НИЖЕГОРОДСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО

На правах рукописи

ТУРАЕВ Дмитрий Владимирович

О БИФУРКАЦИЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ДВУМЯ ГОМОКЛИНИЧЕСКИМИ КРИВЫМИ СЕДЛА

Специальность 01.01.02 - дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Шильников Л.П.

НИЖНИЙ НОВГОРОД, 1991

О Г Л А В Л Е Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

Одной из актуальных задач теории динамических систем является объяснение и исследование явления динамического хаоса. С точки зрения качественной теории универсальным критерием хаоса служит наличие грубой гомоклинической кривой Пуанкаре. Соответственно этому одним из важнейших инструментов исследования сложной динамики является изучение глобальных бифуркаций. К их числу относятся бифуркации негрубых гомоклинических кривых Пуанкаре, бифуркации гомоклинической петли седлофокуса, бифуркации гомоклинических траекторий негрубых состояний равновесия и периодических движений, бифуркации гомоклинических контуров с несколькими состояниями равновесия или периодическими движениями, бифуркации букетов гомоклинических кривых и т.д. Особый интерес здесь представляет задача о бифуркациях букета из двух гомоклинических кривых седлового грубого состояния равновесия. Это явление встречается в модели Лоренца [5-7], в различных моделях из гидродинамики, радиофизики, теории лазеров, теории неравновесной плазмы и т.д. (см. [8-13], [17-20], [48]). Отметим, что этой задаче посвящён ряд теоретических и численных исследований.

Известно, [1, 2, 4], что системы с гомоклинической кривой седлового состояния равновесия бывают двух принципиально различных типов. Для систем первого типа характерно рождение одного периодического движения при расщеплении гомоклинической петли, для систем второго типа (случай седлофокуса с положительной седловой величиной) - наличие сложной динамики и многообразие бифуркационных явлений. В настоящей работе рассматриваются бифуркации систем с двумя гомоклиническими кривыми седла первого типа.

Пусть динамическая система X имеет грубое седловое состояние равновесия O и две гомоклинические к O траектории: Γ_1 и Γ_{-1}. Не уменьшая общности, можно считать, что ближайший к мнимой оси корень γ характеристического уравнения системы в O имеет положительную часть, т.е. седловая величина отрицательна. Системы первого типа выделяются условием [2, 4], что γ действителен, некратен, и что остальные корни характеристического уравнения лежат дальше от мнимой оси, чем γ. При этом неустойчивое многообразие W^u точки O делится неведущим подмногообразием W^{uu} на две области. Будем предполагать, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в W^{uu}. Тогда либо Γ_1 и Γ_{-1} лежат обе в одной из этих областей и выходят из O, касаясь друг друга, либо они лежат в разных областях и выходят из O в противоположных направлениях.

Соответственно тому, будет ли вещественным или мнимым λ - ближайший к мнимой оси корень характеристического уравнения с отрицательной действительной частью, будем называть O седлом или седлофокусом. В случае седла траектории Γ_1 и Γ_{-1} могут входить в O также либо касаясь, либо с противоположных направлений. Таким образом, мы сталкиваемся с различными вариантами поведения гомоклинических траекторий и их взаимного расположения:

I) Первый случай (см. рис. I), когда Γ_1 и Γ_{-1} и входят в седло и выходят из седла с противоположных направлений - т.н. "восьмерка" - встречается уже в двумерных динамических системах. Для конкретных систем на плоскости он рассматривался в [17, 18].

2) Второй случай (см. рис. 2) гомоклиническая "восьмерка"

рис. 1.

