\, \chi_0]$ существует счетное всюду плотное множество значений χ , при каждом из которых точки P_1 и P_2 принадлежат прообразу (относительно отображения T^n_χ для некоторого n) линии разрыва ; 3) для счетного всюду плотного на $[0,\, \chi_0]$ множества значений χ отображение T допускает конечное марковское разбиение, а для оставшегося континуума значений T – не допускает.*

Доказательство теоремы разобьем на несколько этапов.

1°. Симметричное возмущение отображения T зададим следующей формулой:

$$\bar x = f(x,\, y),\;\; \bar y = \begin{cases} \omega_\chi(\,x,\; y) \quad g(x,\, y) \text{ при } \; y > 0, \\ \omega_\chi(-x,\, -y)\; g(x,\, y) \text{ при } \; y < 0, \end{cases}$$

где $\omega_\chi(x,\, y)$ – функция, построенная выше, $0 \le \chi \le \chi_0$. По построению $d_{C^1}(T,\, T_\chi) \to 0$ при $\chi \to 0$, $T_{\chi=0} = T$. Носитель функции ω_χ – это две области, одну из которых – с положительными ординатами точек в ней – обозначим через A^+_χ , а другую – с отрицательными ординатами – через A^-_χ. Значение будет уточнено ниже.

2°. Доказательство второго утверждения теоремы начнем с того, что, как в лемме 6.1, установим справедливость следующего факта.

Для любого $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ существует $\chi_0 > 0$ такое, что для любого χ, $0 \le \chi \le \chi_0$ из включений $Q \in A^\tau_\chi$, $T^nQ \in A^\tau_\chi$ следует неравенство $n > n_1$, $\tau =$ "+" или $\tau =$ "−".

Зафиксируем $n_1 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $q^{n_1} > 2$, где q – константа из (2.15) (см. также (5.1)), и по этому n_1 зафиксируем χ_0, существование которого только что установлено.

Далее, зафиксируем два произвольных значения χ_1 , χ_2 ; $0 < \chi_1 < \chi_2 \le \chi_0$. Точки $T_{\chi_1}P_2$ и $T_{\chi_2}P_1$ лежат на прямой $x = f(x_2^{**},\, y_2^{**})$, ограничивая на ней отрезок I, причем точка $T_{\chi_1}P_2$ находится ниже точки $T_{\chi_2}P_1$. По аналогии с доказательством теоремы 6.2 обозначим через d_i модуль разности ординат точек $T^{i+1}_{\chi_1}P_2$ и $T^{i+1}_{\chi_2}P_1$. Из (2.15) следует, что до тех пор, пока точка $T^i_{\chi_2}P_2$ попадет в $A^-_{\chi_0}$ число d_i экспоненциально растет с показателем $q > 1$ (см.

доказательство леммы 6.1) [15]. Предположим, что для $i_1 \in \mathbb{Z}_+$, $T^{i_1}_{\chi_1} P_2 \in A^-_{\chi_0}$. Отсюда и из утверждения, используя симметричность отображения T, легко вывести, что $i_1 > n_1$, поэтому $d_{i_1} > q^{n_1} d_1 > 2d_1$.

Приведем следующую диаграмму, которая иллюстрирует то обстоятельство, что d_{i_1+1} может стать меньше, чем d_{i_1} (рис. 24). Тем не менее из диаграммы следует, что $d_{i_1+1} > q\, d_{i_1} - \tilde{d}_1 > q\, d_{i_1} - d_1 > q\, d_1$. Далее, так как точка $T^{i_1}_{\chi_1} P_2 \in A^-_{\chi_0}$, то прежде чем $T_{\chi_2}(T^{i_1}_{\chi_1} P_2)$ снова попадет в $A^-_{\chi_0}$, должно пройти $j_1 \geq n_1$ итераций отображения T_{χ_2}. Поэтому, повторяя проведенное рассуждение, получим, что $d_{j_1+1+i_1+1} > q\, d_{i_1+1} > q^2\, d_1$. Продолжая этот процесс, устанавливаем, что с ростом i последовательность d_i возрастала бы неограниченно, если бы для некоторого значения $i_0 \in \mathbb{Z}_+$ точки $T^{i_0}_{\chi_2} P_2$ и $T^{i_0}_{\chi_1} P_2$ не очутились по разные стороны от линии разрыва. Устремляя χ_2 к χ_1 найдем значение χ_3, $\chi_1 < \chi_3 < \chi_2$, для которого $T^{i_0}_{\chi_3} P_2 \in S$. В силу симметрии точка $T^{i_0}_{\chi_3} P_1$ также принадлежит S. Счетность подобных значений χ_3 устанавливаем рассуждением, совершенно аналогичным проведенному при доказательстве теоремы 6.2.

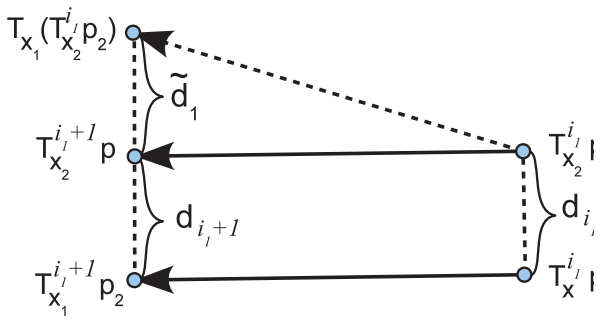


Рис. 24

3°. Докажем третье утверждение теоремы. Предположим, что для некоторого $\chi \in (0, \chi_0]$ отображение T_χ допускает конечное марковское разбиение. Тот случай, когда точка P_i принадлежит прообразу линии разрыва, уже рассмотрен, поэтому будем считать, что $P_i \in H_0$, $i = 1, 2$. (Конечно, множество H_0 рассматривается относительно отображения T_χ.) Граница марковского разбиения должна состоять из конечного множества кусков слоения. При отображении T_χ граница должна переходить в границу, и T_χ на этом множестве – сжимающее отображение. А отсюда следует, что существует периодическая точка отображения T_χ, некоторому прообразу устойчивого слоя которой принадлежит точка P_2.

Установим, что множество значений χ, при каждом из которых точка P_2 принадлежит прообразу (относительно отображения T^n_χ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$ устойчивого периодического слоя, не более чем счетно. Для этого каждую периодическую траекторию (и каждый периодический устойчивый слой) закодируем односторонней периодической последовательностью символов "1" и "2". Если точка траектории лежит выше S, то ставим этой точке в соответствие символ "2", в противном случае ставим в соответствие символ "1". Прообразу периодического слоя таким же образом поставим в соответствие асимптотическую к периодической одностороннюю последовательность символов.

[15] Если для некоторого j точка $T^j_{\chi_2} P_2 \in A^+_{\chi_0}$, то d_{j+1} будет больше, чем qd_j что устанавливается аналогично доказательству соответствующего факта в теореме 6.2.

Предположим, что для каждого из двух значений $\chi_2 > \chi_1$ из $[0, \chi_0]$ точка P_2 принадлежит прообразу устойчивого периодического слоя, и код этих прообразов одинаков. Логически возможны два случая: 1) инвариантный устойчивый слой (т. е. последовательность элементов устойчивого слоения), содержащий ω-полутраекторию точки P_2, не имеет точек в $A^-_{\chi_0}$; 2) в $A^-_{\chi_0}$ есть точки ω-полутраектории точки P_2. В случае 1) периодическая траектория, прообразу устойчивого слоя которой принадлежит точка P_2 не имеет точек в $A^-_{\chi_0}$. Отсюда легко следует, что отображение T имеет две периодические траектории, одинаково закодированные и различные. Назовем первой точкой каждой из этих траекторий ту, которая лежит на том же куске устойчивого слоя, что и точка T^kP_2, в то время как для точки T^iP_2 при $i < k$ это не выполнено. Через одну из этих точек проходит кривая $h_1T_{\chi_1}$ инвариантного устойчивого слоя, а через другую – кривая $h_2T_{\chi_2}$ инвариантного устойчивого слоя, причем $h_1 \neq h_2$. Следовательно, существует отрезок $h: \ x = h(y)$ с концами на h_1 и h_2, причем функция h удовлетворяет условию Липшица с константой L. Существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $T^kh \cap S \neq \emptyset$, а $T^ih \cap S \neq \emptyset$ при $1 \leq i < k$. Так как $l(1)$ и $l(2)$ являются слоями устойчивого слоения и для T_{χ_1} и для T_{χ_2}, то $T^k_{\chi_1}h_1 = T^kh_1$, $T^k_{\chi_2}h_1 = T^kh_2$ обязаны лежать по разные стороны от S, т. е. периодическим точкам, лежащим на T^kh_1 и T^kh_2 обязаны отвечать разные символы, что противоречит предположению.

В случае 2) тоже рассмотрим слои h_1 и h_2 : проведем отрезок h с концами на них, и будем итерировать граничные точки отрезка : одну – при помощи отображения T_{χ_1}, а другую – при помощи отображения T_{χ_2}. Будем следить за разностью ординат этих итераций. Как и в п. 2° доказательства, обозначим через d_i модуль разности ординат точек $T^{i+1}_{\chi_1}P_2$ и $T^{i+1}_{\chi_2}P_2$. Если точка $T_{\chi_2}P_2$ принадлежит $A^-_{\chi_0}$, то пройдем не менее n_1 итераций отображения T_{χ_2}, прежде чем траектория этой точки снова попадет в $A^-_{\chi_0}$. А отсюда, рассуждая, как в п. 2° доказательства, заключаем, что последовательность d_i возрастала бы до бесконечности, если бы для некоторого $i = i_0$ точки $T^{i_0}_{\chi_1}P_2$ и $T^{i_0}_{\chi_2}P_2$ не очутились по разные стороны от S, что противоречит предположению об одинаковости кодов слоев, на которых лежат эти точки.

Утверждение теоремы следует из пп. 1° – 3°.

§ 7. **О существовании и структуре аттрактора в иррациональном случае**

1. Определим множества $\tilde{\Pi}_1$ и $\tilde{\Pi}_2$. Множество устойчивых слоев, проходящих через точки $\{T^kP_1 \cup T^sP_2\} \cap \Pi_i$, $k, s \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \{1, 2\}$, в естественном смысле упорядочено по высоте: для каждой пары таких слоев можно сказать, который из них выше другого. Следовательно, либо в этом множестве существует слой, который выше всех остальных, либо существует устойчивый слой, не принадлежащий этому множеству, но принадлежащий его замыканию, – в обоих случаях эта кривая имеет уравнение $y = h_{i1}(x)$. Точно так же существует "нижний" устойчивый слой $y = h_{i2}(x)$. Положим

$$\tilde{\Pi}_i = \{(x, y) \in \Pi_i, \ \ h_{i2}(x) \leq y \leq h_{i1}(x)\}.$$

Таким образом, $\tilde{\Pi}_i$ – это "минимальный прямоугольник", содержащий все точки $\{T^kP_1 \cup T^sP_2\}_{k,\, s \in \mathbb{Z}_+}$. В случае А кривая $h_{11}(h_{22})$ – это устойчивый слой, проходящий через точку $TP_2(TP_1)$, а $h_{21}(h_{12})$ – слой, проходящий через точку $P_2(P_1)$.

2. Пусть $l(i) = S \cap \Pi_i$, $l(i, k) = T^{-1}l(i) \cap \Pi_k$, $i, k \in \mathbb{Z}_+$, и по индукции $l(i_1, \dots, i_s, i_{s+1}) = T^{-1}l(i_1, \dots, i_s,) \cap \Pi i_{s+1}$. Как уже говорилось, если $l(i_1, \dots, i_s) \neq \emptyset$, то

множество является кривой, называемой прообразом линии разрыва. Далее, для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ определим множество B_k, равное объединению тех прообразов линий разрыва из $\{l(i_1, \dots, i_s),\ 1 \le s \le k\}$, пересечение которых с $\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_1$ непусто.

Пусть уравнение кривой из B_k, ближайшей к слою $y = y_{ij}(x)$ будет $y = y_{ij}^k(x)$. Положим (рис. 25)

$$\tilde{\Pi}_i^k = \{(x, y) \in \tilde{\Pi}_i \mid h_{i2}^k(x) \le y \le h_{i1}^k(x)\}.$$

Обозначим через Δ_k замыкание множества точек траекторий отображения T, целиком содержащихся в $\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_1^k$. Из этого определения следует, что $\Delta_{k+1} \supset \Delta_k$.

Лемма 7.1. *Существует $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что для любого $k \ge k_0$ существуют консервативная ТМЦ (G_k, Ω_k, σ) и гомеоморфизм $\beta:\ \Omega_k \to \Delta_k$ такие, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_k & \xrightarrow{\sigma} & \Omega_k \\ \downarrow \beta & & \downarrow \beta \\ \Delta_k & \xrightarrow{T} & \Delta_k \end{array}$$

коммутативна.

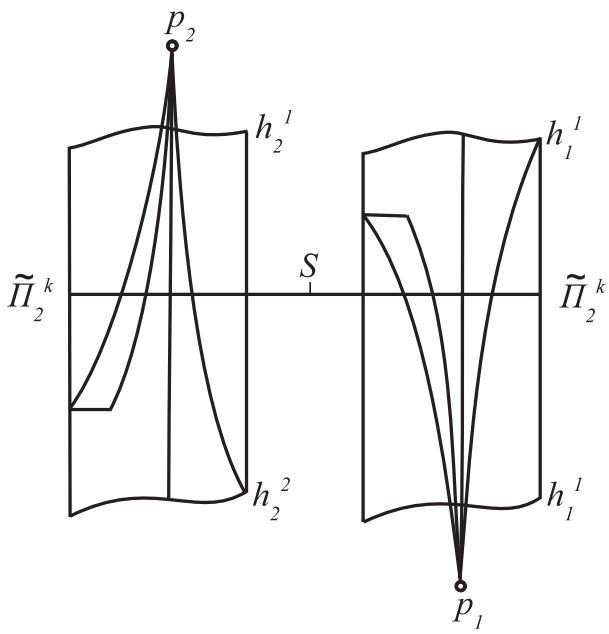


Рис. 25

Доказательство. 1°. Построим ТМЦ (G_k, Ω_k, σ). Кривыми из B_k множество $\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_1^k$ разделяется на замкнутые связные подмножества, которые мы обозначим через $V_1, V_2, \dots, V_{N_k}$. Рассмотрим произвольную, удовлетворяющую условию Липшица с константой L кривую $h \subset V_s$, концы которой лежат на двух кривых из B_k, входящих в границу V_s. Могут осуществляться две логические возможности: 1) ни одна из этих кривых не есть $l(i),\ i \in \{1, 2\}$, 2) одна из них – $l(i)$. В случае 1) образ кривой h при отображении T имеет концы в множестве B_k, т. е. Th пересекает конечное число целых областей V_j. В случае 2)

кривая Th либо не пересекает (во внутренней точке) никакой области V_j, либо пересекает конечное число целых областей V_j и пересекает во внутренних точках одну область V_s, но не полностью, т. е. Th пересекает только одну из граничных для V_s кривых из B_k.

Отождествим области V_j с состояниями марковской цепи (с вершинами графа G). Будем говорить, что из состояния s в состояние j есть переход (существует ребро с началом в вершине s и концом в вершине j, если $Th \cap \operatorname{int} V_j \neq \emptyset$, причем Th пересекает обе кривые из B_k, входящие в границу V_j для любой кривой $h(\subset V_s)$ с описанными выше свойствами. Уберем вершины, не являющиеся началами (или концами) каких-либо ребер, и примыкающие к ним ребра, получим новый граф, а повторив эту процедуру конечное число раз, получим граф, отвечающий консервативной ТМЦ. Начиная с некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$ эта цепь непуста, что в случае A следует из леммы 3.2, а в случае B и C тоже из этой леммы или, еще проще, из того, что у отображения T есть неподвижная точка в $\tilde{\Pi}_i^k$. Обозначим эту ТМЦ через (G_k, Ω_k, σ).

2°. Установим теперь, что все точки множества Δ_k лежат на траекториях, целиком содержащихся в тех областях $\{V_s\}$, которым соответствуют вершины графа G_k. Действительно, пусть $Q_0 \in \Delta_k$, тогда траектория $T^s Q_0$, $s \in \mathbb{Z}_+$, лежит в $(\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_1^k)$, и каждая точка $Q_s = T^s Q_0 \in V_{j_s}$, причем так как $(Q_{s-1} \cup Q_{s+1}) \in (\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_1^k)$, то в исходном графе G есть ребро с началом в вершине j_{s-1} и концом в j_s и есть ребро с началом в j_s и концом в j_{s+1}. Поэтому (по индукции) и в графе G_k есть вершина j_s, т. е. точка Q_0 лежит в "консервативной" области V_{j_0}.

3°. Построение отображения β и доказательство его непрерывности проводятся точно так же, как в леммах 2.4, 4.2-4.4.

4°. Докажем взаимную однозначность отображения β. Она следует из того, что для любой кривой из B_k (принадлежащей $\operatorname{int}(\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_1^k)$) существует полуокрестность, в которой нет точек из Δ_k. Действительно, если бы с обеих сторон от этой кривой были сколь угодно близко к ней точки из Δ_k, то они были бы в сколь угодно малой окрестности точек P_1 и P_2. В случае A уже получаем противоречие, а в случаях B и C это противоречит тому, что существуют $i \in \{1, 2\}$ и $m \in \mathbb{Z}_+$ такие, что $T^m P_i \cap (\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_1^k) \neq \emptyset$.

Так как Q_k компактно, то β – гомеоморфизм. Лемма доказана

3. Лемма 7.2. $\Sigma = \overline{\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \Delta_k}$.

Доказательство. 1°. Покажем, что в любой окрестности каждой точки P_i, $i \in \{1, 2\}$, есть периодическая точка.

Обозначим через h_i устойчивый слой, проходящий через точку P_i. Как было показано выше, к h_i накапливаются прообразы линии разрыва. Возьмем, например, точку P_2. Для каждого прообраза линии разрыва (скажем, $l(n_1, \dots, n_s)$), настолько близкого к h_2, чтобы h_2 и $l(n_1, \dots, n_s)$ лежали по одну сторону от S (т. е. сверху в случае A и снизу в случаях B и C), обозначим в случае A через $W_2(l(n_1, \dots, n_s))$ множество

$$\{(x, y) \in \Pi_2 \mid l(x) \leq y \leq h_2(x)\},$$

а в случаях B и C – множество

$$\{(x, y) \in \Pi_2 \mid h_2(x) \leq y \leq l(x)\},$$

где $y = h_2(x)$ – уравнение кривой h_2, а $y = l(x)$ – уравнение кривой $l(n_1, \dots, n_s)$. Аналогично строятся области $W_1(l(n_1, \dots, n_s))$ около точки P_1 в случаях A, B и C (рис. 26).

Так как прообразы линии разрыва всюду плотны в $\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_1$ и для каждого фиксированного $s \in \mathbb{Z}_+$ прообразов вида $l(n_1, \ldots, n_s)$ конечное число, то для любых $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_+$ существуют такие области W_1, W_2, определяемые прообразами линии разрыва (конечно, зависящими от k_1, k_2), что из включения $l(n_1, \ldots, n_s) \subset W_i \setminus h_i$ следует неравенство $s > k_i$. Зафиксируем k_1, k_2 такими, чтобы выполнялось условие

$$q^{k_1+k_2} > q^{k_1} + q^{k_2}, \tag{7.1}$$

где q – константа растяжения, введенная выше в § 2 , и по этим k_1, k_2 построим области W_1, W_2 с указанным свойством. Таким образом, прежде чем образ отрезка $h \subset W_1$ кривой $x = h(y)$ (h удовлетворяет условию Липшица с константой L) при его итерировании в своей внутренней точке пересечет S, пройдет не менее k_i итераций, $i = 1, 2$.

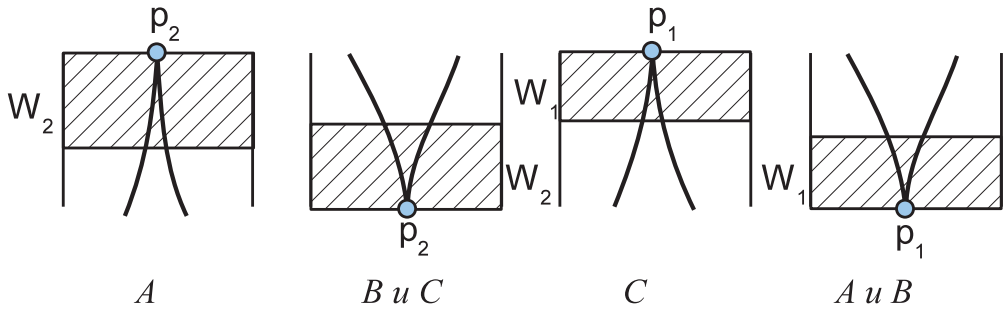


Рис. 26

Рассуждая точно так же, как при доказательстве леммы о полном растяжении, получаем следующее утверждение.

Для любого отрезка h кривой $x = h(y)$ (где h удовлетворяет условию Липшица с константой L), лежащего в W_i и имеющего одним из концов точку P_i, существует $k \in \mathbb{Z}_+$ такое, что в образе $T^k h$ есть компонента связности, имеющая непустое пересечение со всеми слоями устойчивого слоения, лежащими в W_1 или в W_2.