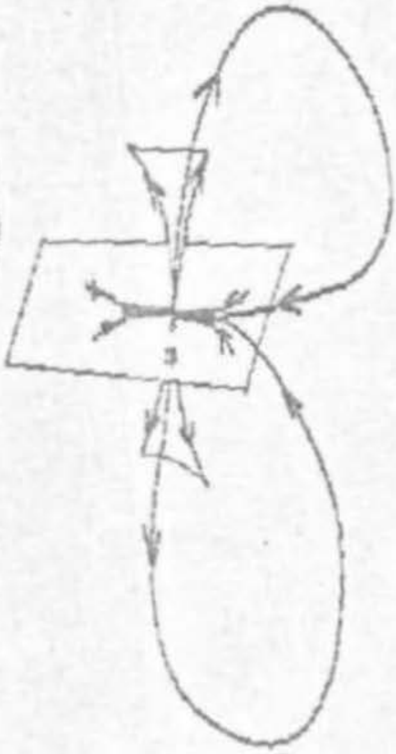


рис. 3

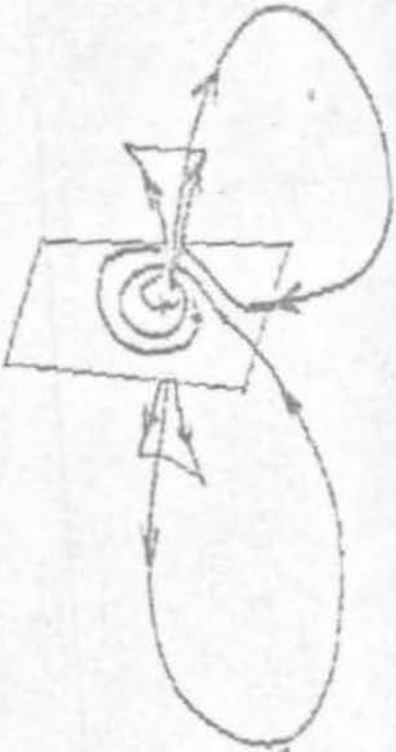


рис. 2

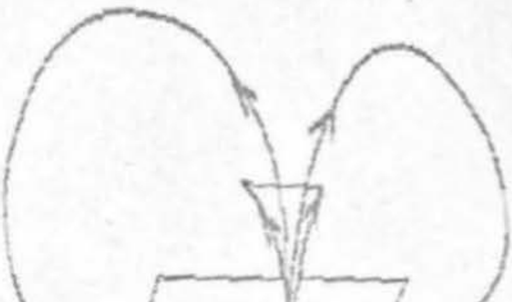


рис. 4.

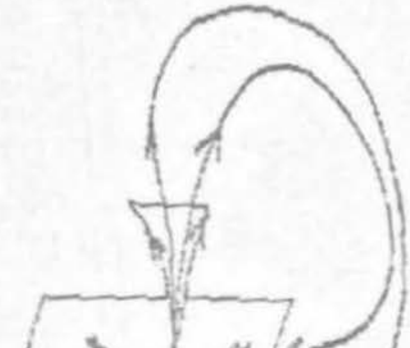


рис. 5

рис. 6

седлофокуса с отрицательной седловой величиной. В теоретическом плане этот случай частично рассматривался в [15].

3) Третий случай (см. рис. 3, 4), когда гомоклинические траектории с одной стороны подходят к седлу, касаясь друг друга, а с другой стороны - с противоположных направлений, - т.н. "бабочка". Он вызвал наибольший интерес исследователей, в основном в связи с моделью Лоренца. Частично рассматривался в [14,21,22].

4) Четвертый случай - другая конфигурация типа "бабочка" (рис. 5) - встречается только в системах размерности четыре и выше и ранее никем не изучался.

Все множество различных конфигураций можно разбить на два класса: к первому классу относятся букеты, в которых гомоклинические траектории выходят из седла в противоположных направлениях (рис. I-3), ко второму - букеты, в которых гомоклинические траектории выходят из седла, касаясь друг друга (рис. 4-6). Для систем первого класса в настоящей работе показано, что при возмущении таких контуров рождается один или два предельных цикла, либо одна или две многообходных гомоклинических кривых седла, либо гомоклиническая кривая седла и предельный цикл, либо квазиминимальное множество. Изучена структура возникающих здесь квазиминимальных множеств, показано, что они топологически эквивалентны квазиминимальным множествам т.н. специального потока Черри [23, 31] на двумерном торе и естественным инвариантом служит число вращения. На языке рядов Фэри [32] построена классификация рождающихся предельных циклов и гомоклинических петель по характеру их вложения в окрестность исходного гомоклинического контура. Для двупараметрических семейств общего положения построены бифуркационные диаграммы (рис. 9-I5).

Для систем второго класса для случая седла (рис. 4 и 5) показано, что бифуркационное множество содержит канторовский пучок бифуркационных кривых (рис. 16-21). В секторах, ограниченных бифуркационными кривыми, неблуждающее множество состоит из седла, гиперболического множества, эквивалентного надстройке над ТМЦ с конечным числом состояний [47] и траекторий, α - предельных к гиперболическому множеству и ω - предельных к седлу. На бифуркационных кривых построено описание неблуждающего множества на языке нидинг-инвариантов [33-37].

Кроме того в работе получен ряд вспомогательных результатов, из которых самостоятельное значение имеют доказательство существования инвариантного C^1 - многообразия для гомоклинической кривой седла, а также получение оценок любой степени точности для поведения решений системы дифференциальных уравнений вблизи седла.

По материалам диссертации опубликованы работы [38-41], основные результаты докладывались в [42-46]. Перейдем к подробному изложению результатов. Работа состоит из трех глав и приложения.

Глава I носит вспомогательный характер: в ней производится сведение задачи к исследованию некоторого отображения на секущей. Параграф I посвящен первому шагу на пути такого сведения - построению оценок для поведения траекторий динамической системы вблизи седла.

В § 2 построены оценки для отображения по траекториям динамической системы вблизи одной гомоклинической кривой седла (теорема I.2.I). Эта теорема носит стандартный характер (см. [2,28]), новым здесь является то, что ограничения, которые обычно накладываются на систему в виде требования неравенства нулю некоторых величин, формулируются инвариантным образом, как условия трансверсальности некоторых подпространств в касательном пространстве. Мы не будем здесь приводить громоздкие формулы из теоремы I.2.I, воспроизведем только лемму I.2.I, необходимую для дальнейшего изложения.

Рассмотрим семейство C^r - гладких $(r \geq 3)$ динамических систем X_μ заданных на гладком $(d^s + d^u)$ - мерном многообразии и гладко зависящих от некоторого набора параметров μ. Предположим, что X_μ имеет грубое состояние равновесия O типа седло с d^s - метрным устойчивым и d^u - мерным неустойчивым многообразиями - W^s_μ и W^u_μ. Пусть $\lambda_i(\mu)$, $\gamma_j(\mu)$ $(i=1,\dots,d^s;\ j=1,\dots,d^u)$ - корни характеристического уравнения системы в седле, $Re\,\lambda_{d^s}(0) \leq \dots \leq Re\,\lambda_1(0) < 0 < Re\,\gamma_1(0) \leq \dots \leq Re\,\gamma_{d^u}(0)$. Пусть d^{ls} - размерность устойчивого ведущего подпространства то есть, более точно, d^{ls} - такое целое, что $Re\,\lambda_1(0) = \dots = Re\,\lambda_{d^{ls}}(0) > Re\,\lambda_{d^{ls}+1}(0)$. Аналогично определим d^{lu} - размерность неустойчивого ведущего подпространства. Введем в окрестности V_0 седла координаты (x, y, u, v) так, чтобы уравнение W^s_μ было $(u=0,\ v=0)$, $W^u_\mu - (x=0,\ y=0)$, $(d^s - d^{ls})$ - мерного устойчивого неведущего многообразия $W^{ss}_\mu - (x=0,\ u=0,\ v=0)$, $(d^u - d^{lu})$ - мерного неустойчивого неведущего многообразия $W^{uu}_\mu - (x=0,\ y=0,\ u=0)$.

Обозначим через (dx, dy, du, dv) координаты в касательном пространстве.

Лемма I.2.I. Динамическая система $\tilde{X}_\mu$, индуцированная в касательном расслоении системой X_μ, имеет единственные инвариантные C^{r-1} - многообразия W^-_μ, W^+_μ, W^{--}_μ, W^{++}_μ, выделяемые тем, что в V_0 они задаются уравнениями: $W^+_\mu : \left\{ u=0,\ v=0,\ dv = H^+_\mu(x,y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ du \end{pmatrix} \right\}$, $W^-_\mu : \left\{ x=0,\ y=0,\ dy = H^-_\mu(u,v)\begin{pmatrix} dx \\ du \\ dv \end{pmatrix} \right\}$, $W^{++}_\mu : \{ u=0,\ v=0,\ du=0,\ dv=0,\ dx = H^{++}_\mu(x,y)\,dy$

$W_\mu^{--}: \{x=0, y=0, dx=0, dy=0, du=H_\mu^{--}(u,v)\,dv\}$,
где $H_\mu^{+}(0,0)=0$, $H_\mu^{-}(0,0)=0$, $H_\mu^{++}(0,0)=0$, $H_\mu^{--}(0,0)=0$.