Возникают следующие логические возможности: 1) отрезок $h \subset W_1$ произвольно малой длины "растягивается" при итерировании и на W_1 и на W_2. 2) отрезок "растягивается" только на W_1 или только на W_2. Пусть осуществляется случай 2), т. е. для любого сколь угодно малого отрезка h, оканчивающегося, например, в P_1, $h \subset W_1$ существует $n \in \mathbb{Z}_+$ такое, что в образе $T^n h$ есть компонента, пересекающая все устойчивые слои, лежащие в W_1 .

Рассмотрим область $W' \subset W_1$, в границу которой входят два прообраза линии разрыва, и произвольный отрезок $h \subset W'$ с концами на этих прообразах (при этом функция $x = h(y)$ удовлетворяет условию Липшица с константой L). Так как для некоторого $k \in \mathbb{Z}_+$, $(\operatorname{int} T^k h) \cap S \neq \emptyset$, следовательно, существует отрезок $h_1 \subset T^k h$, $h_1 \subset W_1$. Поэтому существует $k_1 \geq k$ такое, что в образе $T^{k_1} h$ есть кривая, пересекающая все устойчивые слои, лежащие в W_1. Используя стандартную технику, отсюда получаем, что в W есть периодическая точка. Более того, отсюда же следует, что в W_1 плотны устойчивые слои, на

которых лежат периодические точки. А так как для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$, $(\operatorname{int} T^n h) \cap S \neq \emptyset$, то и в некоторой области $\tilde{W}_2 \subset W_2$ построенного выше типа тоже всюду плотны слои, на которых есть периодические точки.

В случае 1) доказательство аналогично приведенному (без последнего добавления).

2°. Покажем, что для любой точки $Q \in \Sigma$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $k \in \mathbb{Z}_+$ и точка $\tilde{Q} \in \Delta_k$ такие, что C^0-расстояние между устойчивыми слоями, на которых лежат точки Q и $\tilde{Q}$, не превосходит ε. Для этого нам прежде всего придется вернуться к определению ТМЦ (G_k, Ω_k, σ). Граф G, построенный по марковскому разбиению, мог a priori иметь вершины, не являющиеся началом никакого ребра, и вершины, не являющиеся концом какого-либо ребра.

Однако всегда можно предполагать, что прообразы линии разрыва, входящие в границу $W_1 \cup W_2$ не совпадают с $l(i)$, $i \in \{1, 2\}$. Отсюда в случае A следует, что прообраз любой кривой из B_k, лежащей в $\operatorname{int}(\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_2^k)$, имеет непустое пересечение с $\operatorname{int}(\tilde{\Pi}_1^k \cup \tilde{\Pi}_2^k)$, поэтому каждая вершина в графе G является концом некоторого ребра. Отсюда нетрудно вывести, что в графе G есть замкнутые пути (в ТМЦ (G, Ω, σ) есть периодические точки). Это так и в случаях B и C. Действительно, пусть V_s – область, содержащая неподвижную точку M_2. Тогда итерации локального неустойчивого многообразия этой точки растянутся на всю область $\tilde{\Pi}_1$ а следовательно, и на $\tilde{\Pi}_2$, т. е. и на $\tilde{\Pi}_1^k$, $\tilde{\Pi}_2^k$. Это означает, что есть путь, состоящий из ребер, соединяющий вершину $''s''$ с любой вершиной $''j''$.

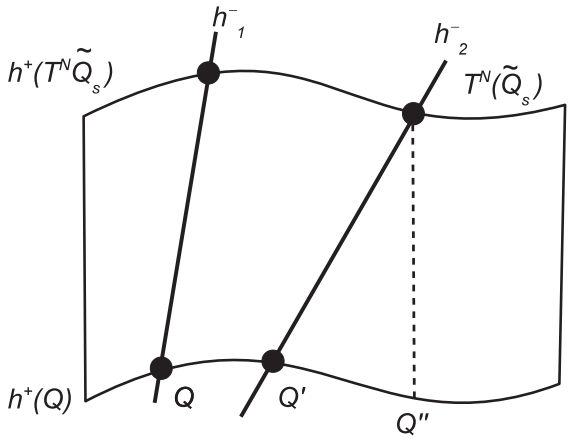


Рис. 27

Так как в любой области $V_j(k)$, соответствующей состоянию консервативной ТМЦ (G_k, Ω_k, σ), по лемме 7.1 есть хотя бы одна точка из Δ_k и так как "высота" области $V_j(k)$ сколь угодно мало при достаточно больших k, то для доказательства существования указанной точки Q достаточно установить, что для любой окрестности точки Q существуют достаточно большое k и такая область $V_j(k)$, отвечающая состоянию ТМЦ (G_k, Ω_k, σ), которая имеет непустое пересечение с этой окрестностью. Предположим, что это не так, т. е. все области $V_j(k)$ пересекающиеся с окрестностью точки Q, соответствуют "неконсервативным" состояниям (тем состояниям, которые есть в ТМЦ (G, Ω, σ) и которых нет в ТМЦ (G_k, Ω_k, σ); см. доказательство леммы 7.1). Так как из "неконсервативного" состояния есть переход только в "неконсервативные" и так как $\overline{T^n V_s(k)} \ni P_i$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_+$, $i = \{1, 2\}$, то отсюда будет следовать, что в некоторой, не зависящей от k окрестности точки P_i, $i = \{1, 2\}$, при увеличении k образуются лишь такие области $V_s(k)$, которые не соответствуют вершинам графа G_k. Но это противоречит п. 1° доказательства, так как периодические точки, которых много в любой окрестности точки P_i обязаны принадлежать "консервативной" области $V_s(k)$.

3°. Рассмотрим произвольную точку $Q \in \Sigma$. Покажем, что $Q \in \overline{\bigcup_k \Delta_k}$.

По п. 1° доказательства $T^n P_i \in \overline{\bigcup_k \Delta_k}$, $i = \{1, 2\}$, $n = 0, 1, ...$, т.е. можно считать, что $Q \neq T^n P_i$. Зафиксируем $N \in \mathbb{Z}_+$ и рассмотрим точку $T^{-N}Q = Q_{-N} (\in \Sigma)$. По п. 2° существует последовательность $\{\tilde{Q}_s\} \subset \Delta_k$ такая, что $\rho_{C^0}(h^+_{\tilde{Q}_s}, h^+_{Q_{-N}})$ при $s \to \infty$, где h^+_A – устойчивый слой, содержащий точку A. Отсюда следует, что и $\rho_{C^0}(h^+_{T^N\tilde{Q}_s}, h^+_Q)$ при $s \to \infty$.

Как следует из § 4, точки $T^N\tilde{Q}_s$ и $T^N Q_{-N}$ лежат на кривых h^-_1 и h^-_2 соответственно, ρ – расстояние между которыми не превосходит q^{N_0}, $0 < q_0 < 1$ (рис. 27).

Кроме того, на кривой h^+_Q найдется точка Q'' такая, что $x(Q'') = x(T^n\tilde{Q}_s)$. Очевидно,

$$d(Q, T^n\tilde{Q}_s) \leq d(Q, Q') + d(Q', T^n\tilde{Q}_s).$$

Так как точки Q и Q' лежат на одном устойчивом слое, то

$$d(Q, Q') \equiv |x(Q) - x(Q')| + |y(Q) - y(Q')| \leq (1 + M)|x(Q) - x(Q')| < (1 + m)\, q_0^N.$$

Далее, так как точки Q' и $T^n\tilde{Q}_s$ лежат на кривой h^-_2, то

$$d(Q', T^n\tilde{Q}_s) \leq (1 + L)|y(Q') - y(T^N\tilde{Q}_s)|.$$

Но

$$\begin{gathered}|y(Q') - y(T^N\tilde{Q}_s)| \leq |y(Q') - y(Q'')| + |y(Q'') - y(T^N\tilde{Q}_s)| \leq \\ M|x(Q') - x(Q'')| + |y(Q'') - y(T^N\tilde{Q}_s)| \equiv \\ \equiv M|x(Q') - x(T^N\tilde{Q}_s)| + |y(Q'') - y(T^N\tilde{Q}_s)| \leq \\ ML|y(Q') - y(T^N\tilde{Q}_s)| + |y(Q'') - y(T^N\tilde{Q}_s)|\,.\end{gathered}$$

Так как по п. 2° доказательства $|y(Q'') - y(T^N\tilde{Q}_s)| \equiv \alpha_s \to 0$ при $s \to \infty$, а $ML < 1$ по (3.1), то

$$|y(Q') - y(T^N\tilde{Q}_s)| < \frac{\alpha_s}{1 - ML} \text{ и } d(Q', T^n\tilde{Q}_s) \leq \frac{(1 - L)\alpha_s}{1 - ML}\,,$$

т. е. $d(Q, T^n\tilde{Q}_s) \leq (1+M)q_0^N + \dfrac{(1 - L)\alpha_s}{1 - ML}$. Выбирая достаточно большим N, а затем достаточно большим s, можем сделать $d(Q, T^n\tilde{Q}_s)$ произвольно малым. Так как точка $T^n\tilde{Q}_s \in \overline{\bigcup_k \Delta_k}$, следовательно, и точка Q обязана принадлежать $\overline{\bigcup_k \Delta_k}$. Лемма доказана.

Напомним, что в § 6 была построена последовательность отображений T_n , сходящаяся в C^1-метрике к отображению T и такая, что каждое отображение T_n обладает конечным марковским разбиением на максимальном инвариантном множестве $\Sigma \subset \mathrm{int}\overline{\bigcup_{i,j} \Pi_{ij}}$.

Лемма 7.3. *Множество Σ является топологическим пределом последовательности Σ_n.*

Доказательство. 1°. Из доказательства леммы 7.2 непосредственно следует, что для любой точки $Q_0 \in \Sigma \setminus H_0$ и любого $\delta > 0$ существует $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ такое, что в ТМЦ (G_k, Ω_k, σ) для любого $k \geq k_0$ существует такая точка $\omega \in \Omega_k$, что точка $\beta(\omega) = Q'$ δ-близка к точке Q_0. Поскольку периодические точки ТМЦ (G_k, Ω_k, σ) всюду плотны в неблуждающем множестве, без ограничения общности точку ω можно считать

гетероклинической, т. е. стремящейся к периодическим траекториям σ как при положительных, так и при отрицательных итерациях отображения σ. Следовательно, Q' – тоже гетероклиническая точка отображения T. Так как периодические точки, к которым стремится траектория отображения T, проходящая через Q', являются грубыми (что легко следует из экспоненциального сближения точек на их неустойчивых (устойчивых) многообразиях при отрицательных (положительных) итерациях отображения T и их многообразия (они являются гладкими), как следует из доказательства леммы 3.1, пересекаются трансверсально в точке Q', то существует $k_1 \in \mathbb{Z}_+$, $k_1 \geq k_0$ такое, что для каждого $n > k_1$ отображение T_n будет иметь в δ-окрестности точки Q' гетероклиническую точку Q'', конечно принадлежащую Σ_n. Поэтому

$$\Sigma \subset \underline{\mathrm{lt}}_n \, \Sigma_n \quad \text{и} \quad \Sigma \subset \overline{\mathrm{lt}}_n \, \Sigma_n \, .$$

2°. Покажем, что $\mathrm{lt}\, \Sigma_n \; = \Sigma = \overline{\mathrm{lt}}\, \Sigma_n$. Пусть, например, точка $Q \in \overline{\mathrm{lt}}\, \Sigma_n$ и сначала $Q \notin H_0 \cup P_1 \cup P_2$. Существует последовательность точек

$$Q_{n_k} \in \Sigma_{n_k} \, , \; Q_{n_k} \to Q \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Из леммы 4.3 вытекает, что существует последовательность точек $Q'_{n_k} \in \Sigma_{n_k}, Q'_{n_k} \to Q$ при $k \to \infty$ и все точки Q'_{n_k} лежат на том же T-инвариантном устойчивом слое, что и точка Q. Предположим, что $Q \in \Sigma$, т. е. существует $s \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $T^{-s} Q \notin \mathrm{int} \overline{\bigcup\limits_{i,\,j} \Pi_{i\,j}}$. Тогда по непрерывности и $T^{-s} Q_{n_k} \notin \mathrm{int} \bigcup\limits_{i,\,j} \Pi_{i\,j}$ для достаточно больших k, что невозможно. Следовательно, $Q \in \Sigma$.

3°. Пусть теперь $Q \in H_0 \cup P_1 \cup P_2$, $Q \in \overline{\mathrm{lt}}\, \Sigma_n$ и $Q_{n_k} \to Q$, $Q_{n_k} \in \Sigma_{n_k}$. Так как множество Σ_{n_k} состоит из конечного числа компонент связности (по леммам 4.6,4.7) и неустойчивые слои, образующие его, пересекаются трансверсально (в липшицируемом смысле) с устойчивыми слоями из множества H^+ для отображения T, то для любого ε можно найти точку $Q^s_{n_k} \in \Sigma_{n_k}$ такую, что $d(Q^s_{n_k}\, , Q_{n_k}) < \varepsilon$ и, кроме того, все точки $Q^s_{n_k}$ (при фиксированном s лежат на одном и том же T-инвариантном устойчивом слое, не принадлежащем H_0. Любая предельная по "k" точка Q^s последовательности $\{Q^s_{n_k}\}$ по п. 2° доказательства принадлежит Σ и находится от точки Q на расстоянии, не превышающем ε_s. Устремляя s к бесконечности, а ε_s к нулю, получаем в силу замкнутости Σ, что и точка $Q (= \lim\limits_{s \to \infty} Q^s)$ тоже принадлежит Σ.

Аналогично доказывается, что и $\underline{\mathrm{lt}}\, \Sigma_n \; = \Sigma$.

Лемма 7.4. *Множество Σ одномерно .*

Доказательство. Так как $\Pi_i \cap \Sigma = \mathrm{lt}_n(\Pi_i \cap \Sigma_n)$, $i = 1, 2$, и каждое $\Sigma_n \cap \Pi_i$ по леммам 4.6 и 4.7 состоит из конечного числа компонент связности, то и $\Sigma \cap \Pi_i$ состоит из такого же или меньшего числа компонент связности, а .поскольку Σ – метрический компакт в $\mathbb{R}^2$, то оно может быть либо одномерным, либо двумерным. Предположим, что оно двумерно. Тогда по классической теореме Урысона существует двумерный симплекс, целиком содержащийся в Σ. Следовательно, существует отрезок $h_0 \subset \Sigma$, являющийся кусочком слоя устойчивого слоения, причем $h_0 \notin H_0$. Пусть абсциссы концов h_0 будут x^1_0 и x^2_0 , а абсциссы концов отрезка $h_{-k} = T^{-k} h_0$ обозначим через x^1_{-k} и x^2_{-k}. Из доказательства

леммы 4.2 следует, что $|x^1_{-k} - x^2_{-k}| > q_0^{-k}|x^1_0 - x^2_0|$, где $0 < q_0 < 1$. Выберем $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ таким, чтобы $q_0^{-k_0}|x^1_0 - x^2_0| > 1/2$. Тогда, с одной стороны, отрезок h_{-k_0} должен принадлежать Σ, а с другой – иметь точки вне $\Pi_1 \cup \Pi_2$, что невозможно.

Лемма 7.5. *При выполнении условия (5,1) в множестве $\Sigma 2$ всюду плотны периодические точки отображения T.*

Доказательство. Покажем сначала, что для любой точки Q из Σ и любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая точка $\tilde{Q}$ из Σ такая, что C^0-расстояние между устойчивыми слоями, на которых лежат точки Q и $\tilde{Q}$, не превосходит ε. Зафиксируем настолько большое $k \in \mathbb{Z}_+$ и такую область $V_s(k)$, у которой обе граничные кривые из B_k пересекаются с ε-окрестностью точки Q. Из леммы о полном растяжении следует, что существует такое $n \in \mathbb{Z}_+$, что для любого отрезка h, уравнение которого $x = h(y)$ и концы лежат на кривых из B_k, входящих в границу $V_s(k)$ в образе $T^n h$ есть хотя бы один отрезок, пересекающийся с $V_s(k)$, причем его граничные точки лежат вне $V_s(k)$. (Если таких отрезков несколько, то для определенности выберем самый левый из них и обозначим его через h_1). Зафиксируем это n, и $h_1 \cap V_s(k)$ обозначим через $\tau(h)$. Как и в § 4, показывается, что существует единственный отрезок h такой, что $\tau(h) = h$ и что на этом отрезке лежит единственная неподвижная точка отображения T^n – искомая точка.

Далее доказательство совершенно аналогично п. 3° доказательства леммы 7.2 с той лишь разницей, что устойчивый слой точки $Q_{-N} = T^{-N} Q$ приближается устойчивыми слоями периодических точек из Σ (а не произвольных, как в лемме 7.2).

Замечание. При доказательстве леммы 7.5 использовалось не неравенство (5.1), являющееся достаточным условием полного растяжения, а именно само свойство полного растяжения.

Если свойство полного растяжения не имеет места, то в множестве Σ, как уже говорилось, могут находиться и блуждающие точки отображения T. Для локализации аттрактора в этом случае поступим следующим образом. Рассмотрим множество V точек устойчивых слоев, на каждом из которых лежит периодическая точка отображения T. В множестве $\bar{V}$ выделим те компоненты связности, которые являются замкнутыми областями в $\mathbb{R}^2$ и объединение этих компонент обозначим через V^+. Из п. 1° доказательства леммы 7.2 следует, что $V^+ \neq \emptyset$.

Обозначим через V_i^+ компоненту связности множества V^+, содержащую точку P_i, $i \in \{1, 2\}$. Из предположения о наличии блуждающих точек для T следует, что существует $m_i \in \mathbb{Z}_+$ такое, что $T^{m_i} V_i^+ \cap S \neq \emptyset$, в то время как $T^j V_i^+ \cap S = \emptyset$, $0 \leq j < m_i$, $i \in \{1, 2\}$. Из определения V^+ легко вывести, что $V^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{2} \bigcup\limits_{j=0}^{m_j} T^j V_i^+$. Замыкание компоненты связности множества $(\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2) \setminus (V^+ \cup S)$ будем называть лакуной.

Обозначим через Σ^+ замыкание множества точек траекторий отображения T целиком содержащихся в V^+.

Лемма 7.6. 1. *В Σ^+ всюду плотны периодические точки отображения T.*
2. *Множество Σ^+ одномерно.*

Доказательство. Доказательство первого утверждения леммы совершенно аналогично доказательству леммы 7.5. Докажем второе. Определим отображение $\psi : \Sigma^+ \to \mathbf{R^1}$, ставящее в соответствие точке из Σ^+ ординату пересечения устойчивого слоя, на котором она лежит, с множеством $|x| = 1$ (каждый устойчивый слой может пересечься

только с одной из этих прямых). Из § 3 следует, что ψ непрерывно. Кроме того, из определения ψ легко вывести, что ψ – открытое отображение. Отсюда из [48, гл. 9, предложение 1] и из того, что $\operatorname{int}\psi(\Sigma^+) \neq \emptyset$ непосредственно следует, что Σ^+ не может быть нуль-мерным. То, что оно не двумерно, устанавливается так же, как в лемме 7.4. Следовательно (в силу компактности), множество Σ^+ обязано быть одномерным.

Другое доказательство не нульмерности Σ^+, не использующее свойств проекции, основано на следующем замечании: каждая периодическая точка может принадлежать Σ^+ лишь вместе с кусочком своего неустойчивого многообразия – это сразу следует из всюду плотности в V^+ устойчивых слоев, на которых лежат периодические точки, – откуда вытекает всюду плотность гетероклинических (следовательно, в данной ситуации неблуждающих) точек на кусочке неустойчивого многообразия исходной периодической точки. Отсюда также вытекает, что Σ^+ нельзя разбить на два замкнутых непересекающихся подмножества, хотя бы одно из которых нуль-мерно.

Как уже говорилось, лакун конечное число; именно если $(\tilde{\Pi}_1 \cup \tilde{\Pi}_2 \setminus V^+) \cup S = \emptyset$, то их $m_1 + m_2 + 1$, в противном случае (см. рис. 19) их $m_1 + m_2 + 2$. Перенумеруем лакуны, обозначив их через V_1^-, V_2^-, ... , V_M^-. Образ любого отрезка h, принадлежащего лакуне V_j^-, концы которого лежат на границе (различных) компонент V_i^+, при отображении T обязан пересекаться хотя бы с одной лакуной V_s^- ; концы же этого образа могут пересекаться лишь с границей лакуны. Это позволяет нам ввести в рассмотрение ТМЦ $(\tilde{G}^-, \tilde{\Omega}^-, \sigma)$. Состояния этой ТМЦ отождествляются с лакунами V_1^-, ... , V_M^- ; из состояния "i" в состояние "j" есть переход, если $\operatorname{int} Th \cap \operatorname{int} V^- \neq \emptyset$ для любого отрезка $h \subset V_i^-$ с только что описанными свойствами.