В § 3 проводится редукция задачи о бифуркациях систем с двумя гомоклиническими кривыми седла к задаче меньшей размерности для случая, когда гомоклинические траектории выходят из седла в противоположных направлениях. Пусть $X_{\mu_1,\mu_{-1}}$ – двупараметрическое семейство динамических систем класса C^3, имеющих состояние равновесия O типа седло с d^s - мерным устойчивым и d^u - мерным неустойчивым многообразиями. Предположим, что в обозначениях § 2 $d^{lu}=1$, то есть $\gamma_1(\mu)$ вещественно и $\gamma_1(\mu)<\mathrm{Re}\,\gamma_2(\mu)$. Предположим, что при $\mu=0$ многообразия W_0^s и W_0^u пересекаются по двум гомоклиническим кривым Γ_1 и Γ_{-1}, не лежащим в W_0^{uu} и выходящим из O в противоположных направлениях. Предположим также, что для любой точки на Γ_1 или на Γ_{-1} касательная к W_0^u пересекается с отвечающим данной точке слоем многообразия W_0^+ трансверсально.

Пусть V – малая окрестность контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$.

Теорема I.3.I. Система X_μ имеет отталкивающее инвариантное (d^s+1) - мерное C^1- многообразие M_μ^+ такое, что: I) $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O \subset M_0^+$, 2) касательное расслоение над M_μ^+ содержит W_μ^+, 3) любая траектория, не лежащая в M_μ^+, покидает V за конечное время. В случае, когда седловая величина $\sigma=\mathrm{Re}\,\lambda_1(\mu)+\gamma_1(\mu)$ отрицательна M_μ^+ определяется единственным образом, при этом при $\mu=0$ M_μ^+ является устойчивым многообразием контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$ в том смысле, что любая траектория из M_0^+ стремится к $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$ при $t \to +\infty$.

Замечание I. Предположим, что в ситуации теоремы I.3.I

$d^{ls}=1$ ($\lambda_1(\mu)$ - вещественно), Γ_1 и Γ_{-1} входят в O навстречу друг другу, касаясь устойчивого ведущего направления, и касательная к W_0^s на Γ_1 и Γ_{-1} трансверсальна слоям многообразия W_0^- (что эквивалентно неравенству нулю т.н. "сепаратрисных величин" A_1 и A_{-1} (см. формулы (1.2.25) или (I.2.3)). Тогда применение теоремы I.3.I. к системе, полученной из X_μ обращением времени, показывает наличие у X_μ в V притягивающего (d^u+1) - мерного инвариантного C^1- многообразия M_μ^-. Любая траектория, целиком лежащая в V, лежит на двумерном многообразии $M_\mu^0=M_\mu^+\cap M_\mu^-$.

Замечание 2. В случае систем с одной гомоклинической кривой Γ утверждение теоремы остается в силе. В случае, когда $\lambda_1(\mu)$ вещественно и некратно, Γ не лежит в W_0^{ss}, $\sigma<0$ и сепаратрисная величина A положительна, многообразие M_μ^+ определяется однозначно и при $\mu=0$ является устойчивым многообразием контура $\Gamma\cup O$.

Результат о существовании устойчивого инвариантного многообразия у гомоклинической к седлу траектории или пары гомоклинических траекторий имеет самостоятельное значение, поскольку очевидно, что поведение таких многообразий наряду с инвариантными многообразиями циклов и состояний равновесия играет определяющую роль для динамики системы.

В главах 2 и 3 рассмотрены собственно бифуркации контура, образованного двумя гомоклиническими кривыми седла. Как уже отмечалось, здесь есть два случая - когда гомоклинические траектории выходят из седла в противоположных направлениях (рис. I-3), этот случай рассмотрен в главе 2, и когда они выходят, касаясь друг друга, (рис. 4-6), этот случай рассмотрен в главе

3.*)