Из того, что каждая компонента множества V^+ содержит образ некоторой другой компоненты, легко вывести, что в каждое состояние цепи $(\tilde{G}^-, \tilde{\Omega}^-, \sigma)$ есть переход из некоторого другого состояния. Поэтому так же, как это делалось при доказательстве леммы 7.1, из цепи $(\tilde{G}^-, \tilde{\Omega}^-, \sigma)$ можно выделить (непустую) максимальную консервативную подцепь, которую мы обозначим через (G^-, Ω^-, σ). Обозначим через Σ^- множество неблуждающих точек отображения T, целиком содержащихся в $\bigcup\limits_{j=1}^{M} V_j^-$. Следующая лемма устанавливается аналогично доказательству результатов § 2 (см. также лемму 7.2) [16].

Лемма 7.7. *$T|_\Sigma$ топологически сопряжено с $\sigma|_{\Omega^-}$.*

Замечание. Из сказанного не следует, что $\Sigma^+ \cap \Sigma^- = \emptyset$. Более того, можно указать такой пример, что $\Sigma^+ \cap \Sigma^- \neq \emptyset$. А именно в примере на рис. 16 из § 5 "граничная" периодическая точка нетривиального нуль-мерного множества принадлежит одновременно и аттрактору Σ^+.

Замечание. Результаты параграфа справедливы и в том случае, когда одна из точек $P_i \in H_0$. Чтобы это установить, нужно, во-первых, изменить определение множества B_k, исключив из B_k прообраз линии разрыва, содержащий P_i, и, далее, проверив все доказательства лемм § 7 в измененной ситуации, убедиться в том, что они совершенно аналогичны проведенным выше.

Теперь пора подвести итог. Теоремы 4 и 5 следуют из лемм § 4 и 7, утверждения пп. II и III теоремы 6 следуют из лемм § 4, утверждение I доказано в § 6, а утверждение IV доказывается точно так же, как соответствующее утверждение для симметричного случая

[16] Отметим тот очевидный факт, что точки из некоторой окрестности линии разрыва либо содержатся в V^+, либо за одну итерацию приходят в V^+.

в теореме 6.3. Что касается теоремы 3, то все ее утверждения, кроме четвертого, непосредственно выводятся из этих теорем. Остановимся на нем чуть подробнее. Все периодические движения в Σ^- или, что то же самое, периодические точки в Σ являются точками седлового типа: по ним трансверсально пересекаются устойчивое и неустойчивое многообразия, точки на которых экспоненциально сближаются при их итерировании в положительную или соответственно отрицательную сторону. Это означает, что все периодические точки грубые. Более того, как следует из доказанных результатов, показатель этого экспоненциального сближения можно выбрать одним и тем же для всех точек, поэтому характеристические показатели всех периодических движений равномерно отделены от мнимой оси. Как следует из [40], из петли сепаратрисы седла при подходящем изменении системы рождается периодическое движение. В множестве U_2 всюду плотны системы с петлями сепаратрис. Отсюда вытекает, что при изменении системы либо рождается, либо исчезает счетное множество периодических движений.

§ 8. **Заключительные замечания**

Из проведенных рассуждений следует, что при описании аттрактора большую роль играет поведение сепаратрис седла O. Каждая сепаратриса Γ_i, $i \in \{1, 2\}$ либо 1) возвращается в O, образуя петлю, либо 2) стремится к периодическому движению, либо 3) имеет нетривиальное ω-предельное множество. В симметричном случае обе сепаратрисы ведут себя одинаково, т. е. либо стремятся к одному и тому же предельному множеству, либо к разным, но, естественно, симметричным. Бифуркации, происходящие в аттракторе Σ^+ при изменении системы, находят свое непосредственное отражение в поведении сепаратрис. Так, в случае 1) петли свидетельствуют о том, что в них влипли периодические движения. Случай 2) также ответствен за очень важную бифуркацию, а именно с ним связано возникновение лакун. Здесь, используя технику, развитую в работе, можно, например, для (случая А, установить справедливость следующих утверждений. (В связи с этим см. также [49].)

Утверждение 1. *Пусть обе сепаратрисы стремятся к одному и тому же периодическому движению L и пусть L не имеет гомоклинических кривых. Тогда при общих малых возмущениях либо у этого периодического движения появляются гомоклинические кривые, либо в Σ возникают лакуны с тривиальным предельным множеством – периодическим движением L.*

Сразу же приведем геометрический пример, иллюстрирующий это утверждение. Предположим, что в однопараметрическом семействе (для простоты) симметричных отображений, естественно удовлетворяющих условиям (1.1), при значении параметра $\mu = \mu_1$ выполнено следующее: 1) в аттракторе имеются периодические точки $Q_2 \in \Pi_{21}$ и $Q_{12} \in \Pi_{12}$, $TQ_2 = Q_1$, $TQ_1 = Q_2$; 2) точка P_1 принадлежит компоненте связности $h_2^{(2)}$ устойчивого многообразия точки Q_2, не содержащей Q_2, а точка P_2 принадлежит компоненте $h_1^{(2)}$ устойчивого многообразия точки Q_1, так что, если обозначить через h компоненту связности устойчивого многообразия точки Q_i, ее содержащую, $i \in \{1, 2\}$, то $T^2 h_2^{(2)} \subset h_2$, $T^2 h_1^{(2)} \subset h_1$ (рис. 28). Тогда если параметр μ, входит так, что при его увеличении ордината точки P_i уменьшается по модулю, $i \in \{1, 2\}$, то при увеличении μ точка $T^2 P_1$ оказывается выше кривой h_2, а $T^2 P_2$ – ниже кривой h_1 – образуются лакуны.

Утверждение 1 относится в основном к симметричным отображениям. В несимметричном же случае общую ситуацию описывает

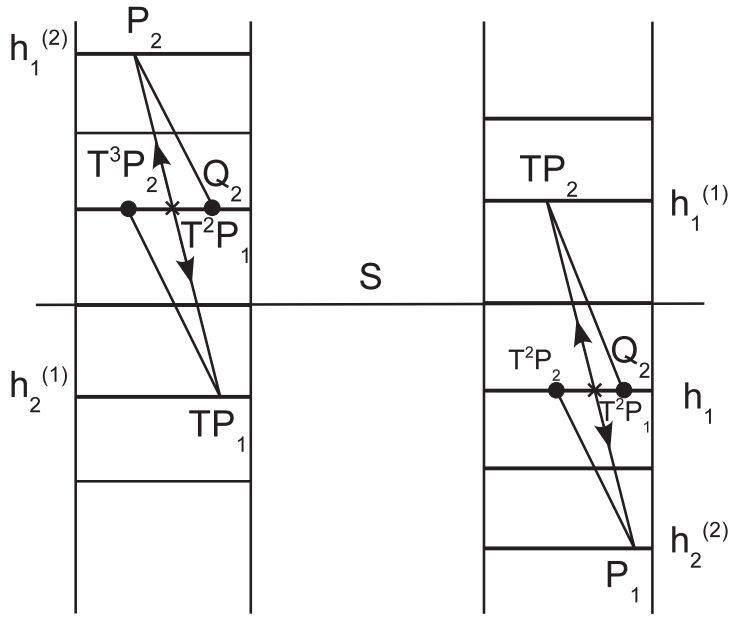


Рис. 28

Утверждение 2. *Пусть только одна из сепаратрис* Γ_1, Γ_2 *стремится к периодическому движению* L *и пусть* L *не имеет гомоклинических кривых. Тогда при общих малых возмущениях либо у* L *появляются гомоклинические кривые, либо в* Σ *возникает лакуна, содержащая предельное множество, в которое входит* L.

Соответствующий пример легко построить из только что приведенного, вложив его в двухпараметрическое семейство и сначала "сняв" точку P_1 с устойчивого многообразия точки Q_2, а затем – точку P_2 с многообразия точки Q_1 . В ситуации утверждения 2 лакуна конечной величины образуется скачком, поэтому естественно такой механизм образования лакун называть жестким в отличие от описанного в утверждении 1 мягкого механизма. Отрождающееся в лакуну предельное множество (содержащее L) может при этом быть как тривиальным – совпадать с L, – так и нетривиальным. Именно справедливо

Утверждение 3. *Пусть сепаратрисы* Γ_i *стремятся к разным периодическим движениям* L_1 *и* L_2 *и для каждого периодического движения* L_i *выполнено следующее свойство* $(\divideontimes)$ *: хотя бы одна из компонент связности множества* $W_i^u \setminus L_i$ *, где* W_i^u *– неустойчивое многообразие* L_i *не пересекается с устойчивым многообразием* W_i^s *периодического движения* L_i, $i \in \{1, 2\}$. *Тогда*

а) существует сколь угодно малое возмущение, при котором возникают гомоклинические кривые, принадлежащие каждой из компонент $W_i^u \setminus L_i$, $i \in \{1, 2\}$ *;*

б) при общем малом возмущении, сохраняющем свойство $(\divideontimes)$, *образуются лакуны с нетривиальным предельным множеством внутри них.*

Хорошей иллюстрацией сформулированного утверждения служит симметричный пример 2 из § 5 с нетривиальным нуль-мерным множеством (см. рис. 16). Здесь итерации точек

P_i , $i \in \{1, 2\}$, стремятся к периодическим движениям периода 5. Нетрудно увидеть, что если возмутить систему так, чтобы ордината точки P_i , $i \in \{1, 2\}$, по модулю увеличилась, то лакуны схлопнутся – в Σ вообще не останется блуждающих точек, т. е. будет осуществляться случай а) утверждения 3. Если возмущение таково, что ордината точки P_i уменьшилась по модулю, то периодические движения, проходящие через точки M и M', отодвинутся от аттрактора, нуль-мерное нетривиальное множество Σ^- уже не будет пересекаться с Σ^+ (как в начальном состоянии) – реализуется случай б) утверждения 3.

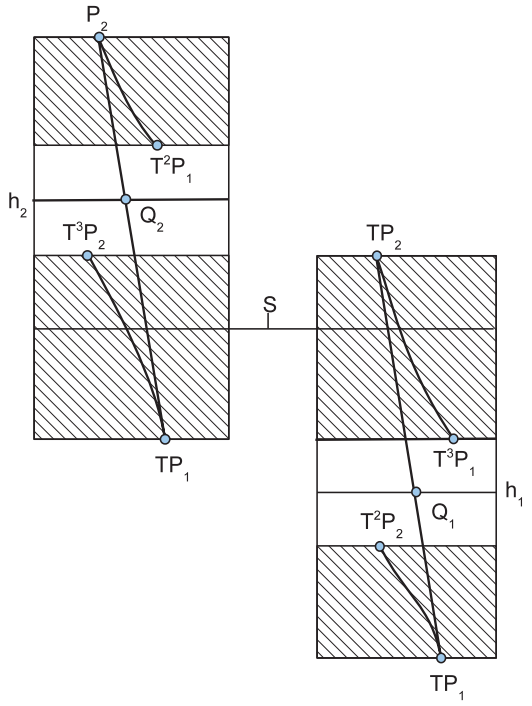


Рис. 29

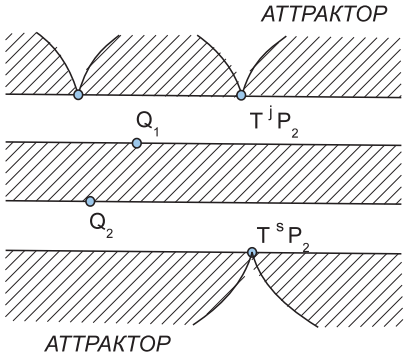


Рис. 30

Поглощение нуль-мерного множества аттрактором в случае а) объясняется тем, что имеющаяся в Σ^- всюду плотная (в Σ^-) траектория как бы разносит аттрактор по нуль-мерному множеству, превращая его в одномерное, что обуславливает следующий принципиальный эффект, сопровождающий эту бифуркацию : носитель "максимальной" инвариантной меры должен претерпевать скачок. (Можно сказать, что топологическая энтропия множества Σ^+ в этот момент терпит разрыв.) Таким образом, можно сказать, что аттрактор негруб не только в математическом, но и в "физическом" смысле.

Такой механизм образования лакун также будем называть жестким.

Как видно из приведенных примеров, в основе проверки условий утверждений 1 и 2 лежит использование аппарата конечных марковских разбиений, позволяющего судить о наличии или отсутствии гомоклинических кривых и контуров. Отсюда же вытекает и следующее

З а м е ч а н и е. Если Γ_1 и Γ_2 стремятся к периодическому движению L, имеющему гомоклинические кривые, или к двум периодическим движениям L_1 и L_2 , каждое из которых имеет гомоклинические кривые в обеих компонентах связности $W_i^u \setminus L_i$, $i \in \{1, 2\}$, то

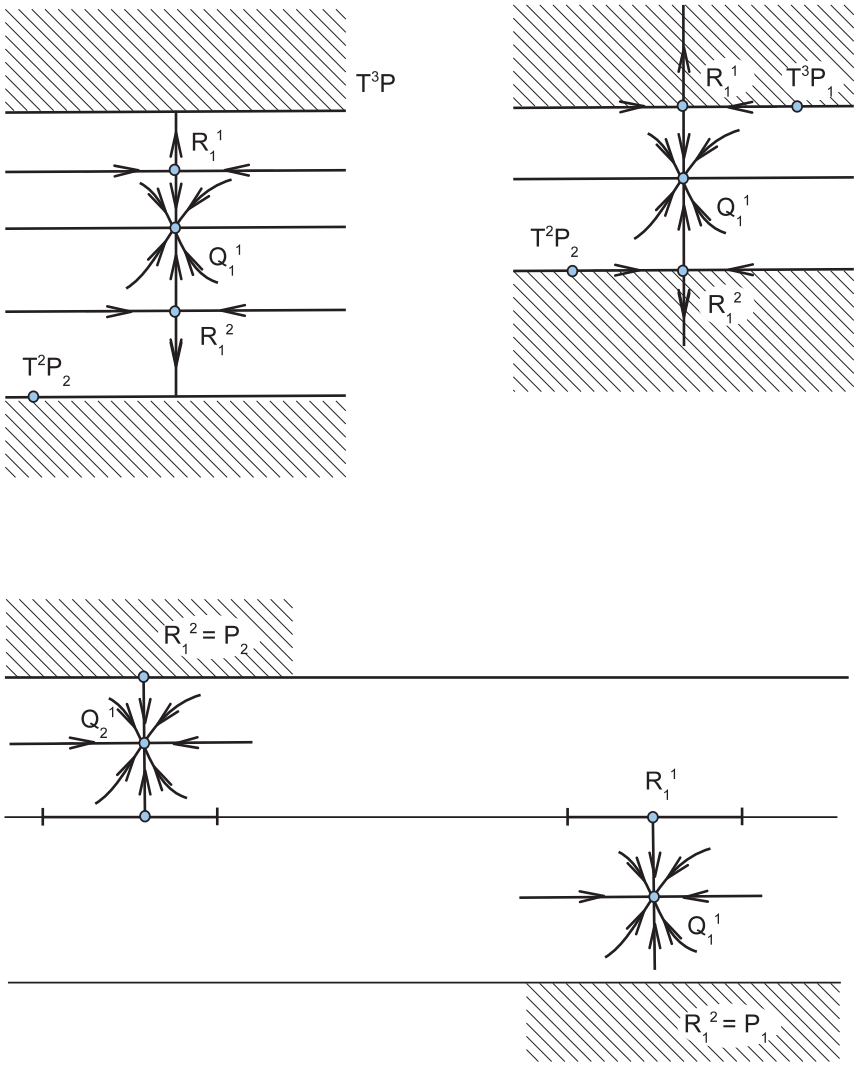


Рис. 31

бифуркации, подобные рассмотренным, приводят к локальной топологической перестройке аттрактора, происходящей без образования лакун.

Из результатов и методов работы легко получить оценку числа лакун через константу растяжения q. Ее вывод здесь приводить не будем, а укажем лишь окончательный результат:

$$N < \frac{-2\ln(q-1)}{\ln q}$$

Приведем схему исчезновения аттрактора.

Вернемся к примеру (см. рис. 28), иллюстрирующему мягкий механизм возникновения лакун. Предположим, что при возрастании μ, от μ_1 до μ_2, $\mu_2 > \mu_1$ с аттрактором ничего существенного не происходит, а при $\mu = \mu_2$ точки Q_1 и Q_2 теряют устойчивость через негрубое седло; при этом мультипликатор равен $+1$, а первая, не равная нулю ляпуновская величина имеет нечетный номер. В общем случае при дальнейшем увеличении μ, точка Q_i

распадается на три: устойчивый узел и две седловые точки: R_i^1 и R_i^2, $i \in \{1, 2\}$ (рис. 31). При этом, точка T^2P_1 лежит выше устойчивого многообразия точки R_1^1, а точка T^3P_2 – ниже устойчивого многообразия точки R_1^2. Предположим, что при $\mu = \mu_3 > \mu_2$ точка T^2P_1 ложится на устойчивое многообразие точки R_1^1, а точка T^3P_2 принадлежит устойчивому многообразию точки R_1^2. Это и есть момент исчезновения аттрактора. Он очень похож на момент его возникновения в § 1, 2 ; роль периодических движений L_1 и L_2 играют периодические движения, проходящие через точки R_1^1 и R_1^2, а устойчивым фокусам Q_1 и Q_2 [19] соответствует устойчивое периодическое движение, проходящее через точку Q_1^1. При дальнейшем возрастании параметра итерации точек P_1 и P_2 стремятся к устойчивой периодической орбите, проходящей через точку Q_1^1 и "на месте" аттрактора образуется нетривиальное нуль-мерное множество. Далее, при $\mu = \mu_4$ $(> \mu_3)$ периодические орбиты точек R_1^1 и R_1^2 влипают в прообразы линий разрыва, что соответствует образованию двухобходных петель (см. рис. 31). В этот момент нуль-мерное гиперболическое множество исчезает, и при дальнейшем возрастании μ остается единственное устойчивое периодическое движение (см. рис. 31).

В несимметричном случае возможен другой вариант исчезновения аттрактора. В лакуне из уплотнения траекторий возникает периодическое движение типа седло-узел [13], которое разваливается на два периодических движения, одно из которых – седловое, и другое – устойчивое. При дальнейшем изменении параметра исчезновение происходит по такой же схеме, как только что описанная.

Приведенная схема – простейшая из возможных. При большем числе лакун возможностей исчезновения аттрактора значительно больше, но здесь мы их касаться не будем.

Поступило 2.1 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. S a l t z m a n B. Finite Amplitude free convection as a initial value problem. 1.- J. of the Atmospheric Sciences, 1962, 19, 329-341.

2. L o r e n z E. N. Deterministic nonperiodic flow.- J. of the Atmospheric Sciences, 1963, 20, 130-141.

3. Ш и л ь н и к о в Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений.- ДАН СССР, 1965, 160, № 3, 558-561.

4. Ш и л ь н и к о в Л. П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус.- Матем. сб., 1970, 81, № 1, 92-103.

5. Г а в р и л о в Н. К., Ш и л ь н и к о в Л. П. О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой. I.- Матем. сб., 1973, 88, № 8, 475-492; II.- Матем. сб., 1973, 90, № 1, 139-156.

6. Г а в р и л о в Н. К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур.- Матем. заметки, 1974, 14, № 5, 687-696.

7. Г а в р и л о в Н. К. Об n-мерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой.- ДАН СССР, 1973, 212, № 2, 276-279.

8. Б е л я к о в Л. А. Об одном случае рождения периодического движения с гомоклиническими кривыми.- Матем. заметки, 1974, 15, № 4, 571-580.

9. N e w h o u s e S. E. Diffeomorphisms with infinitely many sinks.- Topology, 1974, 12, 9-18 .

10. N e w h o u s e S. E. The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth Stable Sets for diffeomorphisms.- IHES (preprint), 1977.

11. А ф р а й м о в и ч В. С., Ш и л ь н и к о в Л. П. О малых периодических возмущениях автономных систем.- ДАН СССР, 1974, 24, № 4, 739-742.

12. А ф р а й м б в и ч В. С., Ш и л ь н и к о в Л. П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем.- ППМ, 1977, 1, № 4, 618-627.

13. А ф р а й м о в и ч В. С, Ш и л ь н и к о в Л. П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.- ДАН СССР, 1974, 219, № 6, 1281-1285.

14. Ш и л ь н и к о в Л. П. Теория бифуркации динамических систем и опасные границы.- ДАН СССР, 1975, 224, № 5, 1046-1051.

15. Л у к ь я н о в В. И., Ш и л ь н и к о в Л. П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.- ДАН СССР, 1978, 243, № 1, 26-29. - 16. Б ы к о в В. В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом.- В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький, 1978, с. 3-32.

17. Ш и л ь н и к о в Л. П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре.- VII Internationale Konferenz uber nichtlineare Schwinguagen, Bd 1, 2 . Btrlin, 1977.

18. H a k e п H. Analogy between higher instabilities in fluid and lasers.- Phys. Letters, 1975, 53 A, N 1, 77-79,

19. А ф р а й м о в и ч В. С, Б ы к о в В.В., Ш и л ь н и к о в Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.- ДАН СССР, 1977, 234, № 2, 386-339.

20. R o b b i n s K.A. A new approach to subcritical instability and turbulent transitions of a simple dynamo.- Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. , 1977, 82, part 2, 309-325.

21. А ф р а й м о в и ч В. С, Б ы к о в В. В., Ш и л ь н и к о в Л. П. Негрубые притягивающие множества типа аттрактора Лоренца.- В кн.: Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений. Кишинев, 1979, с. 10.