В § I главы 2 изучены предельные множества, могущие рождаться из контура при возмущении. Пусть X_μ - двупараметрическое семейство динамических систем класса C^3, имеющих состояние равновесия O типа седло с d^s - мерным устойчивым и d^u - мерным неустойчивым многообразиями. Предположим, что для X_μ выполнены условия теоремы I.3.I, то есть, что $\gamma_1(\mu) < \mathrm{Re}\,\gamma_2(\mu)$, что при $\mu = 0$ W^s_μ и W^u_μ пересекаются по двум гомоклиническим кривым Γ_1 и Γ_{-1}, не лежащим в W^{uu}_0 и выходящим из O в противоположных направлениях, что для любой точки на Γ_1 или Γ_{-1} касательная к W^u_0 пересекается с отвечающим данной точке слоем многообразия W^+_0 трансверсально, и, кроме того, что седловая величина $\sigma < 0$. В силу теоремы I.3.I система X_μ имеет гладкое инвариантное (d^s+1) - мерное многообразие M^+_μ такое, что любая траектория, лежащая в $V \setminus M^+_\mu$, покидает V за конечное время. С другой стороны, любая траектория из M^+_μ не покидает V при $t \to +\infty$. В связи с этим дальнейшее рассмотрение будем проводить для ограничения $X_\mu|_{M^+_\mu}$.

В силу трансверсальности пересечения W^u_0 с M^+_0 по $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$ (см. теорему I.3.I) многообразие M^+_μ пересекается с W^u_μ по двум траекториям: $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$. Рассмотрим последовательности точек $\{P_{1j}(\mu)\}_{j=0}^{j=j'_1}$ и $\{P_{-1j}(\mu)\}_{j=1}^{j=j'_{-1}}$, в которых $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ пересекают некоторую секущую к $W^{s,loc}_\mu$ цилиндрическую поверхность Π ($j'_i = +\infty$, если $\Gamma_i(\mu)$ не является гомоклинической к O, в противном случае j'_i конечно $P_{i j'_i} \in W^{s,loc}_\mu \cap \Pi$). Положим $\Sigma = \Pi \cap M^+_\mu$. Пусть (x, y, u, v) - координаты

---

* Заметим, что в главе 3 для удобства доказательства сделано обращение времени, то есть седловая величина σ положительна и гомоклинические траектории касаются друг друга уже при стремлении к седлу.

в V_0, введенные в § 2 главы I. Поскольку W^+_μ содержится в касательном расслоении над M^+_μ, то M^+_μ в V_0 задается уравнением вида $v = h(u, x, y, \mu)$. В связи с этим координатами на Σ служат u и (x, y). Очевидно, пересечение $W^{s, loc}_\mu \cap \Pi$ задается уравнением $u = 0$. Будем считать для определенности, что $\Gamma_i(\mu)$ выходит из O в сторону $iu > 0$ (см. рис. 7). Обозначим координату u точки $P_{ij}(\mu)$ на Σ через $u^{ij}(\mu)$.

Определим последовательности $s_1(\mu) = \{s_{1j}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}$ и $s_{-1}(\mu) = \{s_{-1j}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}$ символов алфавита $\{-1, 0, 1\}$ следующим образом: I) $s_{i0}(\mu) = i$; 2) если $1 \le j \le j_i'$, то $s_{ij}(\mu) = \operatorname{sign} u^{i,j-1}(\mu)$; 3) если $j_i' \ne +\infty$, то $s_{ij}(\mu) = 0$ при $j > j_i'$ (заметим, что $u^{i,j-1}(\mu) \ne 0$ при $1 \le j \le j_i'$, так что слово $\{s_{ij}(\mu)\}_{j=0}^{j=j_i'}$ не содержит нулей).

В случае, если $\Gamma_i(\mu)$ возвращается в седло при $t \to +\infty$, то слово $s = \{s_{ij}(\mu)\}_{j=0}^{j=j_i'}$ будем называть типом гомоклинической траектории $\Gamma_i(\mu)$. Периодическую траекторию системы X_μ, лежащую в V и гомотопную в V гомоклинической траектории типа s, назовем циклом типа s. Тип периодической траектории определяется с точностью до циклической перестановки символов.