22. Williams R.F. The structure of Lorenz attractor.- Lecture Notes in Math., 1977, 615, p. 94-112.

23. G u c k e n h e i m e r J. Structure Stability of Lorenz attractor.- Preprint , 1977.

24. Б у н и м о в и ч Л. А., С и н а й Я. Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца.- В кн.: Нелинейные волны. М.: Наука, 1979.

25. К о с я к и н А. А., С а н д л е р Е. А. Эргодические свойства одного класса кусочно-гладких преобразований отрезка. - Изв. вузов. Сер. Матем., 1972, 3, 32-40.

26. Л е о н о в Н. Н. О движениях динамических систем, допускающих стохастическое описание.- В кн.: Динамика систем, вып. 8. Горький, 1975, с. 34 49.

27. С и м о н о в А. А. Исследование кусочно-монотонных преобразований интервала методами символической динамики.- ДАН СССР, 1978, 238, № 5 , 1063-1066.

28. R a n d D. The topological classification of Lorenz attractor.- Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc. , 1978, 83, part 3, 451-460.

29. M i l n o r J., T h u r s t o n W. On iterated maps of interval.- Preprint, 1976.

30. М а л к и н М. И. Топологическая сопряженность аттракторов разрывного типа.- В кн.: Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по качественной теории дифференциальных уравнений. Кишинев, 1979, с. 112.

31. R u e l l e D. The Lorenz attractor and the problem of turbulence.- Report of the conference in "Quantum Models and Mathematics" in Bielefeld, September, 1975.

32. L a n f o r d O.E. Computer pictures of the Lorenz attractor.- In : Lecture Notes in Math. , 615, 1977, 113-117.

33. H е п о п M., P o m e a u J. Two Strange attractors with a Simple Structure.- In : Lecture Notes in Math., 565, 1976,.29-68 . 34. K a p l a n J., J o r k e J.A. Preturbulence : A metastable regime.- Preprint, 1977.

35. S h i m i z u T., M o r i o k a N. Chaos and limits cycles in the Lorenz model.- Phys. Letters, 1978, 66 A, N 3, 182-184.

36. M o r i o k a N., S h i m i z u T. The transition between turbulent and periodic states in the Lorenz model.- Phys. Letters, 1978, 66 A, N 6, 447-449.

37. В у л Е. Б., С и н а й Я. Г. Об одном структурно-устойчивом механизме появления инвариантных гиперболических множеств.- В кн.: Многокомпонентные случайные системы. М.: Наука, 1979.

38. С и м о н о в А. А. Исследование бифуркаций в некоторых динамических системах методами символической динамики.- ДАН СССР, 1978, 240, № 6, 1297-1300.

39. Ш и л ь н и к о в Л. П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий.- Матем. сб., 1963, 61, (104), 443-466.

40. Ш и л ь н и к о в Л. П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло.- Матем. сб., 1968, 77, № 3, 461-472.

41. P a r r y W., S u l l i v a n D. A topological invariant of flows on I-dimensional spaces.- Preprint, 1975.

39. С и н а й Я. Г. Марковские разбиения и У-диффеоморфизмы.- Функциональный анализ, 1968, 2, № 1, 61-82.

40. А л е к с е е в В. М. Перроновские множества и топологические цепи Маркова.- УМН, 1969, 24, № 5, 227-228.

41. B o w e n R Markov partitions for Axiom A Diffeomorphisms.- Amer. J. Math., 1970, 92, 907-918.

45. Ш и л ь н и к о в Л. П. Об одной задаче Пушкаре-Биркгофа.- Матем. сб., 1967, 74, № 3, 378-397.

46. А л е к с е е в В. М. Символическая динамика.- Одиннадцатая математическая школа. Киев, 1976.

47. G u c k e n h e i m e r J. A Strange, Strange attractor.- In ; J. Marsden, J.Mc. Cracken. The Hopf Bifurcation and Applications, Applied Mathematical Sciences, 19, Springer Verlag, 1976.

48. А л е к с а н д р о в П. С, П а с ы н к о в Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.

49. A f r a i m o v i c h V.S., S h i l n i k o v L.P. On strange attractors and quasi-attractors.- In : Bifurcations and Chaos. - Pitman (to appear).

ТЕОРИЯ БИФУРКАЦИЙ И МОДЕЛЬ ЛОРЕНЦА

Л.П ШИЛЬНИКОВ

★Статья из книги Дж. Марсден, М.Мак-Кракен "Бифуркация рождения цикла и ее приложения". (Перевод на русский язык, с дополнениями), "МИР", Москва, 1980. Дополнение II, с. 317 - 336.

В последнее время широкое внимание специалистов различных направлений привлечено к системе уравнений

$$\dot{x} = -\sigma\,(x - y), \quad \dot{y} = -x\,z + r\,x - y, \quad \dot{z} = x\,y - b\,z, \tag{1}$$

получившей название модели Лоренца. Система (1) была выведена [29,21] из уравнений Навье-Стокса в задаче о тепловой конвекции, поэтому параметры r, σ, b имеют вполне определенный гидродинамический смысл: r – число Рэлея, σ – число Прандтля, а b характеризует размеры системы. В этой системе Лоренцем [21] счетом на ЭВМ при $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ было обнаружено сложное хаотическое поведение траекторий, которое указывало на возможность существования принципиально новых установившихся режимов – стохастических колебаний, отличных от автоколебаний и биений. А такого рода движения представляют повышенный интерес в связи с объяснением явления турбулентности.

Конечно, имеются и другие динамические модели, в которых отмечалось сложное поведение траекторий [1]. Однако они не вызывали столь большого обсуждения либо по причине своей узкой направленности, либо из-за того, что сложные эффекты обнаруживались в нефизической области параметров, либо обнаруживалась чрезмерная чувствительность притягивающего множества к сдвигам параметров, сопровождающимся появлением и исчезновением устойчивых периодических движений [2]. Одну из таких систем мы все же упомянем – это часы. Как известно, часы – вполне "динамичная" система, работающая либо в режиме автоколебаний (часы Галилея-Гюйгенса), либо в режиме синхронизации. Здесь среди многих моделей современных часов, предложенных Н. Н. Баутиным, одна из них [8] (после дополнительного учета самоиндукции) заслуживает особого внимания: как следует из ее анализа, проведенного Л. А. Комразом [18], при значениях параметров из некоторой области часы будут иметь "стохастический ход" (правда, неизвестно, имеют ли такие часы какие-либо преимущества перед обычными).

Поскольку математическим образом стохастических колебаний не могут быть устойчивые периодические и квазипериодические движения, то естественно возникает вопрос: что же может им быть? Надо сказать, что специалистам по качественной теории дифференциальных уравнений хорошо известны примеры притягивающих грубых предельных множеств; Y-подмногообразия [2], соленоиды Смейла-Вильямса [30, 32], соленоиды Плыкина [24] и т.д. С легкой руки Рюэля и Такенса [26] множества, устойчивость которых сочетается с неустойчивостью каждой индивидуальной траектории, получили название "странных" аттракторов. Однако возможность появления грубых странных аттракторов в простых модельных системах остается пока проблематичной. Поэтому естественно возникают вопросы: может ли быть в модели Лоренца странный аттрактор? И если да, то как он возникает и какова его структура?

[1] Так к (1) сводятся модели лазеров [31,6], а также модель дискового динамо [28].

[2] Возникающие в таких системах математические вопросы отчасти отражены в работах [4, 5, 7, 10, 11, 13-15, 19, 20, 22, 23, 34, 35, 37-39].

Ответы на поставленные вопросы были даны в [6]. Ниже кратко приводятся полученные здесь результаты.

Картину эволюции структуры разбиения фазового пространства на траектории системы (1) будем описывать при изменении r от 10 до 28, положив $\sigma = 10,\ \ b = 8/3$ [3]. Ее удобно представить состоящей из следующих этапов:

1. При $r \in [10,\, r_1]$, где $r_1 = 13.92$, система имеет три состояния равновесия $O(0,0,0),\ O_1$ и O_2, из которых O является седлом, имеющим двумерное устойчивое инвариантное многообразие W^s и две выходящие траектории Γ_1 и Γ_2 , которые будем называть сепаратрисами. Одна из них, для определенности Γ_1, стремится к устойчивому состоянию равновесия O_1, а другая Γ_2 – к O_2 (рис. 1,а).

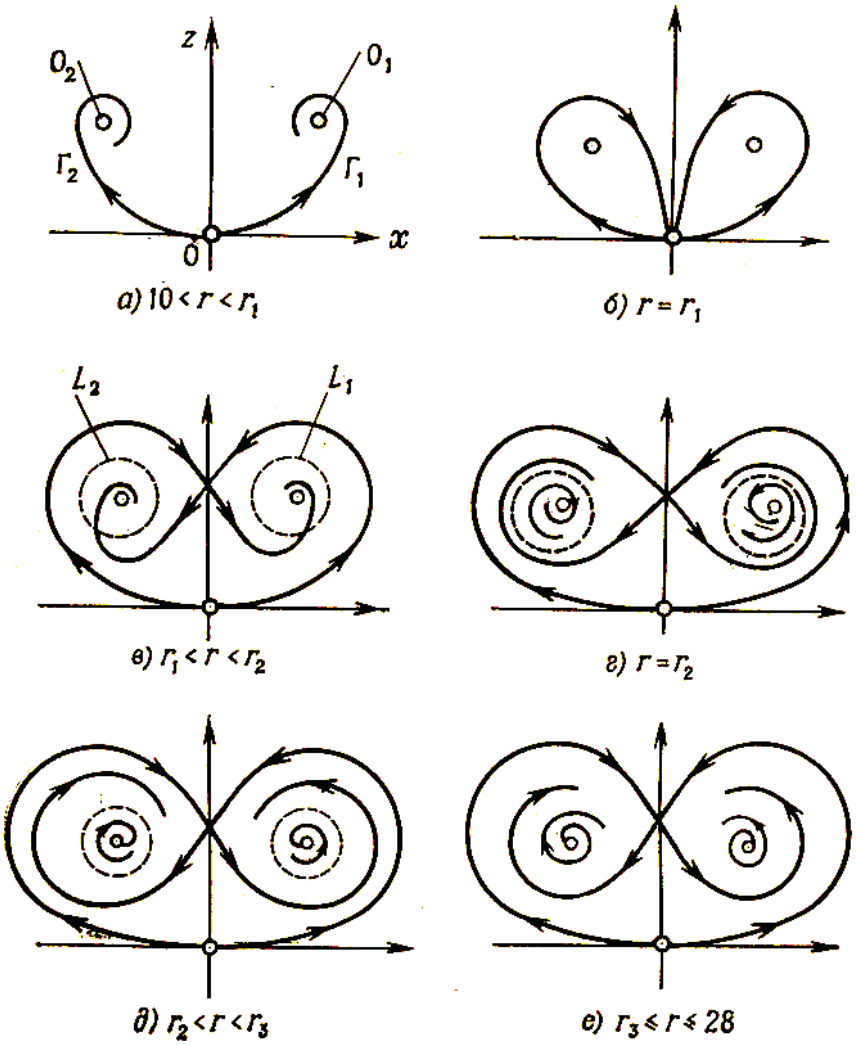


Рис. 1

2. При $r = r_1$ каждая из сепаратрис Γ_1 и Γ_2 становится двоякоасимптотической к седлу O (рис. 1,б) [4] . При переходе r через r_1 из каждой петли сепаратрисы рождается по седловому периодическому движению L_1 и L_2 . Более того, вместе с рождением L_1 и L_2 появ-

[3] В [6] был рассмотрен и другой путь : $r = 28,\ b = 8/3,\ 1 \le \sigma \le 10$

[4] Система (1) инвариантна относительно замены $(-x,\ -y,\ z) \to (x,\ y,\ z)$.

ляется инвариантное предельное множество Ω_1, траектории которого находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством бесконечных в обе стороны последовательностей из двух символов, при этом периодическим последовательностям соответствуют периодические движения седлового типа. Однако это множество не является притягивающим, и, следовательно, устойчивыми предельными множествами остаются O_1 и O_2. Такая ситуация будет иметь место для $r \in [r_1, r_2]$, где $r_2 \simeq 24.06$, только теперь Γ_1 будет стремиться к O_2, а Γ_2 – к O_1 (рис. 1, в).

3. Момент $r = r_2$ является бифуркационным. Он характерен тем, что если раньше Γ_1 и Γ_2 шли в устойчивые фокусы O_2 и O_1, то при $r = r_2$, Γ_1 и Γ_2 будут стремиться к седловым периодическим движениям L_2 и L_1 соответственно (рис. 1,г). Это приводит к тому, что на месте Ω_1 возникает уже двумерное предельное множество Ω_2'.

4. При $r \in (r_2, 28]$ система будет иметь устойчивое предельное множество Ω_2, обладающее свойствами:

1) Ω_2 является негрубым: это связано, в частности, с тем, что седло O принадлежит Ω_2 вместе со своими сепаратрисами Γ_1 и Γ_2 [5].

2) Периодические движения всюду плотны в Ω_2 и являются грубыми, седлового типа.

3) В Ω_2 имеет место экспоненциальное разбегание траекторий, столь характерное для систем с перемешиванием и непрерывным спектром[6].

4) Исчезновение периодических движений при изменении r возможно только путем влипания их в петли сепаратрис седла O.

5) В интервале (r_2, r_3), где $r_3 \simeq 24.74$, в фазовом пространстве будут существовать три устойчивых аттрактора: Ω_2, который будем называть аттрактором Лоренца, и состояния равновесия O_1 и O_2 (рис. 1. д). Границей области притяжения аттрактора Лоренца являются устойчивые многообразия периодических движений L_1 и L_2.

6) При $r \to r_3$ периодические движения L_1 и L_2 стягиваются к состояниям равновесия O_1 и O_2, которые при $r = r_3$ теряют устойчивость, что приводит к жесткому режиму возникновения стохастичности.

7) При $r \in (r_3, 28]$ единственным устойчивым предельным множеством является аттрактор Лоренца (рис. 1. е).

Поскольку $r = r_2$ является границей интервала устойчивости Ω_2, то при $r \leq r_2$ изображающая точка покидает окрестность Ω_2. Новым установившимся режимом будет либо O_1, либо O_2. Таким образом, получаем, что $r = r_2$ является точкой динамически неопределенной опасной границы [9] области устойчивости аттрактора Лоренца.

Отметим, что эта последовательность бифуркаций с теми же численными значениями бифуркационных параметров была указана также Йорком и Капланом [16].

На рис. 2 приведен ряд бифуркационных кривых системы (1) в прямоугольнике: $0 \leq r \leq 100$, $0 \leq \sigma \leq 100$ при $b = 8/3$ [7]. На нем отсутствует кривая l_0 : $r = 1$, переход через которую соответствует появлению из O двух устойчивых состояний равновесия O_1 и O_2. Кривые l_1, l_4, l_5 соответствуют существованию у системы (1) петель сепаратрис седла O. Качественный вид петли $\bar{\Gamma}_1$ в проекции на плоскость $x\,z$ в случае l_1 изображен на рис. 1,б, в случае l_4 – на рис. 3,а, а в случае l_5 – на рис. 3,б. Из нее при переходе через l_i, $i = 1, 4, 5$ будет рождаться периодическое движение седлового типа, инвариантные многообразия которого

[5]На то, что в (1) аттрактор может быть негиперболичен, обратил внимание Рюэль [27]

[6]Метрические свойства аттрактора Лоренца изучались Л. А. Бунимовичем и Я. Г. Синаем [12].

[7]Кривые l_1 и l_2 авторами [6] были указаны на школе по нелинейным задачам гидродинамической устойчивости в Колюбакино (1978 г.).

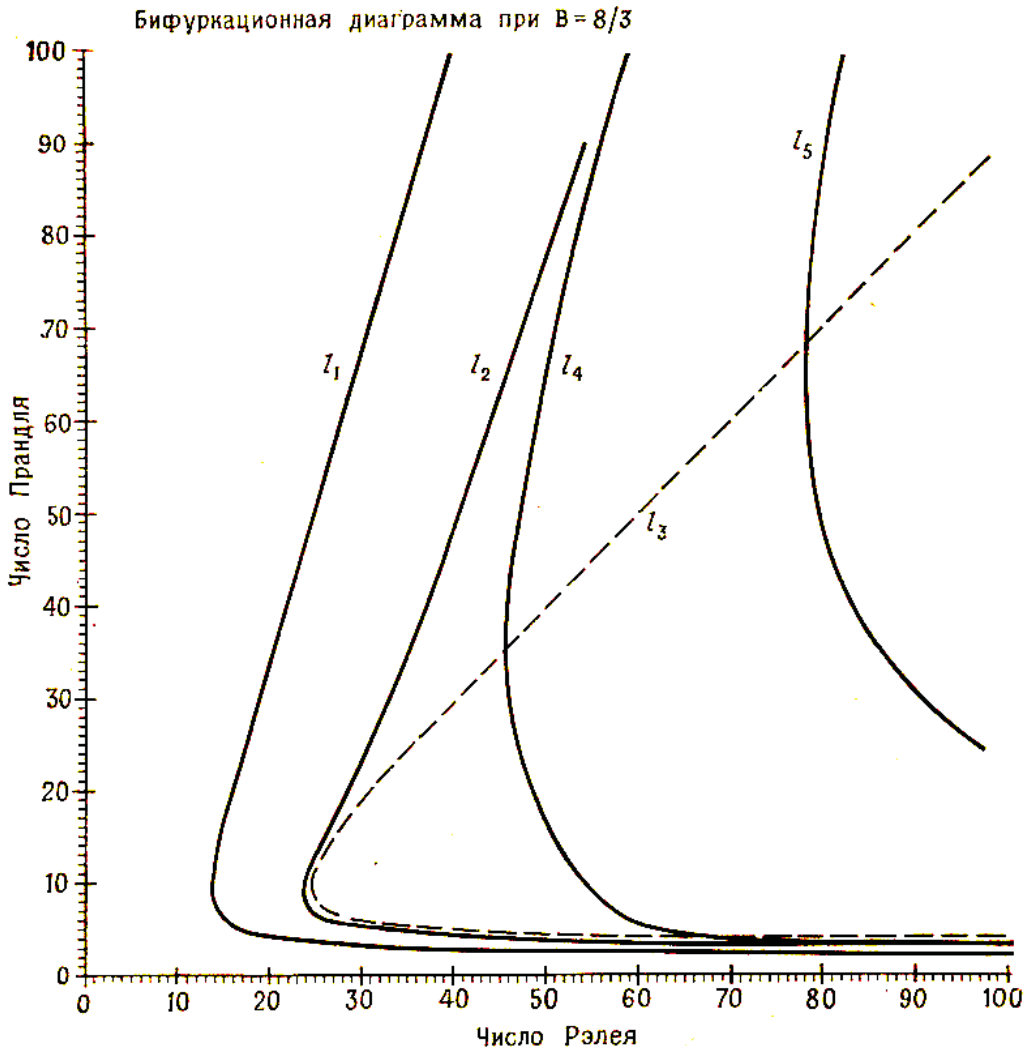


Рис. 2

будут цилиндрами в случае l_1 и l_5 и листами Мёбиуса в случае l_4 . Кривая l_2 соответствует тому моменту, когда Γ_1 и Γ_2 ложатся на устойчивые многообразия родившихся периодических движений (рис. 1. г)). При переходе через l_2 и возникает аттрактор Лоренца[8]. Кривая l_3 хорошо известна: $r = \sigma\,(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$. На ней O_1 н O_2 теряют устойчивость. В последнее время Н. В. Рощиным [25] доказано, что l_3 – опасная граница области устойчивости. Отметим, что l_3 не может пересекать кривые l_1 и l_2, кривую же l_4 она пересекает по двум точкам.

Помимо указанных кривых имеются и другие кривые, соответствующие петлям сепаратрис, но с более сложным поведением Γ_i. Как следует из теоретического рассмотрения, в некоторой области, примыкающей к l_2 , они образуют счетное всюду плотное множество. Некоторые из таких кривых, в частности l_1, были просчитаны группой В.И. Юдовича. кроме того, ими была обнаружена бифуркационная точка Q_{10} (30.4; 10.2) (множество коразмерности два), соответствующая контуру из седел O и O_1 (O_2) и траекторий, их соединяющих, одна из которых является Γ_2 (Γ_1) (рис. 4,а). Имеется еще одна бифуркационная точка Q_{20}

[8]Правда, нужно еще проверить условие 6, накладываемое на разрывное отображение (см. третий параграф).