Построим некоторое двоичное дерево $\mathcal{G}$ следующим образом: в первую вершину поместим пару символов (1, -1), от нее опустим стрелки в вершины ($1, -11$) и ($1-1, -1$) и так далее, по правилу: из вершины (p, q) проводятся стрелки в вершины (p, qp) и (pq, q) (здесь p_n и q_n – конечные слова алфавита $\{-1, 1\}$). Пару конечных слов алфавита $\{-1, 1\}$ назовем допустимой, если она стоит в одной из вершин построенного дерева. Пару бесконечных вправо слов (p, q) назовем допустимой, если существует последовательность допустимых пар конечных слов (p_n, q_n) таких, что все p_n являются префиксами p, q_n - префиксами q, длины p_n и q_n стремятся к бесконечности при $n \to \infty$ и для любого n пара (p_{n+1}, q_{n+1}) принадлежит поддереву с начальной вершиной (p_n, q_n). Слово s назовем допустимым, если оно является элементом одной из допустимых пар.

Для конечного слова s алфавита $\{-1, 1\}$ назовем "числом вращения" $\tau(s)$ отношение числа единиц в слове к длине слова. Для бесконечного слова $s = \{s_j\}_{j=0}^{+\infty}$ через $\tau(s)$ обозначим $\lim_{l \to \infty} \tau(\{s_j\}_{j=0}^{j=l})$, если он существует. Заметим, что если в $\mathcal{G}$ заменить каждую пару (p, q) на пару чисел ($\tau(p), \tau(q)$), то получится известное дерево Фэри из теории цепных дробей (см., например, [32]).

Теорема 2.I.I. При достаточно малых μ ω - предельное множество любой траектории, лежащей в V, содержится в множестве Ω_μ - замыкании траекторий $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$. Ω_μ состоит из точки O и: либо I) двух устойчивых на M^+_μ периодических траекторий и траекторий $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$, которые стремятся каждая к своей периодической траектории, либо 2) одной устойчивой на M^+_μ периодической траектории со стремящимися к ней $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$, либо 3) гомоклинической к O траектории $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_{-1}(\mu)$ и устойчивой на M^+_μ периодической траектории, к которой стремится оставшаяся траектория $\Gamma_i(\mu)$, либо 4) двух гомоклинических к O траекторий, либо 5) гомоклинической к O траектории $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_{-1}(\mu)$ со стремящейся к ней оставшейся траекторией $\Gamma_i(\mu)$, либо 6) континуума незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий, устойчивых по Пуассон при $t \to +\infty$ (P^+ - устойчивых) траекторий $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ и одной устойчивой по Пуассону при $t \to -\infty$ (P^- - устойчивой) траектории из W^s_r. В последнем случае Ω_μ является замыканием любой своей траектории, кроме O *).

Периодические и гомоклинические к O траектории могут иметь только допустимые типы. В случае наличия пары периодических или гомоклинических к O траекторий их типы образуют допустимую пару. В случае, когда $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ P^+- устойчивы, пара бесконечных слов $(s_1(\mu), s_{-1}(\mu))$ допустима.

Независимо, но позже нашей публикации [40], часть теоремы 2.I.I, касающаяся описания допустимых кодировок периодических движений, получена в [16], при дополнительных ограничениях на систему (потребована возможность C^{1+1} - линеаризации).

В § 2 изучена структура квазиминимальных множеств, могущих рождаться при возмущении данного контура. Получена следующая

Теорема 2.2.I. Пусть для системы X_μ $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ $P^\pm$- устойчивы по Пуассону и $\tau(s_1(\mu), s_{-1}(\mu))=\tau^*$. Тогда $X_\mu|_{\Omega_\mu}$ топологически эквивалентно ограничению на квазиминимальное множество специального потока Черри [23, 31] с числом вращения τ^*.

В § 3 получен ряд технических результатов, мы их здесь не приводим. В § 4 исследованы бифуркации контура типа "восьмерка" (рис. I), то есть, когда $\lambda_1(\mu)$ вещественно, $\lambda_1(\mu) > \mathrm{Re}\,\lambda_2(\mu)$, Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в W_0^{ss} и входят в O с противоположных направлений. Предполагается также, что в точках Γ_1 и Γ_{-1} касательная к W_0^s пересекается со слоем W_0^- трансверсально, или, что эквивалентно, что сепаратрисные величины A_1 и A_{-1}, определяемые формулами (I.2.25) или (I.2.3) отличны от нуля. Кроме того, здесь и в последующих параграфах предполагается, что семейство X_μ трансверсально в пространстве динамических систем пленке систем с двумя гомоклиническими кри-

---

*) Мы будем называть Ω_μ в этом случае квазиминимальным множеством.