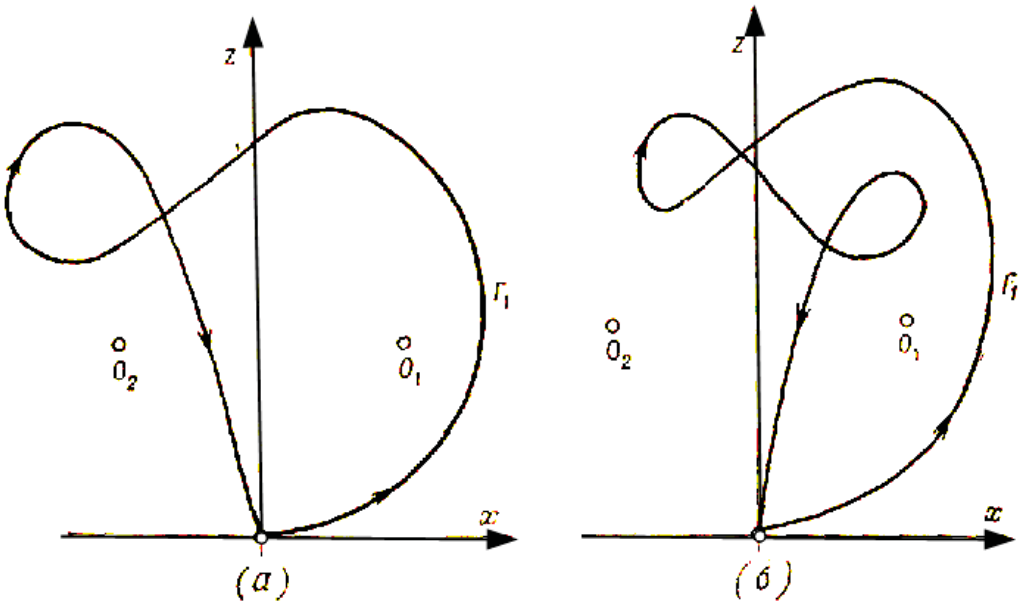


Рис. 3

(85; 11.9), соответствующая контуру из седел O и O_1 (O_2) и траекторий, их соединяющих, одной из которых является Γ_1 (Γ_2) (рис. 4.б), также найденная с помощью численного эксперимента. Подобные бифуркации теоретически рассматривались в работе В. В. Быкова [11], из которой, в частности, следует, что существует еще счетное множество бифуркационных точек Q_{ij} $i = 1, 2; j = 1, 2, ...,$ соответствующих негрубым сепаратрисным контурам такого же типа, но с более сложным поведением Γ_1 и Γ_2, и что к этим точкам примыкают бифуркационные кривые L_{ij}, соответствующие петлям сепаратрис седел O_1 и O_2. А это приводит к важному выводу о существовании устойчивых периодических движении (см. ниже).

Несколько слов о схеме доказательства свойств аттрактора Лоренца Ω_2 . Указывается однопараметрическое семейство систем X_μ , имеющих состояние равновесия типа седло O, одномерные сепаратрисы которого при $\mu = 0$ возвращаются в него. Предполагается, что системы имеют секущую площадку, на которой определено отображение последования $T(\mu)$. Из-за наличия седла $T(\mu)$ будет разрывным. Но именно это свойство $T(\mu)$ и позволяет сравнительно просто сформулировать условия, при которых будет существовать странный аттрактор. Теперь возникает вопрос: можно ли проверить условия для модели Лоренца? Что касается отображения Пуанкаре T_1 для системы (1), то оно есть, поскольку имеется подходящая "секущая" $z = r - 1$. Однако об аналитических свойствах T_1, которые как раз и нужны, практически ничего нельзя сказать. Поэтому нами (В.С. Афраймовичем. В.В. Быковым, Л.П. Шильниковым – авторами [6]) проверка теоретических условий для модели Лоренца проводилась с помощью ЭВМ.

Ниже излагается ряд фактов и утверждений, связанных с изучением динамических систем X_μ типа модели Лоренца и разрывных отображений порождаемых ими. Предварительно описываются бифуркации петель сепаратрис седла.

I. О бифуркациях в окрестности траектории, двоякоасимптотической к седлу

Рассмотрим однопараметрическое семейство X_μ трехмерных гладких динамических си-

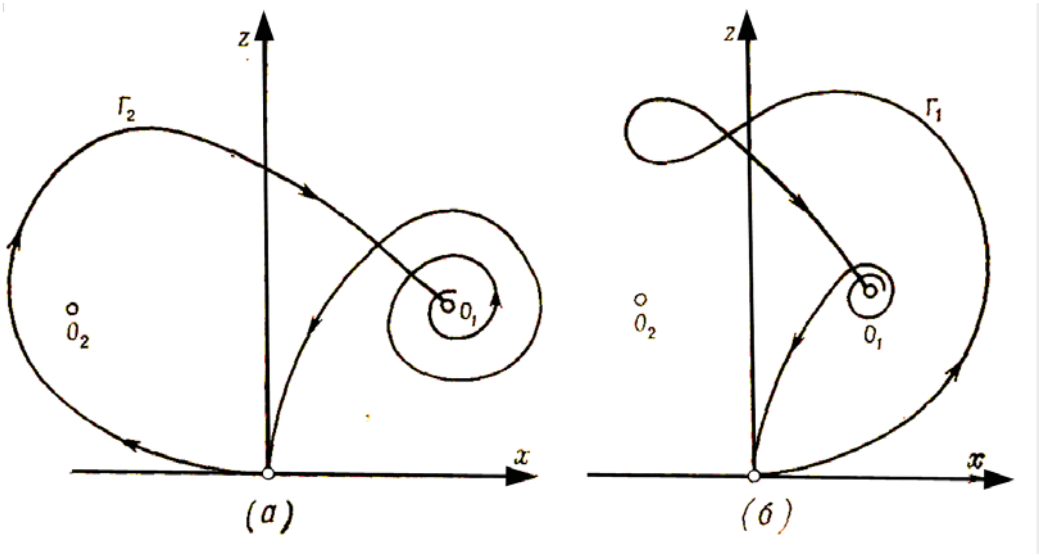


Рис. 4

стем

$$\dot{x} = X\,(x,\,\mu). \tag{2}$$

непрерывно зависящих от параметра μ. Предположим, что системы (2) при $0 \le \mu \le 1$ имеют состояние равновесия $O(0,0,0)$ типа седло. Пусть $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$, $\lambda_3(\mu)$, – корни характеристического уравнения в O и $Re\lambda_i(0) < 0$, $i = 1,2$, а $\lambda_3(0) > 0$. Устойчивое двумерное многообразие седла O будем обозначать через $W^s\,(\mu)$. Предположим, что одна из двух траекторий, выходящих из O, которую обозначим через $\Gamma_1(\mu)$ (вторую обозначим через $\Gamma_2(\mu)$), при $\mu = 0$ возвращается в седло. Ниже $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ мы будем называть сепаратрисами. Будем предполагать, что седловая величина

$$\sigma(0) = \max_{i=1,2} Re\,\lambda_i(0) + \lambda_3(0) \ne 0.$$

Дальнейшее рассмотрение сводится к трем следующим основным случаям:

I) Пусть $\sigma(0) < 0$. Тогда, как известно [33], из петли $\overline{\Gamma_1(0)} = \Gamma_1(0) \cup O$ может родиться только одно периодическое движение $L_1(\mu)$. При этом $\Gamma_1(\mu)$ при $t \to +\infty$ будет наматываться на $L_1(\mu)$.

II) Пусть $\lambda_1(0)$ и $\lambda_2(0)$ – комплексно-сопряженные и $\sigma(0) > 0$. Здесь, как следует из [34, 37], в любой окрестности $\overline{\Gamma_1(0)}$ будет существовать нетривиальное гиперболическое множество, содержащее счетное множество периодических движений. Однако это множество не исчерпывает всего множества траекторий, целиком лежащих в окрестности $\overline{\Gamma_1(0)}$. Это следует из того, что отображение последования $T(\mu)$ при $\mu = 0$ на секущей D, трансверсальной к $\overline{\Gamma_1(0)}$, имеет счетное множество подков Смейла $T : \sigma_k \to \sigma_k$ (см. рис. 5, где через D_1 обозначена область определения $T(\mu)$) с необязательно грубыми переходами с одной подковы на другую. При μ же не равном нулю подков остается только конечное число. Имеющие здесь место бифуркационные явления будут зависеть от новой седловой величины $\sigma_1(0) = 2Re\,\lambda_1(0) + \lambda_3(0)$. Будем предполагать, что $\sigma_1(0) \ne 0$. Тогда можно доказать следующее: 1. При $\sigma_1(0) < 0$ X_μ при μ из счетного множества интервалов будет иметь устойчивое периодическое движение, смена устойчивости которого сопровождается бифуркацией, связанной с рождением периодического движения удвоенного периода. 2. При $\sigma_1 > 0$ будет

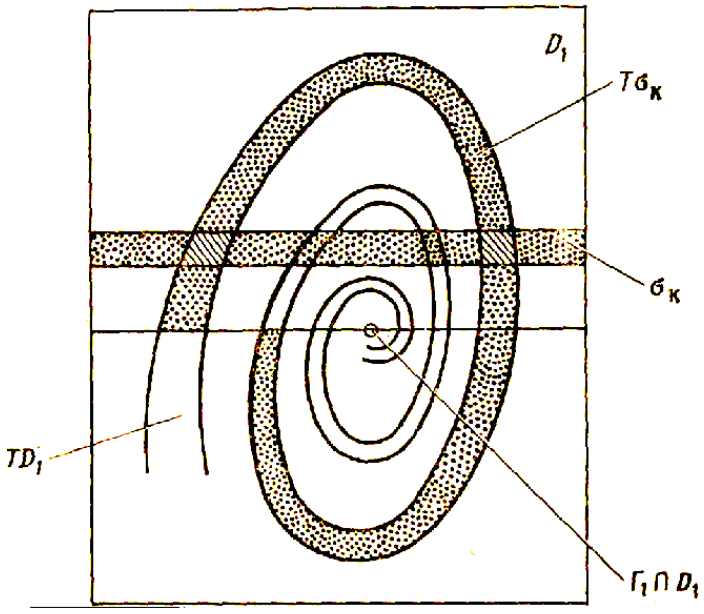


Рис. 5

существовать счетное множество интервалов, для значений μ из которых система X_μ будет иметь вполне неустойчивое периодическое движение (устойчивое при $t \to -\infty$).

Как уже отмечалось выше, на плоскости параметров r, σ модели Лоренца при $b = 8/3$ имеется счетное множество кривых l_{ij}, точкам которых соответствуют петли сепаратрис O_1 и O_2. Поскольку в седле O_1 (O_2) два корня $\lambda_1^{(1)}$ и $\lambda_2^{(1)}$ комплексно-сопряженные с $Re\ \lambda_i^1 > 0$, а третий – $\lambda_3 < 0$, то O_1 (O_2) имеет двумерное неустойчивое многообразие W_1^u (W_2^u) и две траектории Γ_{11} и Γ_{12} (Γ_{21} и Γ_{22}), входящие в него. Пусть $\bar{\Gamma}_{11}$ ($\bar{\Gamma}_{21}$) – петля седла O_1 (O_2), соответствующая l_{ij}. Так как сумма корней равна дивергенции поля в O_1 , а она равна $-b - \sigma - 1$, то получаем, что $2\,Re\,\lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)} < 0$ и $Re\,\lambda_1^{(1)} + \lambda_3^{(1)} < 0$. Таким образом, с точностью замены времени t на $-t$, мы находимся в условиях применимости второго случая. А это означает, что модель Лоренца при r и σ из счетного множества областей имеет устойчивые периодические движения [9].

III) Пусть $\lambda_1(0) < \lambda_2(0)$ и $\sigma(0) > 0$. Как известно, в рассматриваемом случае все траектории, принадлежащие $W^s(0)$, за исключением двух, будут входить в O, касаясь ведущего направления. Поскольку без ограничения общности можно считать, что система (2) при малых μ имеет вид

$$\dot{x}_i = \lambda_i(\mu)\, x_i + F_i(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \mu), \quad i = 1, 2, 3,$$

то ведущим направлением будет ось x_2. Две же исключительные траектории, входящие в O, касаются оси x_1 . Вместе с O они образуют неведущее многообразие, которое обозначим через $W_0^s(0)$. Оно разделяет $W^s(0)$ на две области, $W_+^s(0)$ и $W_-^s(0)$. Будем предполагать, что $\Gamma_i(0) \in W_+^s(0)$. Пусть U – некоторая достаточно малая окрестность $\overline{\Gamma_1(0)}$ и $\mathfrak{M}_1$ – связная компонента пересечения $\overline{W_+^s(0)}$ с U, содержащая $\Gamma_1(0)$. Как следует из [36], в общем случае $\mathfrak{M}_1$ есть двумерная непрерывная поверхность, гомеоморфная либо цилиндру, либо листу Мёбиуса. В 1-м случае $\overline{\Gamma_1(0)}$ будем называть ориентируемой петлей, а во втором – неориентируемой.

[9] Можно также показать, что к каждой точке Q_{ij} примыкает бифуркационная кривая, соответствующая контуру из O_1, Γ_{21}, O_2, Γ_{11}.

Теорема 1. [36]. *При сделанных предположениях из $\overline{\Gamma_1(0)}$ может родиться только одно периодическое движение $L_1(\mu)$ и притом седлового типа. В случае ориентируемой петли $\overline{\Gamma_1(0)}$ условие рождения состоит в том, чтобы*

$$\lim_{\mu\to 0}\Gamma_1(\mu)\supset\Gamma_2(0),$$

в случае неориентируемой[10] –

$$\lim_{\mu\to 0}\Gamma_1(\mu)=\Gamma_2(0).$$

В первом случае инвариантные многообразия $L_1(\mu)$ будут цилиндрами, а во втором – листами Мёбиуса.

Доказательство теоремы основано на исследовании отображения последования $T_1(\mu)$, построенного на некоторой секущей пластинке D в плоскости $x_2=d$ по траекториям, близким к $\Gamma_1(\mu)$. В некоторых локальных переменных на D это отображение может быть записано в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}&=x_1^{**}(\mu)+y^{\alpha(\mu)}\,\varphi_1(x,\,y,\,\mu),\\ \bar{y}&=y_1^{**}(\mu)+y^{\alpha(\mu)}\,\psi_1(x,\,y,\,\mu),\end{aligned}\tag{3}$$

где $\alpha(\mu)=|\lambda_2(\mu)|\,\lambda_3^{-1}(\mu)$, $P_1\,(x_1^{**}(\mu),\,y_1^{**})$ точка 1-го пересечения Γ_1 с D, причем $y_1^{**}=0$; $y=0$ есть уравнение пересечения $W^s(\mu)$ с плоскостью $x_2=d$, а функции φ_1 и ψ_1 определены, непрерывны и дифференцируемы по x и $y>0$ в D_1 при $\mu\geq 0$. При $y\to 0$ φ_1 и ψ_1 допускают доопределение по непрерывности величиной, зависящей только от μ. Предел ψ_1 при $y\to 0$ будем обозначать через $A_1(\mu)$. Кроме того, имеют место оценки

$$K_1<\left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\;y^{1-\beta_1(\mu)}\right|<K_2,\qquad K_3<\left|\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\;y^{1-\beta_2(\mu)}\right|<K_4,$$

где $K_1,...,K_4$ – константы, а $\beta_1(\mu)$ и $\beta_2(\mu)$ – некоторые положительные функции, не превосходящие 1. На языке отображений условие $A_1(0)>0$ означает, что петля $\overline{\Gamma_1(0)}$ ориентируемая, $A_1(0)<0$ – что она неориентируема.

Пусть $W_1^s(\mu)$ и $W_1^u(\mu)$ устойчивое b неустойчивое многообразия периодического движения $L_1(\mu)$. В силу того, что $L_1(\mu)$ отрождается от $\overline{\Gamma_1(0)}$, можно показать, что $W_1^s(\mu)$ при $\mu\to 0$ имеет топологическим пределом множество, содержащее $W_+^s(0)$, а расстояние между $W_1^s(\mu)$ и $W^s(\mu)$ в D имеет порядок $|y_1^{**}|^{1/\alpha(\mu)}$. Относительно $W_1^u(\mu)$ можно сказать следующее : $W_1^u(\mu)$ трансверсально пересекает $W^s(\mu)$ и в его границу входит $\Gamma_1(\mu)$.

Как мы уже отмечали, модель Лоренца допускает группу симметрии. Поэтому существование одной петли означает существование другой, причем обе сепаратрисы Γ_1 и Γ_2 будут входить в O, касаясь друг друга. Из сказанного нетрудно извлечь, что устойчивые и неустойчивые многообразия родившихся периодических движений трансверсально пересекаются. А это означает, что при переходах через l_i, $i=1,\,4,\,5$ будет возникать гомоклинический контур, а следовательно, нетривиальное гиперболическое множество [35]. Однако это множество, вообще говоря, уже всего появившегося предельного множества.

2. О рождении гиперболического множества $\Omega_1(\mu)$

Предположим, что при $\mu=0$ обе сепаратрисы $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_2(0)$ возвращаются в седло и выполнены условия случая III. Предположим, что $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_2(0)$ входят в седло O, касаясь

[10] Здесь через lim обозначен топологический предел.

друг друга. Очевидно, в этом случае секущую площадку D можно выбрать так, чтобы и $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_2(0)$ пересекали ее. Обозначим точки пересечения $\Gamma_i(\mu)$ с D через $P_i(x_i^{**}(\mu),\, y_i^{**}(\mu))$. Аналогично $T_1(\mu)$, при $y < 0$ на $D_2 \subset D$ можно построить отображение $T_2(\mu)$, которое запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_2^{**}(\mu) + (-y)^{\alpha(\mu)}\,\varphi_2(x,\, y,\, \mu), \\ \bar{y} &= y_2^{**}(\mu) - (-y)y^{\alpha(\mu)}\,\psi_2(x,\, y,\, \mu), \end{aligned} \tag{4}$$

где φ_2 и ψ_2 удовлетворяют условиям, аналогичным φ_1 и ψ_1. Предел ψ_2 при $y \to 0$ обозначим через $A_2(\mu)$.

Имеют место три основных случая:

Случай A (ориентируемый) – $A_1(0) > 0,\ \ A_2(0) > 0$.

Случай B (полуориентируемый) – $A_1(0) > 0,\ \ A_2(0) < 0$.

Случай C (неориентируемый) – $A_1(0) < 0,\ \ A_2(0) < 0$.

Для определенности будем предполагать, что из $\overline{\Gamma_1(0)}$ и $\overline{\Gamma_2(0)}$ при $\mu > 0$ рождаются периодические движения, т.е. $A_1(0)\, y_1^{**}(\mu) < 0$ и $A_2(0)\, y_2^{**}(\mu) > 0$.

Теорема 2. *Пусть $y_1^{**}(\mu)$ и $y_2^{**}(\mu)$ имеют одинаковый порядок при $\mu \to 0$. Тогда при достаточно малых μ множество $\Omega_1(\mu)$ всех траекторий целиком лежащих в некоторой окрестности $\overline{\Gamma_1(0) \bigcup \Gamma_2(0)}$, исключая O, будет гомеоморфно надстройке над схемой Бернулли из двух символов* [11].

Надо сказать, что теорема 2 сформулирована при весьма ограничительном предположении, которое, однако, для модели Лоренца выполняется. Ниже мы приведем более сильную теорему, а здесь только заметим, что изучение рассматриваемой бифуркации требует рассмотрения двухпараметрического семейства систем, поскольку системы типа X_0 образуют бифуркационное множество коразмерности два.

3. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца

Дальнейшее рассмотрение связано с исследованием предельных множеств X_μ при не малых μ. Прежде всего будем предполагать $\lambda_1(\mu) < \lambda_2(\mu),\ \ \sigma(\mu) = \max\limits_{i=1,2} \lambda_i(\mu) + \lambda_3(\mu) > 0$. Кроме того, предположим, что существует площадка без контакта D, такая, что:

(1) на D можно ввести евклидовы координаты (x, y) так, что

$$D = \{(x, y) \mid \ \ |x| \le 1,\ |y| \le 2\},$$

(2) уравнение $y = 0$ описывает компоненту связности S пересечения $W^s(\mu) \bigcap D$, такую, что все ω-полутраектории, начинающиеся на S, не имеют больше точек пересечения с D при $t \to +\infty$;

(3) по траекториям системы определены отображения $T_1(\mu):\ D_1 \to D$ и $T_2(\mu):\ D_2 \to D$, где $D_1 = \{(x, y) \mid \ \ |x| \le 1,\ 0 < y \le 1\}$, $\ D_2 = \{(x, y) \mid \ |x| \le 1,\ -1 \le y < 0\}$, причем $T_i(\mu)$ записывается в виде

$$\bar{x} = f_i(x, y, \mu), \quad \bar{y} = g_i(x, y, \mu),$$

где $f_i,\ g_i$ – гладкие функции по x и y и непрерывные по μ.

[11] О надстройках над топологическими марковскими цепями см. [1 , 3].

(4) f_i и g_i допускают доопределение по непрерывности на S, причем

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{y\to 0} f_i(x,y,\mu) = x_i^{**}(\mu), \quad \lim\limits_{y\to 0} g_i(x,y,\mu) = y_i^{**}(\mu), \\ T_1(\mu)D_1 \bigcap D \subset \Pi_1 = \{(x,y) \mid \ \frac{1}{2} \le x \le 1, \ |y| \le 2\} \\ T_2(\mu)D_2 \bigcap D \subset \Pi_2 = \{(x,y) \mid \ -1 \le x \le -\frac{1}{2}, \ |y| \le 2\}. \end{array} \tag{5}$$

Из поведения траектории вблизи $W^s(\mu)$ вытекает, что в малой окрестности S для $T_1(\mu)$ имеет место представление вида (3), а для $T_2(\mu)$ – представление вида (4). Ясно, что точка $P_i(x_i^{**}(\mu),\, y_i^{**}(\mu))$, есть первая точка пересечения $\Gamma_i(\mu)$ с D.

Введем отображение $T(\mu)$, определенное на $D_1 \bigcup D_2$:

$$\bar{x} = f(x,y,\mu), \quad \bar{y} = g(x,y,\mu),$$

где $f = f_i, \ g = g_i$, если $(x,y) \subseteq D_i$. Наложим на $T(\mu)$ следующие ограничения [12]

$$\begin{array}{l} \text{а) } \|f_x\| < 1, \qquad \text{б) } \|g_y^{-1}\| < 1, \\ \text{в) } 1 - \|f_x\|\,\|g_y^{-1}\| > 2\sqrt{\|g_y^{-1}\|\,\|g_x\|\,\|g_y^{-1}\,\cdot\, f_y\|} \\ \text{г) } \|g_y^{-1}\,\cdot\, f_y\|\,\|g_x\| < (1 - \|f_x\|)\,(1 - \|g_y^{-1}\|) \end{array} \tag{6}$$

Здесь н ниже $\|\,.\,\| = \sup|\,.\,|, \ (x,y) \in D_1 \bigcup D_2$.

Все наложенные на $T(\mu)$ условия являются естественным обобщением условий на отображения T_1 и T_2 , которые рассматривались выше при малых μ. В частности заметим, что поскольку ψ_1 и ψ_2 представимы в виде $\psi_i = A_i(\mu) + ...$, где многоточие означает члены, стремящиеся к нулю при $y \to 0$, из условия (6) следует, что $A_i(\mu)$ не меняют знака. Поэтому понятие ориентируемого, полуориентируемого и неориентируемого случая можно распространить на любую систему X_μ. Для простоты удобно считать, что $A_i(\mu)$ не обращаются в нуль. При этом получаем, что для существования периодических движений $L_1(\mu)$ и $L_2(\mu)$ в случае A требуется, чтобы $P_1 \in D_2, \ P_2 \in D_1$, в случае B – $P_1 \in D_2, \ P_2 \in D_2$, а в случае C – $P_1 \in D_1, \ P_2 \in D_2$. Неподвижную точку – точку пересечения $L_i(\mu)$ с D – будем обозначать через $M_i(x_i^*(\mu)\,,\, y_i^*(\mu))$. В случае C существует также еще одно периодическое движение $L_3(\mu)$, причем такое, что $L_3(\mu) \bigcap D = M_3(x_3^*(\mu)\,,\, y_3^*(\mu)) \bigcup M_4(x_4^*(\mu)\,,\, y_4^*(\mu))$, где $M_3 \in D_1, \ M_4 \in D_2$. Ясно, что все эти периодические движения имеют седловой тип. Из наложенных условий вытекает, что уравнения пересечений связных компонент устойчивых многообразий $W_i^s(\mu)$ периодических движений $L_i(\mu), \ i = 1,2$ с D, содержащих неподвижные точки M_i, представимы в виде $y = y_i(x,\mu), \ |x| \le 1$. Будем считать, что W_i^s в случае B есть вложенный цилиндр. В случае C уравнение связной компоненты $D \bigcap W_3^s$, содержащей точку M_j, также будет записываться в виде

$$y = y_j(x,\mu), \quad |x| \le 1, \ \ j = 3,4.$$

Определим следующие функции $R_1(\mu)$ и $R_2(\mu)$
в случае A $\quad R_1(\mu) = y_2^{**} - y_1(x_2^{**}(\mu),\, \mu), \quad R_2(\mu) = -(y_1^{**}(\mu) - y_2(x_2^{**}(\mu),\, \mu))$;
в случае B $\quad R_1(\mu) = y_2^{**} - y_1(x_2^{**}(\mu),\, \mu), \quad R_2(\mu) = v_i^{**}(\mu) - y_1(u_i^{**}(\mu),\, \mu)$,
где $u_i^{**}(\mu), \ v_i^{**}(\mu)$ есть координаты $TP_i, \ i = 1,2$;
в случае C $\quad R_1(\mu) = y_2^{**} - y_3(x_2^{**}(\mu),\, \mu), \quad R_2(\mu) = -(y_1^{**}(\mu) - y_4(x_1^{**}(\mu),\, \mu))$.

[12] Эти ограничения аналогичны условиям принципа кольца, использованного нами в задаче разрушения инвариантного тора [4 , 5]

Обозначим через $\Sigma(\mu)$ замыкание множества всех точек траекторий отображения $T(\mu)$, целиком лежащих в D.

Теорема 3. *Пусть* $R_1(\mu) > 0,\ R_2(\mu) > 0$. *Тогда* $T(\mu)$ *на* $\Sigma(\mu)$ *сопряжено со схемой Бернулли из двух символов.*

Рассмотрим теперь случаи, когда нарушены условия теоремы.

1). Пусть $R_1(\mu) > 0,\ R_2(\mu) \le 0,\ (R_1(\mu) \le 0,\ R_2(\mu) > 0)$. Здесь (при некоторых дополнительных условия в случаях A и B) будет существовать нульмерное нетривиальное неустойчивое предельное множество $\Sigma(\mu)$. Но в отличие от вышеприведенного оно может быть негрубым для нульмерного множества значений μ, причем для континуума значений μ $\Sigma(\mu)$ не будет описываться конечной топологической марковской цепью.

2). $R_1(\mu) < 0,\ R_2(\mu) = 0,\ (R_1(\mu) = 0,\ R_2(\mu) \le 0)$. Здесь $\Sigma(\mu)$ уже будет одномерным. Однако оно неустойчиво.

3). $R_1(\mu) < 0,\ R_2(\mu) < 0$. В этом случае $\Sigma(\mu)$ также будет одномерным. При этом, если из $\Sigma(\mu)$ выбросить $M_1 \cup M_2$ в случае A, M_1 в случае B , и $M_3 \cup M_4$ в случае C, то оставшееся множество $\tilde{\Sigma}(\mu)$ будет притягивающим. С прикладной точки зрения $\tilde{\Sigma}(\mu)$ вполне можно считать странным аттрактором, поскольку в нем нет устойчивых периодических точек и они не возникают при шевелении μ . Однако $\tilde{\Sigma}(\mu)$ может не быть неблуждающим множеством. В том случае, когда оно является неблуждающим, $\tilde{\Sigma}(\mu)$ будем называть аттрактором Лоренца.

Дальнейшее рассмотрение мы ограничим случаем A, да и то симметричным, хотя результаты будут аналогичными и в общем случае.

Предположим, что

$$f_2(x, y, \mu) = -f_1(-x, -y, \mu), \quad g_2(x, y, \mu) = -g_1(-x, -y, \mu).$$

Очевидно, в этом случае $R_1(\mu) = R_2(\mu) = R(\mu)$. Пусть $R(\mu) > 0$ при $\mu \in (\mu_0, 1]$. Значение $\mu = \mu_0$ бифуркационное, в этот момент $\Gamma_1(\mu)$ ложится на $W_2^s(\mu_0)$, а $\Gamma_2(\mu_0)$ – на $W_1^s(\mu_0)$ (рис. 6.) [13].

Теорема 4. $\Sigma(\mu_0)$ *одномерно, является неблуждающим множеством, в нем всюду плотны грубые периодические точки, состоит из двух компонент связности, во всех точках не принадлежащих* $y = y_i(x, \mu),\ i = 1, 2,$ $\Sigma(\mu_0)$ *локально устроено как прямое произведение канторовского множества на отрезок.*

Поскольку не все точки неустойчивых многообразий $W_i^u(\mu_0)$ принадлежат $\Sigma(\mu_0)$, то оно неустойчиво. Пусть $\tilde{D}$ есть область, заключенная между кривыми $y = y_2(x, \mu)$ и $y = y_1(x, \mu)$. Очевидно, в силу условия $R(\mu) < 0$ при $\mu > \mu_0$, $T(\mu)\,(\tilde{D} \setminus S) \subset \tilde{D}$.

Замыкание множества всех неблуждающих точек $T(\mu)$ на $\tilde{D} \setminus S$ и будет $\tilde{\Sigma}(\mu)$. Пусть $N(\mu)$ таково, что при $k = N(\mu)$ $T^k(\mu)\,P_2 \in D_1$, а при $k = 0, 1, 2, ..., N(\mu) - 1$ $T^k(\mu)\,P_2 \notin D_1$.

Введем в рассмотрение следующую величину:

$$q(\mu) = \frac{1}{2\|g_y^{-1}\|}\left(1 + \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\| + \sqrt{(1 - \|f_x\| \cdot \|g_y^{-1}\|)^2 - 4\|g_y^{-1}\| \cdot \|g_x\|\,\|g_y^{-1} \cdot f_y\|}\right)$$

Из условия (6), наложенного на $T(\mu)$, можно извлечь, что $q(\mu) > q_0 > 1$.

Теорема 5. *При выполнении условия* [14]

$$q(\mu)^{N(\mu)} > 2$$

[13] Бифуркации контуров, подобных контуру из $L_2(\mu_0)$, $\Gamma_1(\mu_0)$, O и траектории, соединяющей $L_2(\mu_0)$ с O, рассматривались в [39].

[14] Для сравнения заметим, что в несимметричном случае аналогичное условие записывается в виде $q^{N_1+N_2} > q^{N_1} + q^{N_2}$.

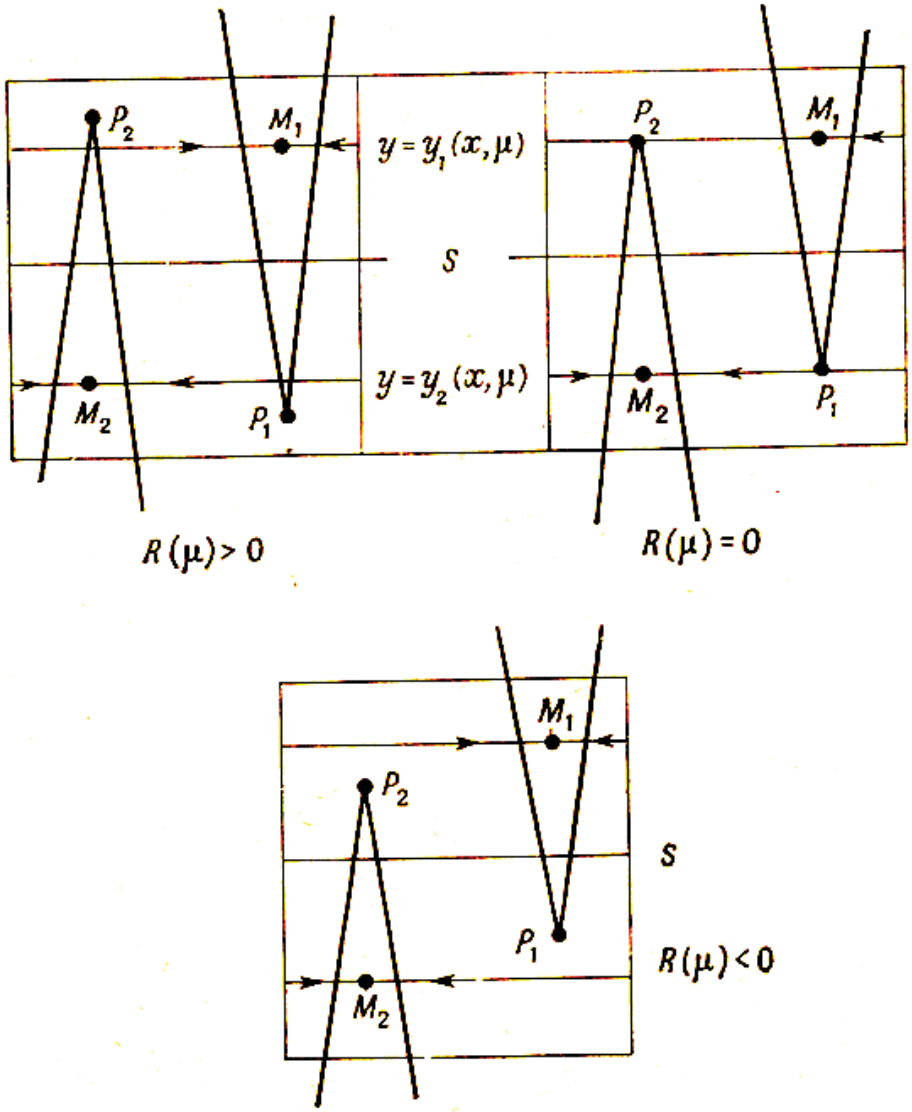


Рис. 6

1) $\tilde{\Sigma}(\mu)$ есть аттрактор Лоренца; 2) $\tilde{\Sigma}(\mu)$ состоит из двух компонент связности, окрестность которых расслоена непрерывным устойчивым слоением на липшицируемые слои, по которым точки притягиваются к нему; 3) $\tilde{\Sigma}(\mu)$ – негрубое[15]*; 4) в $\tilde{\Sigma}(\mu)$ всюду плотны грубые периодические точки; 5) существует последовательность $T(\mu)$-инвариантных нульмерных множеств $\Delta_k(\mu)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, таких, что $T(\mu) \mid \Delta_k(\mu)$ сопряжено конечной транзитивной топологической марковской цепи, причем $\Delta_{k+1} \in \Delta_k(\mu)$ и $\Delta_k(\mu) \to \tilde{\Sigma}(\mu)$ при $k \to +\infty$; 6) в общем случае $T(\mu)$ на $\tilde{\Sigma}(\mu)$ для счетного всюду плотного множества значений μ допускает конечное марковское разбиение и не допускает для континуума значений μ*[16].

Из того, что $q(\mu)^{N(\mu)} \to \infty$ при $\mu \to \mu_0$, следует, что существует такое $\mu_1 \leq 1$, что при $\mu_0 < \mu \leq \mu_1$ (а не $\mu_0 < \mu \leq 1$, как было неверно выписано в нашей работе [6]) система

[15]Эскиз доказательства негрубости в одном весьма частном случае отображения T был предложен Гукенхеймером [17].

[16]О марковских разбиениях см. [1].

X_μ будет иметь аттрактор Лоренца. Аттрактор Лоренца содержит O, $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$, причем заметим, что периодические движения при изменении μ могут исчезать только путем влипания в петли сепаратрис седла O. В случае, когда $T(\mu)$ допускает конечное марковское разбиение, а оно имеет место, когда $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ стремятся либо к O, либо к периодическим движениям, $\tilde{\Sigma}(\mu)$ устроено весьма просто: в малой окрестности любой точки, не содержащей $(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \cap D$, оно гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на отрезок. В окрестности же точки $P(\mu)$, принадлежащей $\Gamma_i(\mu)$, связная компонента $\tilde{\Sigma}(\mu)$, содержащая $P(\mu)$ устроена, как букет бесконечного множества лучей, поскольку $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_2(\mu)$ являются границами неустойчивых многообразий точек $\tilde{\Sigma}(\mu)$. Свойство (2) говорит о том, что изучение $T(\mu)$ можно свести к кусочно-монотонному отображению отрезка на прямой. При этом следует заметить, что на каждом куске непрерывности (а их два) отображение, вообще говоря, будет лишь непрерывным.

В общем случае $\tilde{\Sigma}(\mu)$ также будем пределом нульмерных множеств $\Delta_k(\mu)$, но на них $T(\mu)$ уже не обязательно будет сопряжено транзитивной марковской цепи. Здесь в $\tilde{\Sigma}(\mu)$, кроме одномерного негрубого неблуждающего множества $\tilde{\Sigma}_1(\mu)$, может также входить конечное число грубых нульмерных множеств, как тривиальных (периодические орбиты), так и нетривиальных (описываемые ТМЦ). Тем не менее $\tilde{\Sigma}_1(\mu)$, за исключением, быть может, конечного множества значений μ, будет "странным" аттрактором.

4. Заключение

Из приведенного видно, что многие методы и приемы теории бифуркаций нашли свое применение при изучении модели Лоренца. При ее рассмотрении мы встретились с самыми различными, но ранее известными типами бифуркаций: это бифуркации состояний равновесия и периодических движений, бифуркации сепаратрисных контуров как с одним и двумя седлами, так и с седлом и периодическим движением и т. д. Однако и модель Лоренца в свою очередь поставила перед теорией бифуркаций ряд принципиально новых вопросов, на некоторые из которых мы ответили, а некоторые еще ждут своего решения. И здесь хочется особо подчеркнуть следующий факт, выявившийся в результате исследования модели Лоренца, но далеко выходящий за рамки данного конкретного случая: "странные" аттракторы могут возникать из неустойчивых предельных множеств. Естественно, что этот практически важный вывод не может не поколебать в какой-то мере укоренившееся представление, что переход от простых движении к сложным должен сопровождаться некоторой серией "мягких" бифуркаций.

Автор считает необходимым отметить, что результаты, связанные с исследованием модели Лоренца, были получены совместно с В.С. Афраймовичем и В.В. Быковым. В основу изложения были положены наряду с [6] работа [40], содержащая развернутое изложение большинства затронутых здесь вопросов, а также результаты новых численных экспериментов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М. Символическая динамика. Одиннадцатая математическая школа, Киев (1976).

2. Аносов Д.В. Геодезические потоки на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны. Труды матем. института им. В.А. Стеклова. АН СССР, 90 (1967).

3. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Об особых множествах систем Морса-Смейла. Труды Московского матем. об-ва, т. 28 (1973), 181-214.

4. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О малых периодических возмущениях автоном-

ных систем, ДАН СССР, т. 24, N° 4 (1974), 739-742.

5. Афраймович В.С., Шильников Л.П. О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел. ДАН СССР, т. 219, № 6 (1974), 1281-1285.

6. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца, ДАН СССР, т. 234, № 2 (1977), 336-339.

7. Афраймович В.С., Шильников Л.П. Принцип кольца и задача о взаимодействии двух автоколебательных систем, ПММ, т. 41 (1977), 618-627.

8. Баутин Н.Н. Динамическая модель электромеханических часов с ходом Гиппа, Известия АН СССР (ОТН), № 11 (1957), 116-121.

9. Баутин Н.Н., Шильников Л.П. Поведение динамических систем вблизи границы области устойчивости состояний равновесия и периодических движений (опасные и безопасные границы). Дополнение I, наст, книга.

10. Беляков Л.А. Об одном случае рождения периодического движения с двумя гомоклиническими кривыми. Матем. заметки 15, № 4, 571-580 (1974).

11. Быков В.В. О структуре окрестности сепаратрисного контура с седло-фокусом. Межвуз. сб. Методы качественной теории дифф. уравнений, Горький (1978), 3-32.

12. Бунимович Л.А., Синай Я.Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца, Нелинейные волны, М., Наука, 1979, 212-226.

13. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П. О трехмерных динамических системах, близких к негрубой гомоклинической кривой. 1. Матем. сб. т. 88 (130), № 8. (1972), 475-492, II, 90 (132), № 1 (1973), 139-156.

14. Гаврилов Н.К. О трехмерных динамических системах, имеющих негрубый гомоклинический контур, Матем. заметки 14, № 5 (1973), 687-696.

15. Гаврилов Н.К. О n-мерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой, ДАН СССР, 212, № 1 (1973), 276-279.

16. Kaplan J., Jorke J. Preturbulent behaviour in the Lorenz equations (preprint).

17. Guckenheimer J. Strange, strange attractor,. J. Marsden, M. MacCracen, The Hopf bifurcation and its Applications, Springer-Verlag, New York (1976) 368-381. [См. гл. 12 наст. книги.]

18. Комраз Л.А. Динамические модели маятникового регулятора Гиппа, ПММ, т. 35, №I (1971), 147-162.

19. Леонтович-Андронова Е.А., Шильников Л.П. Современное состояние теории бифуркаций динамических систем. Труды 5-й международной конференции по нелинейным колебаниям, т. II (1970), Киев, 232-290.

20. Лукьянов В.И., Шильников Л.П. О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. ДАН СССР. т. 243, №.1 (1978), 26-29.

21. Lorenz E.N. Deterministic nonperiodic flow, Jorn. of the Atmospheric Sciences, v. 20, (1963), 130-141.

22. Морозов А.Д., Шильников Л.П. К математической теории синхронизации колебаний, ДАН СССР, 223, № 6, (1975), 543-547.

23 Newhouse S. Diffeomorphisms with infinetely sinks, Topologv, 12, (1974), 9-18.

24. Плыкин Р.В. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей. Матем. сб. 91. №2 (1974), 243-264.

25. Рощин Н.В. Опасные границы устойчивости в модели Лоренца. Прикладная математика и механика, № 5 (1978), 950-952.

26. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys.. 20 (1971), 167-192.

27. Ruelle D. The Lorenz attractor and the problem of turbulence, Lecture Notes in Math., 565 (1976), 146-158.

28. Robbins K.A. A new approach to subcritical instability and turbulent transitions in a simple dynamo, Math. Proc. of Cambridge Phil. Soc., v. 82, Part 2 (1977). 309-325.

29. Saltzman B. Finite Amplitude free convection as a initial value problem, 1, Journ. of the Atmospheric Sciences, v 19 (1962), 329-341.

30. Smale S. Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. math. Soc. 66 (1967) (русский перевод. УМН. 25 в.1 (1970), 113-185.)