выми седла) и что при $\mu_i = 0$ $\Gamma_i(\mu)$ является гомоклинической типа $\{i\}$.

Теорема 2.4.I. В рассматриваемом случае Ω_μ не может быть квазиминимальным множеством и при $\mu \neq 0$ не может состоять из двух гомоклинических кривых седла. В случае $A_1 > 0$, $A_{-1} > 0$ могут быть циклы только типов $\{1\}$, $\{-1\}$ и $\{1-1\}$ (бифуркационная диаграмма приведена на рис. 9). В случае $A_1 < 0$, $A_{-1} > 0$ – циклы только типов $\{1\}$, $\{-1\}, \{1-1\}$, $\{1-11\}$(рис. I0). В случае $A_1 < 0$, $A_{-1} < 0$ – циклы только типов $\{1\}$, $\{-1\}$, $\{1-1\}$, $\{(1-1)^n 1\}$ и $\{(-11)^n 1\}$ $(1 \leq n < \infty)$, плоскость параметров (рис. II) разбивается на счетное число областей кривыми $\mathcal{M}_{1-1}$, $\mathcal{M}_{-11}$, $\mathcal{M}_{-1(1-1)^n}$, $\mathcal{M}_{1(-11)^n}$, $\mathcal{M}_{1-1-1(1-1)^n}$, $\mathcal{M}_{-111(-11)^n}$. На кривых $\mathcal{M}_{1-1}$ и $\mathcal{M}_{-11}$ при $A_1 < 0$, $A_{-1} < 0$ множество Ω_μ содержит точку O и одну гомоклиническую траекторию седла типа $\{1-1\}$ или $\{-11\}$ соответственно, для всех других бифуркационных кривых $\mathcal{M}_S$ Ω_μ содержит точку O, гомоклиническую к седлу траекторию типа S и периодическое движение, общее для областей, разделяемых бифуркационной кривой.

В § 5 исследованы бифуркации контура типа "бабочка" (рис. 2), т.е. когда $\lambda_1(\mu)$ вещественно, $Re\ \lambda_2(\mu) < \lambda_1(\mu)$, $\Gamma_1(0)$ и $\Gamma_{-1}(0)$ не лежат в W_0^{ss} и входят в O, касаясь друг друга. Предполагается также, что сепаратрисные величины A_1 и A_{-1} отличны от нуля.

Теорема 2.5.I. В случае $A_1 > 0$, $A_{-1} > 0$ (см. рис. I2) Ω_μ в области $\mu_1 > 0$, $\mu_{-1} < 0$ содержит два цикла типов $\{1\}, \{-1\}$, в области $\mu_1 > 0$, $\mu_{-1} > 0$ – один цикл типа $\{1\}$, в области $\mu_1 < 0$, $\mu_{-1} < 0$ – один цикл типа $\{-1\}$. В области $\mu_1 < 0$, $\mu_{-1} > 0$ бифуркационное множество представляет собой канторовский пучок кривых, состоящий из счетного числа линий

$\mathcal{M}_s$, на которых Ω_μ содержит одну гомоклиническую к седлу кривую типа s, и континуум линий существования квазиминимальных множеств. Область устроена следующим образом: I) для любой допустимой пары конечных слов p и q существуют линии $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ 2) в секторе, ограниченном этими линиями лежат линии $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$, причем $\mathcal{M}_{pq}$ лежит между $\mathcal{M}_q$ и $\mathcal{M}_{qp}$, а $\mathcal{M}_{qp}$ - между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_{pq}$, 3) в секторе, ограниченном линиями $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$, множество Ω_μ содержит единственный цикл $\{pq\}$, 4) для произвольной допустимой пары бесконечных слов (p,q) существует линия $\mathcal{M}_{(p,q)}$, отвечающая существованию квазиминимальных множеств: $s_1(\mu)=p$ и $s_{-1}(\mu)=q$ при $\mu \in \mathcal{M}_{(p,q)}$. $\mathcal{M}_{(p,q)}$ может быть построена как $\lim \mathcal{M}_{p_n} = \lim \mathcal{M}_{q_n}$, где (p_n, q_n) - последовательность допустимых пар, аппроксимирующих (p,q). В случае $A_1>0$, $A_{-1}<0$ (см. рис. I3) существуют циклы только типов $\{1\}$, $\{-1\}$ и $\{-1 1^n\}$ $(1 \le n < \infty)$. Плоскость параметров разбивается на счетное число областей линиями $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{-1}, \mathcal{M}_{1-1}, \mathcal{M}_{-11^n}, \mathcal{M}_{1-11^n}$ $(1 \le n < \infty)$. Ω_μ на $\mathcal{M}_1$ содержит одну гомоклиническую кривую типа $\{1\}$, а на остальных линиях Ω_μ кроме гомоклинической кривой содержит цикл, общий для секторов, разделяемых линией. В случае $A_1<0$, $A_{-1}<0$ существуют циклы типов $\{1\}$, $\{-1\}$ и $\{1-1\}$. Плоскость параметров приведена на рис. I4.