31. Haken H. Analogy between higher instabilities in fluid and lasers, Phys. letters, v. 53A, N 1 (1975), 77-79.

32. Williams R.F. Classification of one dimensional attractors, Proc. Symp. in Pure math., v. 14, Global analysis. Amer. Math. Soc, Providence (1970), 361-393.

33. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий. Матем сб. 61 (104), (1963), 443-466.

34. Шильников Л.П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений, ДАН СССР. т. 160, № 3 (1965), 558-561.

35. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа. Матем. сб. 74 (116), (1967). 378-397.

36. Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. Матем сб. т.77 (119), . № 3 (1968). 461-472.

37. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус. Матем. сб 81 (123), № 1 (1970), 92-103.

38. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы, ДАН СССР, т. 224. № 5 (1975). 1046-1051.

39. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре. VII Internationale Konferenz uber nichtlineare Schwingungen. Band 1, 2, Berlin (1977). 279-293.

40. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Труды Московского матем. общества (т. 44 в печати). *Труды ММО, 1982, т.44, с.150-152; прим. ред.*

О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца.

В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников

Опубликовано в УМН, 1980, т.35, в.4(214), с.164-165

Как известно, при $r > \sigma(\sigma + b + 3)(\sigma - b - 1)^{-1}$ в модели Лоренца [1] все три состояния равновесия: $O(0,0,0)$, O_1 и O_2 – имеют седловой тип. При этом O имеет двумерное устойчивое многообразие, а O_1 и O_2 – одномерные. Численным счетом установлено, что при $b = -8/3$ для бифуркационных точек на плоскости параметров r, σ: $Q_{10}(\approx 30,4; \approx 10,2)$, $Q_{20}(\approx 85,4; \approx 11,9)$[1] в системе Лоренца имеются сепаратрисные контуры из O), O_1 (O_2) и траекторий, их соединяющих. Можно показать, что в окрестности Q_{10} и Q_{20} существует еще счетное множество подобных точек $Q_{ij}(1 = 1, 2, j = 1, 2, ...)$, и к каждой из них примыкает бифуркационная кривая l_{ij}, соответствующая двоякоасимптотической к O_1 (O_2) траектории [2]. Поскольку в седле O_1 (O_2) характеристические корни с положительной реальной частью комплексны и сумма корней (равная дивергенции векторного поля в O_1 (O_2) равна $-\sigma - b - 1 < 0$, то на кривой l_{ij} в фазовом пространстве системы Лоренца имеется нетривиальной гиперболическое множество (в частности, счетное множество "подков Смейла" [3]).

В сообщении устанавливается наличие счетною множества областей в окрестностях точек Q_{ij} при значениях параметров r и σ, из которых модель Лоренца имеет устойчивые периодические движения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] E.N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow.- J. Atmospheric Sci., 1983, 20, p. 130-141.

[2] В.В. Быков, О структуре окрестности сепаратрисного контура с седлофокусом. - В кн.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений (Под ред. Е, А. Леонтович-Андроновой).- Горький, 1978, с. 3-32)

[3] Л.П. Шильников, К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус,- Матем. сб., 1970, 81 (123):1, с. 92-113.

[1] Точка Q_{10} найдена Н.В. Петровской и В.И. Юдовичем.

Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы

Л.П.Шильников
Опубликовано в УМН, 1981, т.36, в.4.

Пусть в m-параметрическом семействе X_μ гладких $(n+1)$-мерных динамических систем для X_0 выполняются условия: 1) имеется седло O, в котором один корень $\lambda_0 > 0$, а $\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 (i = 1, ..., n)$, причем λ_1 действителен и $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \lambda_1 (i = 2, ..., n)$; 2) траектории Γ_1 и Γ_2, выходящие из O, стремятся к O при $t \to +\infty$, касаясь друг друга. В ниже перечисленных случаях систем X_0 в пространстве "управляющих" параметров существует открытое множество U такое, что $O \in \bar{U}$ и при $\mu \in U \quad X_\mu$ имеет квазигиперболический аттрактор типа аттрактора Лоренца.

I. а) Γ_1 и Γ_2 входят в O, касаясь ведущего направления; б) $\dfrac{1}{2} < \gamma < 1, \nu_i > 1, \gamma = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0}, \nu_i = -\dfrac{\mathrm{Re}\,\lambda_i}{\lambda_0} (i = 2, ..., n)$; в) сепаратрисные величины A_1 и A_2 равны 0 (об A_i см. [1]); здесь $m = 4, n \geq 2$.

II. а) $\frac{1}{2} < \gamma < 1, \nu_i > 1$; б) $A_i \neq 0 (i = 1, 2)$; в) λ_2 действителен и $\mathrm{Re}\,\lambda_i < \lambda_2 (i = 3, ..., n)$; г) Γ_1 и Γ_2 принадлежат неведущему многообразию, но в нем касаются ведущего направления, выделяемого корнем λ_2; здесь $m = 4, n \geq 3$.

III. а) Γ_1 и Γ_2 касаются ведущего направления; б) $\gamma = 1$; в) $A_i \neq 0$ и $|A_i| < 2 (i = 1, 2)$; здесь $m = 4, n \geq 2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л.П. Шильников. Дополнение II к книге Дж. Марсдена и М. Мак-Кракена "Бифуркация рождения периодического движения и ее приложения".– М.: Мир, 1980.

Научные труды Л.П. Шильникова

1. Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., О симметричных периодических движениях многокаскадной системы. // Автоматика и телемеханика, 1959, т. 11, 1459-1466.

2. Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., О применении метода малого параметра к системам дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями. // Известия АН СССР ОТН, 1959, т. 6, 52-59.

3. Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., Исследование динамических систем, близких к кусочно-линейным. // Радиофизика, 1960, т.3, 3, 478-495.

4. Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., К исследованию устойчивости периодических движений квазилинейных систем. // Радиофизика, 1961, т.4, 4, 776-779.

5. Шильников Л.П., Некоторые случаи рождения периодических движений в n-мерном пространстве. // ДАН СССР, 1962, т.143, 2, 289-292.

6. Шильников Л.П., О рождении периодических движений в n-мерном пространстве.// Матем.сборник, 1963, 4, с.443-466.

7. Шильников Л.П., Об одном случае существования счетного множества периодических движений.// Межвузовский симпозиум по КТДУ, 1964, тезисы доклада, 1 с.

8. Шильников Л.П., Об одном случае существования счетного множества периодических движений.// ДАН СССР, 1965, т.169, 3, 558-561.

9. Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., Об одном случае рождения периодических движений. // ДАН СССР, 1965, т.169, 6, 1261-1264.

10. Неймарк Ю.И., Шильников Л.П., Об одном случае рождения периодических движений.// Радиофизика, 1965, т.8, 2, 330-340.

11. Шильников Л.П., О рождении периодических движений из траектории, идущей из состояния равновесия типа седло-седло в него же. // ДАН СССР, 1966, т.170, 1, 49-52.

12. Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой.// Тезисы докл. международного конгресса математиков, Москва, 1967, 1с.

13. Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой.// ДАН СССР, 1967, т.172, 1, 54-57.

14. Шильников Л.П., Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа.// Матем. сборник., 1967, т.74(116), 3, 378-397.

15. Шильников Л.П., О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса.// ДАН СССР, 1967, т.172, 2, 298-301.

16. Шильников Л.П., О некоторых результатах, связанных с задачей Пуанкаре-Биркгофа.// Тезисы докл. IV Всесоюзного съезда по теор. и прикл. механике, 1967, 1с.

17. Шильников Л.П., К вопросу о структуре окрестности гомоклинической трубы инвариантного тора.// ДАН СССР, 1968, т.180, 2, 286-289..

18. Шильников Л.П., О рождении периодического движения из траектории двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло. //Матем.сборник, 1968, т.77 (119), N3, 461-472.

19. Шильников Л.П., Об одном новом типе бифуркаций многомерных динамических систем.// ДАН СССР, 1969, т.182, 1, 53-56.

20. Шильников Л.П., К работам Майера о центральных движениях. // Мат. заметки, 1969, т.5, 4, 335-339.

21. Шильников Л.П., К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус.// Матем. сборник, 1970, т.81(123), 1, 92-103.

22. Леонтович Е.А., Шильников Л.П., Современное состояние теории бифуркаций динамических систем.// Труды 5 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, Киев, 1970, т.2, 282-291.

23. Лерман Л.М., Шильников Л.П., О существовании устойчивости почти периодических труб. // Труды 5 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, Киев, 1970, т.2, 292-297.

24. Афраймович В.С., Шильников Л.П., Об особых траекториях динамических систем.// УМН, 1972, 2с.

25. Лерман Л.М., Шильников Л.П., О топологических инвариантах неавтономных динамических систем на многообразиях.// IV Всесоюз. конф., Тбилиси, 1972, (тезисы доклада), 1с.

26. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой.// ч. 1, Матем. сборник, 1972, т.88(130), 4, 475-492.

27. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П., О трехмерных динамических системах, близких к системам с негрубой гомоклинической кривой.// ч. 2, Матем. сборник, 1973, т.90(132), 1, 139-156.

28. Афраймович В.С., Шильников Л.П., Об особых множествах систем Морса-Смейла.// Труды ММО, 1973, т.28, 181-214.

29. Лерман Л.М., Шильников Л.П., О классификации двумерных неавтономных систем второго порядка с конечным числом ячеек.// ДАН СССР, 1973, т.209, 3, 544-547.

30. Шильников Л.П., Об одном явлении в колебательных системах. // III Всесоюз. конф. по КТДУ, 1973, (тезисы доклада), 1с.

31. Лерман Л.М., Шильников Л.П., О структуре окрестности равномерной гомоклинической последовательности решений. // III Всесоюз. конф. по КТДУ, 1973, (тезисы доклада), 1с.

32. Афраймович В.С., Шильников Л.П., О малых периодических возмущениях автономных систем.// ДАН СССР, 1974, т.214, 4, 739-742.

33. Афраймович В.С., Шильников Л.П., О некоторых глобальных бифуркациях, связанных с исчезновением неподвижной точки типа седло-узел.// ДАН СССР, 1974, т.219, 6, 1281-1284.

34. Афраймович В.С., Шильников Л.П., О достижимых переходах от систем Морса-Смейла к системам со многими периодическими движениями. // Известия АН СССР, серия мат., 1974, т.38, 6, 1248-1288.

35. Морозов А.Д., Шильников Л.П., К теории синхронизации колебаний. // Конф. по нелин. колеб. механ. систем, Киев, 1974, (тезисы доклада), 1с.

36. Шильников Л.П., Теория бифуркаций динамических систем и опасные границы. // ДАН СССР, 1975, т.223, 5, с.1046-1049.

37. Морозов А.Д., Шильников Л.П., К математической теории синхронизации колебаний.// ДАН СССР, 1975, т.223, 6, 1340-1343.

38. Морозов А.Д., Шильников Л.П., О синхронизации колебаний.// Изв. АН СССР Механика твердого тела, 1975, 5, 1340-1343.

39. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О возникновении и структуре аттрактора Лоренца.// ДАН СССР, 1977, т.234, 2, 336-339.

40. Шильников Л.П. Теория бифуркаций динамических систем с гомоклиническими кривыми Пуанкаре.// Труды 7 Междунар. конф. по нелин. колебаниям, 1977, 16с.

41. Афраймович В.С., Шильников Л.П., Принцип кольца в задаче взаимодействия двух автоколебательных систем.// ПММ, 1977, т.41, 4, 618-627.

42. Лукьянов В.И., Шильников Л.П., О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами.// ДАН СССР, 1978, т.243, 1, 26-29.

43. Шильников Л.П., Некоторые вопросы теории бифуркаций динамических систем.// Препринт НИРФИ,1972,58, 25с.

44. Лукьянов В.И., Шильников Л.П., О некоторых бифуркациях динамических систем с гомоклиническими структурами. // V Всесоюз. конф. по КТДУ, 1979, Кишинев (тезисы доклада), 1с.

45. Баутин Н.Н., Шильников Л.П., Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости состояний равновесия и периодических движений ("опасные"и "безопасные"границы.// Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980, 292 - 316.

46. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и модель Лоренца.// Дополнение II к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена “Бифуркация рождения цикла и ее приложения.” М., Мир, 1980, 317 - 336.

47. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О существовании устойчивых периодических движений в модели Лоренца.// УМН, 1980, т.35, в.4(214).

48. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и странные аттракторы. // IX Междунар. конф. по нелиным колебаниям, Киев, 1980, (тезисы доклада), 1с.

49. Шильников Л.П. Теория бифуркаций и квазигиперболические аттракторы.// УМН, 1981, т.36, в.4.

50. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П., О притягивающих негрубых множествах типа аттрактора Лоренца.// Труды ММО, 1982, т.44, с.150-212.

51. Афраймович В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях коразмерности один, приводящих к появлению счетного множества торов. // ДАН СССР, 1982, т.262, 4, с.777-780.

52. Афраймович В.С., Шильников Л.П., О простых бифуркациях, приводящих к появлению счетного множества торов. // Успехи мат. наук, 1982, т.37, 4, 1с.

53. Афраймович В.С., Шильников Л.П., Теория бифуркаций и хаос. // Школа по теор. физике, 1982, Кулебакино (тезисы доклада), 1с.

54. Афраймович В.С., Шильников Л.П., Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность.// Межвуз. сб. “Методы КТДУ”, Горький, 1983, 3-26.

55. V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, Strange attractors and quasiattractors.// “Nonlinear Dynamics and Turbulence”, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph (Boston,Pitmen), 1983.

56. Афраймович В.С., Лукьянов В.И., Шильников Л.П., Грубые состояния равновесия и периодические движения.// Методическое пособие 1, изд-во ГГУ, Горький, 1983, 35с.

57. Гонченко С.В., Шильников Л.П., О динамических системах с негрубой гомоклинической кривой. // Успехи мат. наук, 1983, т.38, 5, 1с.

58. Морозов А.Д., Шильников Л.П., О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым.// ПММ, 1983, т.47, 5, с.385-394.

59. Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой седлофокуса. // Успехи мат. наук, 1983, т.39, 4, 1с.

60. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и странные аттракторы. // Труды IX Междунар. конф. по нелиным колебаниям, Киев, 1984, т.2, 8с.

61. Гаврилов Н.К., Шильников Л.П.,О бифуркациях состояний равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. //Межвуз. сб. Методы КТДУ, Горький, 1984, 60-72.

62. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность.//(англ.) В кн. “Нелинейные и турбулентные процессы”, 1984, изд."Процесс 8с.

63. Беляков Л.А., Шильников Л.П., Гомоклинические кривые и сложные стационарные волны.// Межвузовский сб. “Методы КТДУ“, Горький, 1985, 22-35.

64. Шильников Л.П., О сложных стационарных волнах вблизи стационарной волны. // В кн. “Самоорганизация, автоволны и структуры”, 1985, из-во Шпрингер, 8с.

65. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла. // В кн. “Современные вопросы механики и технологическое машиностроение”, 1985, ч.II, 1с.

66. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность. // В кн. "Проблемы нелинейных и турбулентных процессов в физике Труды II Междунар. раб. группы / Под ред. А.С. Давыдова, В.М. Черноусенко. Киев: Наукова Думка, 1985, ч.2. 118-123.

67. Афраймович В.С., Гаврилов Н.К., Лукьянов В.И., Шильников Л.П., Основные бифуркации динамических систем. // Учебное пособие, 1985, Горький ,изд-во ГГУ, 88с.

68. Афраймович В.С., Лукьянов В.И., Шильников Л.П., Грубые состояния равновесия и периодические движения. II. // Метод.пособие, 1985, Горький, изд-во ГГУ, 27 с.

69. Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой седлофокуса.// Матем.сб., 1986, т.130, N 4(8), 557-574.

70. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и турбулентность - I.// Межвузовский сб. “Методы КТДУ”, Горький, 1986, 150-163.

71. Тураев Д.В., Шильников Л.П. Бифуркации квази-аттракторов тор-хаос. // В кн. “Матем. Механизмы турбулентности”, Киев, 1986, 9 с.

72. Гонченко С.В., Шильников Л.П., О динамических системах с негрубыми гомоклиничесеими кривыми. // ДАН СССР, т.286, N 5,1986 с.1049-1052.

73. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла. // VI Всесоюзная конференция, КТДУ, 1986, Иркутск (тезисы доклада), 1с.

74. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О разрушении инвариантных торов. // УМН, т.41, в.4, 1986, 1с.

75. Шильников Л.П., Бифуркации и хаос динамических систем. // 6-я Всесоюзня школа “Теорет. основы и конструирование численных алгоритмов решений задач мат. физики”, 1986, Горький (тезисы доклада), 1 с.

76. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла с отрицательной седловой величиной. // ДАН СССР, т.290, N 6,1986, с.1301-1305.

77. Арнольд В.И., Афраймович В.С., Ильяшенко Ю.С.,Шильников Л.П., Теория бифуркаций. // Итоги науки и техники, ВИНИТИ, монография в серии “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”, Москва, 1986, Динамические системы, т.5, 282 с.

78. Гонченко С.В., Шильников Л.П., Об арифметических свойствах топологических инвариантов систем с негрубой гомоклинической кривой. // УМЖ, 1987, т. 39, N 1, с.21-28.

79. Шильников Л.П., Теория бифуркаций и странные аттракторы. // Всесоюзная конференция Нелинейные колебания мех. систем, Горький, 1987 (тезисы доклада) ,1 с.

80. Тураев Д.В., Шильников Л.П., Гамильтоновы системы с гомоклиническими кривыми седла. // Всесоюзная конференция Нелинейные колебания мех. систем, тезисы доклада, Горький, 1987(тезисы доклада), 1с.

81. Лерман Л.М., Шильников Л.П., Гомоклинические структуры в бесконечномерных системах. // Сиб. мат. журнал, т.29, N 3, 1988 , с. 92-103.

82. Turaev D.V., Shilnikov L.P., On Hamiltonian systems with homoclinic orbits of a saddle. // in book: Nonlinear and turbulent processes in physics, Naukova Dumka, 1988, pp. 148 - 151.

83. Елеонский В.М, Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О классификации самолокализованных состояний электромагнитного поля в нелинейной среде. // Межвуз. сб. Методы КТДУ, Горький, 1988, с.49-57.

84. Лерман Л.М., Шильников Л.П., Гомоклинические структуры в бесконечномерных пространствах. // III Уральская конф. функ. диф. ур., Пермь, 1988 (тезисы доклада), 1 с.

85. Бирагов В.С., Шильников Л.П., О бифуркации петли седло-фокуса в трехмерной консервативной динамической системе.// “Методы качественной теории и теории бифуркаций”, Горький, 1989, 25-34.

86. Ахмедиев И.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Шильников Л.П., Стационарные импульсы в нелинейном двулучепреломляющем волокне. Процессы размножения солитонов. // Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, вып. 15, 19-23.

87. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О классификации самолокализованных состояний электромагнитного поля в нелинейной среде.// ДАН СССР, 1989, т. 309, 4, 848-851.

88. Бирагов В.С., Шильников Л.П., О структуре окрестности гомоклинической траектории неподвижной точки. // VII Всесоюзная конференция по КТДУ, Тезисы доклада, Рига, 1989, 1 с.

89. Бирагов В.С., Шильников Л.П., О структуре окрестности гомоклинической траектории двукратной неподвижной точки. // Всесоюзн. конф. Соврем. проблемы механики и технологии машиностроения, Тезисы докл., Москва, 1989, 1 с.

90. Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса. // VII Всесоюзная конференция по КТДУ, Тезисы доклада, Рига, 1989, 1 с.

91. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла. // ДАН СССР, т. 304, 4, 1989, с. 811-814.

92. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О гамильтоновых системах с гомоклиническими кривыми седла. // УМН, т. 44, вып. 4, 1989, 1 с.

93. Лерман Л.М., Шильников Л.П., О бесконечномерных системах с гомоклинической траекторией седла. // сб. "Динамические системы и турбулентность", 1989 , Киев, с.83-86.

94. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О векторных солитонах в системе двух связанных нелинейных уравнений Шредингера. // Конф. "Волновые процессы и технологии", Горький, 1989 (тезисы доклада), 1 с.

95. Ахмедиев И.Н., Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Шильников Л.П., Стационарные импульсы в нелинейном двулучепреломляющем волокне. Процессы размножения солитонов. // Письма в ЖТФ, 1989, т. 15, вып. 15, с.19-23.

96. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О классификации самолокализованных состояний электромагнитного поля в нелинейной среде. // ДАН СССР, т. 309, 4, с.848-851.

97. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О классификации самолокализованных состояний электромагнитноного поля в нелинейной среде. // Труды IV Междунар.конф. по нелин.процессам и турбул., Киев, 1989, с.235-238.

98. Шильников А.Л., Шильников Л.П., О несимметричной модели Лоренца. // Труды IV Междунар.конф. по нелин.процессам и турбул., Киев, 1989, с.428-431.

99. Елеонский В.М., Ахмедиев И.Н., Кулагин Н.Е., Шильников А.Л., Стационарные импульсы в нелинейном двулучепреломляющем оптическом волокне. Процессы размножения солитонов. // Труды IV Междунар.конф. по нелин.процессам и турбул., Киев, 1989, с.26-29

100. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Королев В.Л., Шильников Л.П., Бифуркации векторных солитонов огибающих и интегрируемость гамильтоновых систем.// сб. "Методы качеств. теории и теории бифуркаций", Н.Новгород, 1990, 123-137.

101. Гонченко С.В., Шильников Л.П., Инварианты Ω-сопряженности диффеоморфизмов с негрубой гомоклинической траекторией. // УМЖ, 1990, т. 42, вып. 2, с.153-160.

102. Елеонский В.М., Королев Г.Л., Кулагин Н.Е., Шильников Л.П., Бифуркации гомоклинических петель гамильтоновой системы, порожденной связанными нелинейными уравнениями Шредингера.// II конф. "Нелин. колеб. механич.систем 1990 (тезисы доклада), 1 с.

103. Овсянников И.М., Шильников Л.П., Системы с гомоклинической кривой седло-фокуса.// II конф. "Нелин. колеб. механич.систем 1990 (тезисы доклада), 1 с.

104. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Королев В.Л., Шильников Л.П., Бифуркации ветвления векторных солитонов огибающих.// Письма в ЖТФ, т. 17, вып. 2, 1991, 786-793.

105. Елеонский В.М., Кулагин Н.Е., Королев В.Л., Шильников Л.П., Ветвление векторных солитонов и интегрируемость гамильтоновых систем.// ЖЭТФ, 1991, т. 99, вып. 4, 1113-1120.

106. Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой многомерного седло-фокуса и спиральный хаос.// Матем.сб., 1991, No.7, 1043-1073.

107. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. // ДАН СССР, 1991, т. 320, 2, с. 269-272.

108. Шильников А.Л., Шильников Л.П., Бифуркации и хаос в несимметричной модели Лоренца. // сб. “Методы качеств. теории и теории бифуркаций”,Н.Новгород, 1991, с.85-96.

109. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. // сб. “Методы качеств. теории и теории бифуркаций”,Н.Новгород, 1991, с.36-60.

110. Shilnikov L.P. Multidimensional Hamiltonian Chaos.// Int.J. Chaos, 1991, v. 1, N 2, 134-136.

111. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., On a non-symmetric Lorenz model.// Int. J. Bifurcation and Chaos, v. 1, N 4, 1991, 773-776.

112. Елеонский В.М., Королев Г.Л., Кулагин Н.Е, Шильников Л.П., О качественном и численном анализе гомоклинических петель в гамильтоновых системах. // in book: Optical Solitons, 1992, World Scientific, 8 с.

113. Елеонский В.М., Королев Г.Л., Кулагин Н.Е, Шильников Л.П., Ветвление пакетов векторных солитонов. // in book: Optical Solitons, 1992, World Scientific, 8 с.

114. Елеонский В.М., Королев Г.Л., Кулагин Н.Е, Шильников Л.П., Stationary pulses in a nonlinear birefringent optical fiber processes of soliton reproduction. // Proc. of Eur. Quantum Electr.conf., NOT up 38, 1991, с.142-143.

115. Афраймович В.С., Лукьянов В.И., Шильников Л.П., О структуре окрестностей грубых состояний равновесия. // Метод.пособие, изд-во ГГУ, Горький, 1991 35с.

116. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О динамических явлениях в многомерных системах с негрубыми гомоклиническими кривыми. // Дифф.уравн., 1992, т. 28, 12, 1 с.

117. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Модули эквивалентности с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. // Дифф.уравн., 1992, т. 28, 12, 1 с.

118. Гонченко С.В., Шильников Л.П., О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. // Изв. РАН, сер. матем., 1992, т. 56, 6, с.1165-1197.

119. Елеонский В.М., Королев Г.Л., Кулагин Н.Е, Шильников Л.П., Bifurcations of the trajectories at the saddle level in a Hamiltonian system generated by two coupled Schrodinger equations. // Chaos, 1992, v. 2, N 4, c.571-579.

120. Lerman L. Shilnikov L. Homoclinical Structures in Nonautonomous Systems: Nonautonomous Chaos. // Chaos: Interdisc. J. Nonlinear Sci., 1992, v.2, No.3, 447-454.

121. Шашков В.М., Шильников Л.П., Теорема существования и единственности неявной функции в банаховых пространствах. // Метод.разработка, ВМК, ННГУ, 1992, 51 с.

122. A.L.Shilnikov, L.P. Shilnikov, D.V.Тураев, Normal forms and Lorenz attractors.// Int.J. Bifurcation and Chaos, v. 3, N5, 1993, 1123-1139.

123. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., О существовании областей Ньюхауса вблизи систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре (многомерный случай).// Докл. РАН, т. 329, 1993, 404-407.

124. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Динамические явления в системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре.// Доклады РАН, т. 330, 2, 1993, 144-147.

125. Shilnikov L.P., Mathematical problems of dynamical chaos.// "Dynamic of Systems", 1993, 163-170

126. Shilnikov L.P., Contemporary problems of dynamical chaos.// Int.Workshop "Non-linear Dynamics of Electronics Systems", Dresden, 1993, 12 c.

127. Shilnikov L.P., Strange attractors and dynamical models. // J. of Circuits, Systems and Computers, 1993, v. 3, N 1, 1-10.

128. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Динамические явления в системах с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре. // III конф. "Нелин. колебания мех.сист.", Н.Новгород, 1993 (тезисы доклада), 1 с.

129. Тураев Д.В., Шильников А.Л., Шильников Л.П., Нормальные формы и аттракторы Лоренца.// III конф. "Нелин. колебания мех.сист.", Н.Новгород, 1993 (тезисы доклада), 1 с.

130. Шашков М.В., Шильников Л.П., О существовании гладкого слоения в аттракторах Лоренца. // Дифф.уравн., 6, 1993, с.1092.

131. Елеонский В.М., Королев Г.Л., Кулагин Н.Е, Шильников Л.П., Homoclinic orbits and the Bifurcations in dynamical systems with 2 degrles of freedom: methods of qualitatiwe and numerical analysis. // Int.J. Bifurcation and Chaos, v. 3, N 2, 1993, c.385-397

132. Shilnikov L.P., Chua's Circuit: Rigorous result and future problems. Цепи Чуа: строгие результаты и будующие проблемы. // Int.Symp. on Nonlinear Theory and Applications, Hawaii, 1993, 4 c.

133. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., On models with nonrough Poincare homoclinic curves. // Physica D, v. 62, 1993, 1-14.

134. Shilnikov L.P., Strange attractors and dynamical models. // J. of Circuits, Systems and Computers, v. 3, N 1, 1993, c.1-10.

135. Шашков М.В., Шильников Л.П., О существовании гладкого слоения у отображений Лоренцевского типа.. // Дифф. уравнения, т.30, N4, 1994, с.586-595.

136. Shilnikov L.P., Chua's Circuit: Rigorous result and future problems. // Int.J. Bif. and Chaos, v.4, N3, 1994, pp. 489-519.

137. Eleonsky V.M., Kulagin N.E., Korolev G.V., Shilnikov L.P.,Dynamical system in the theory of nonlinear waves with allovance for nonlocal integrations (the Whitham - Benjamin equation). // Chaos, v.4, N2, 1994, pp.377-384.

138. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О катастрофах голубого неба. // УМН, т.49, вып.4 (298), 1994, с.93.

139. Shilnikov L.P., On the Poincare maps arising in the problems of global bifurcations. // The School-Conf.: Diff.Eq: Bifurcation and Chaos, Katsivelli, 1994, book of abstr., 1 c.

140. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., On the Structure of nonwandering Sefts of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies. // in book: Chaos and Nonlinear Mechanics: Proc. of Eurumech Colloquium 308, "Chaos and Noise in Dynamical Systems", 1994, World Scientific, pp.16-29.

141. Shilnikov L.P., Maps arising in the problems of global bifurcations. // Int. School-Conf. DEBS-94, Differ. Eq.: Bifurcation and Chaos, Kiev, 1994, book of abstr., 1 c.

142. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О катастрофах голубого неба.// Докл.РАН, 1995, т.342, вып.5, 596-599.

143. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., On geometrical properties of two-dimensional diffeomorphisms with homoclinic tangencies. // Int.J. Bifurcation and Chaos, v.5, 1995, c.819-82.

144. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Dangerous and Safe Stability Boundaries of Equlibria and periodic Orbits. // Proc. 3d Int. Workchop of Nonlinear Dynamics of Electronics System (NDES 1995), Dublin, pp.55-65.

145. Shilnikov L.P., Homoclinic Chaos. // Abstr. of Int. Conf. on Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complecx Systems, Zakopane, 1995, 1 c.

146. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О катастрофах голубого неба. // Дифф.уравнения, N12 , 1995, 1 с.

147. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Dynamical phenomena in systems with structurally unstable Poincare homoclinic orbits.// Int.J. Chaos, 1996,v.6, N1, 15-31.

148. Шильников Л.П., Странные аттракторы. // Abstr.of Int. Conf. Contemporary problems in theory of dynamial systems (CPTDS'96), 1996, N.Novgorod, 1 c.

149. Shilnikov L.P., An example of wild strange attractor. // European Conf. on Iteration Theory, 1996, Urbino, Italy, 4 c.

150. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Bifurcation of two-dimensional diffeomorphisms with nonrouch homoclinic contours. // Int.J.of Technical Physics (Polish Academy of Science), 1996, v.37, N3-4, pp.349-352.

151. Shilnikov L.P., Homoclinic Chaos. // Int.J.of Technical Physics (Polish Academy of Science), 1996, v.37, N3-4, pp.119-143.

152. Тураев Д.В., Шильников Л.П., Пример дикого странного аттрактора. // IV конф. "Нелин. колебания механич.систем", 1996, Н.Новгород,(тезисы доклада; англ.),1 с.

153. Shilnikov L.P., Turaev D.V., On Simple Bifurcations Leading to Hyperbolic Attractors. // Int. J. "Computers & Mathematics with Appl.", 1997 ,v.34, N 2-4, 173 - 193.

154. Shilnikov L.P., Turaev D.V., Superhomoclinic orbits and multipulse homoclinic loops in Hamiltonian systems with discrete symmetries. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, Т.2, N 3-4, 126-138.

155. Shilnikov L.P., Homoclinic chaos. // in book: "Nonlinear Dynamics, Chaotic and Complex Systems", Cambridge University Press, 1997, pp. 39-63.

156. Стенькин О.В., Шильников Л.П., О бифуркациях периодических движений вблизи негрубой гомоклинической кривой. // Дифф. уравнения, 1997, т 33, N 3, с 377-384.

157. Shilnikov L.P., Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics: A Tutoraial. // J. Franklin Inst., Elsevier Science Ltd, Pergamon., 1997, v. 334, N5/6, pp. 793 - 864.

158. Gonchenko S.V., Stenkin O.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Bifurcations of systems with structurally unstabile homoclinic orbits and moduli of Ω-equivalence. // Int. J. "Computers and Mathematics with Applications", 1997, v.34, N 2-4, pp.111 - 142.

159. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Quasiattrctors and homoclinic tangencies. // Int. J. "Computers and Mathematics with Applications", 1997, v.34, N 2-4, pp.195 - 227.

160. Алексеева С.А., Шильников Л.П., О бифуркациях периодических движений в системах с гомоклинической петлей седло-фокуса. // Дифф. уравнения, 1997, т 33, N 4, с 440-447.

161. Гонченко С.В., Шильников Л.П., О двумерных аналитических сохраняющих площадь диффеоморфизмах со счетным множеством устойчивых эллиптических периодических точек. // Регулярная и хаотическая динамика, 1997, Т.2, N 3-4, с.106-123.

162. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Об областях Ньюхауса двумерных диффеомрфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром.// Труды МИ РАН им. Стеклова, 1997, т.216, с.76-125.

163. Стенькин О.В., Шильников Л.П., Гомоклинический Ω-взрыв и области гиперболичности.// Матем.сб., 1998, т.189, N4, 127-144.

164. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Elliptic periodic orbits near a homoclinic tangency in four-dimensional symplectic maps and Hamiltonian systems with three degree of freedom.// Regular and Chaotic Dynamics, 1998, v.3, N4, 3-26.

165. Тураев Д.В., Шильников Л.П., Пример дикого странного аттрактора.// Матем. сборник, 1998, т.189, N2, 137-160.

166. Гонченко С.В., Шильников Л.П., Об интервалах Ньюхауса семейств двумерных диффеоморфизмов, близких к диффеоморфизму с негрубым гетероклиническим контуром. // УМН, т.53, 1998, вып.4(322), с.206.

167. Shilnikov L.P., Bifurcations and strange attractors. // Int. Conf. Dedicated to 90th Anniversary of L.S.Pontryagin, Moscow, 1998, book of abstr., p.104.

168. A.L.Shilnikov, L.P. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, Methods of Qualitative theory in nonlinear Dynamics. // World Scientific; Part 1, 1998, 412c.[Русский перевод – Шильников А.Л., Шильников Л.П., Тураев Д.В., Чуа Л., Методы качественной теории в нелинейной динамике. // Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований; Часть 1, 2004, 416 с.]

169. Shilnikov L.P., Mathematical problems of nonlinear dynamics: a Tutorial. // in book: Visions of Nonlinear Sciences in the 21st Century, 69-156. World Scientific. 1999.

170. Шильников Л.П., Псевдогиперболические аттракторы. // 5-я межд. конф. “Нелинейные колебания механических систем”, 1999, тезисы докладов, с.236.

171. Шильников Л.П., Леонтович-Андронова Евгения Александровна. // Сб. <Личности в науке. Женщины-ученые Нижнего Новгорода>, Изд. ННГУ, 1999.

172. Shilnikov L.P., Evgeniya Aleksandrovna Leontovich-Andronova. // Methods of Qualitative Theory of Dufferential Equations and Related Topics, AMS Translations, Ser.2, 2000, V. 200 (Advances in Mathematical Sciences).

173. Alekseeva S.A., Shilnikov L.P., On Cusp-Bifurcations of Periodic Orbits in Systems with a Saddle-Focus Homoclinic Curve.// Methods of Qualitative Theory of Dufferential Equations and Related Topics, AMS Translations, Ser.2, 2000, V. 200 (Advances in Mathematical Sciences), 23-34.

174. Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., On two-dimensional area-preserving diffeomorphisms with infinitely many elliptic islands. // Journal of Statistical Physics, 2000, Vol. 101, No. 1, 321-356.

175. Shilnikov L.P., Turaev D.V., A New Simple Bifurcation of Periodic Orbit of «Blue Sky Catastrophe» Type. // Methods of Qualitative Theory of Dufferential Equations and Related Topics, AMS Translations, Ser.2, 2000, V. 200 (Advances in Mathematical Sciences), 165-188.

176. Гонченко С.В., Шильников Л.П., О двумерных сохраняющих площадь отображениях с гомоклиническими касаниями.// Доклады РАН, 2001, Т.378, No.6, 727-732.

177. Shilnikov L.P., A.A. Andronov and the Theory of Dynamical Systems. // Int. Conf. “Progress in nonlinear science”, 2001, book of abstracts, p.5.

178. Shilnikov L.P., On analytic symplectic maps with infinitely many elliptic periodic points. // Int. Conf. “Differential Equations and Related Topics” dedicated to the 100-th Anniversary of I.G. Petrovskii, 2001, book of abstracts, pp.380-381.

179. A.L.Shilnikov, L.P. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, Methods of Qualitative theory in nonlinear Dynamics. // World Scientific; Part 2, 2001, 577c. [Русский перевод – Шильников А.Л., Шильников Л.П., Тураев Д.В., Чуа Л., Методы качественной теории в нелинейной динамике. // Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований; Часть 2, 2009, 546 с.]

180. Shilnikov L.P., Bifurcations and Strange Attractors. // Proc. Int. Congress of Mathematicians, Beijing (China), August 29-28 2002 (Invited Lectures). - 2002. - Vol.3, 349-372

181. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Stenkin O.V. On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori. //Proceedings of the Int. Conf. “Progress in Nonlinear Scienc”, dedicated to the 100th Anniversary of A.A. Andronov, v. 1, 2002, 80-102.

182. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., On two-dimensional area-preserving maps homoclinic tangencies that have infinitely many generic elliptic periodic points. // Записки научных семинаров ЛОМИ, 2003, Т.300, 155-166.

183. Shilnikov L.P., Bifurcations and strange attractors. //arXiv preprint math/0304457, 2003.

184. Шильников Л.П., Гомоклинические траектории: от Пуанкаре до наших дней. // В книге: Математические события XX века. Изд.ФАЗИС, Москва.- 2003, 466-489.

185. Shilnikov A., Shilnikov L., Turaev D., On some mathematical topics in classical synchronization. A tutorial.// Int.J.of Bifurcation and Chaos.- 2004, v.14, No.7, 2143-2160.

186. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Existence of infinitely many elliptic periodic orbits in four-dimensional symplectic maps with a homoclinic tangency. // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics-Interperiodica Translation, 2004, Vol. 244, 106-131.

187. Гонченко С.В., Тураев Д.В., Шильников Л.П., Существование счетного множества эллиптических периодических траекторий у четырехмерных симплектических отображений с гомоклиническим касанием.// Труды МИРАН, 2004, Т.244, 115-142.

188. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P. and Turaev D., Blue sky catastrophe in singularly perturbed systems. // Moscow Math. J., 2005, 5(1), 205-218.

189. Тураев Д.В., Шильников А.Л., Шильников Л.П., Некоторые математические проблемы классической синхронизации.// Труды школы “Нелинейные волны 2004”, 2005, 426-449.

190. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., On two-dimensional area-preserving maps with homoclinic tangencies that have infinitely many generic elliptic periodic points. //Journal of Mathematical Sciences, 2005, Vol. 128, No. 2, 2767-2773.

191. Shilnikov L.P. Poincaré Homoclinic Orbits: The State of the Art. // Int. Conf. “Dynamics, Bifurcations and Chaos”, Nizhny Novgorod, Russia, 2005, Jan. 31 - Feb. 4, book of abstracts, p.7.

192. Гонченко С.В., Стенькин О.В., Шильников Л.П., О существовании счетного множества устойчивых и неустойчивых инвариантных торов у систем из областей Ньюхауса с гетероклиническими касаниями. //Нелинейная динамика, 2006, т. 2, No. 1, 3-25.

193. Шильников Л.П., Псевдогиперболичность и странные аттракторы спирального типа. // Межд. конф. по дифф. уравнениям и динамическим системам, Суздаль, 10-15 июля 2006, тезисы докладов, с.228-229.

194. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., Homoclinic tangencies of arbitrarily high orders in conservative and dissipative two-dimensional maps. // Nonlinearity, 2007, Vol. 20, No. 2, 241.

195. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Shilnikov bifurcation. // Scholarpedia, 2007, Vol. 2, No. 8, 1891.

196. Гонченко С.В., Шильников Л.П. Гомоклинические касания. // Монография (сборник статей), 2007, НИЦ “Регулярная и Хаотическая Динамика”, Москва-Ижевск, 523 с.

197. Шильников Л.П., Гомоклинические траектории: от Пуанкаре до наших дней. // Математика в высшем образовании, 2007, 5, 75-94.

198. Гонченко В.С., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической петли к седло-фокусу индекса 1/2. // Доклады Академии Наук, 417(6), 2007.

199. Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Shilnikov saddle-node bifurcation. // Scholarpedia, 2008, Vol. 3, No. 4, 4789.

200. Тураев Д.В., Шильников Л.П., Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа. // Доклады Академии Наук, 2008, 418(1).

201. Gonchenko S.V., Turaev D.V., Shilnikov L.P., On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions. // Nonlinearity, 2008, Vol. 21, No. 5, 923-972.

202. Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V., On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors. // Regular and Chaotic Dynamics, 2009, Vol. 14, No. 1, 137-147.

203. Gonchenko S.V., Gonchenko V.S., Shilnikov L.P, On a homoclinic origin of Henon-like maps. // Regular and Chaotic Dynamics, 2010, Vol. 15, No. 4, 462-481.

204. Шильников Л.П., Бифуркация. // Статья из электронной энциклопедии. http://www2.gsu.edu/ matals/lp/lp_papers/Энциклоп1401.doc

205. Шильников Л.П., Бифуркации и странные аттракторы. // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, No. 4-2.

206. Barrio R., Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Kneadings, symbolic dynamics, and painting Lorenz chaos. a Tutorial. // J. Bifurcations and Chaos, 2012, Vol. 22, No. 4, 1230016.

207. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П. К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений. // Нелинейная Динамика, 2012, т. 8, No. 1, 3-28.

208. Shilnikov A., Shilnikov L., Barrio R., Symbolic dynamics and spiral structures due to the saddle-focus bifurcations. // Chaos, CNN, Memristors and Beyond: A Festschrift for Leon Chua (With DVD-ROM, Composed by Eleonora Bilotta). Edited by Adamatzky Andrew et al. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2013. ISBN 9789814434805, 2013, 428-439.

209. Afraimovich V.S., Shilnikov L.P., Symbolic Dynamics in Multidimensional Annulus and Chimera States. // International Journal of Bifurcation and Chaos, 2014, Vol. 24, No. 08, 1440002.

210. Shilnikov A.L., Shilnikov L.P., Turaev D.V., Showcase of Blue Sky Catastrophes. // Int. Journal of Bifurcation and Chaos, 2014, Vol. 24, No. 8, 1440003.