В § 6 рассмотрен случай, когда $\lambda_1(\mu)$ комплексно, $\mathrm{Re}\,\lambda_1(\mu) = \mathrm{Re}\,\lambda_2(\mu) > \mathrm{Re}\,\lambda_i(\mu)$ $(i=2,\dots,d^s)$. Предполагается, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в W_0^{ss}, а также, что слои многообразий W_0^{++} и W_0^- трансверсально пересекаются в каждой точке Γ_1 и Γ_{-1}.

Теорема 2.6.I. В рассматриваемом случае для семейства X_μ реализуются все возможности, разрешенные теоремой 2.I.I. Линии $\mathcal{M}_s$ существования гомоклинических к седлу кривых типа s расположены здесь следующим образом (см. рис. I5): $\mu_1 = 0$ - линия $\mathcal{M}_1$; $\mu_{-1} = 0$ - линия $\mathcal{M}_{-1}$; из точки $(\mu_1 = 0,\ \mu_{-1} = 0)$ выходят еще линии $\mathcal{M}_{1-1}$ и $\mathcal{M}_{-11}$ которые в бесконечном множестве точек пересекаются соответственно с $\mathcal{M}_{-1}$ и $\mathcal{M}_1$; и далее по правилу: пусть $(p, q) \neq (1, -1)$ - допустимая пара конечных слов, тогда

А) Существуют линии $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, которые пересекаются друг с другом в бесконечном множестве, причем на любом связном куске пересечения $\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q$ ($\mathcal{D}_p$ и $\mathcal{D}_q$ - области определения функций h_p и h_q, задающих $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$: $\mathcal{M}_p = \{\mu_j = h_p(\mu_{-j})\}$, $\mathcal{M}_q = \{\mu_j = h_q(\mu_{-j})\}$) в бесконечном количестве имеются соседние точки пересечения $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ на отрезке между которыми $h_p(\mu_{-j}) > h_q(\mu_{-j})$ и, аналогично, точки, между которыми $h_p(\mu_{-j}) < h_q(\mu_{-j})$ (Здесь j - символ (1 или -1) на который оканчиваются p и q).

Б) Соседние точки пересечения $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, на отрезке между которыми $h_p > h_q$, соединяются дополнительно линиями $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$: $\mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_{qp} = \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-j} \mid h_p(\mu_{-j}) > h_q(\mu_{-j})\}$.

В) Всюду в области между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, где $h_p < h_q$ множество Ω_μ содержит пару циклов типов $\{p\}$ и $\{q\}$.

Г) Всюду в области между $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$ существует цикл типа $\{pq\}$.ж)

В главе 3 рассмотрены бифуркации контуров, полученных из изображенных на рис. 4, 5 обращением времени. Пусть X_μ - двупараметрическое семейство C^3 - гладких динамических систем на ($d^3 + d^4$) - мерном гладком многообразии, гладко зависящих от $\mu = (\mu_1,\ \mu_{-1})$. Будем предполагать, что X_μ имеет седловое состояние равновесия O, причем собственные числа

ж) Часть этой теоремы (утверждение о том, что здесь встречаются пары циклов всех допустимых типов) есть в [15].

$\lambda_i(\mu)$, $\gamma_j(\mu)$ системы, линеаризованной в точке O, удовлетворяют соотношениям $Re\,\lambda_i(\mu) < \lambda_1(\mu) < 0 < \gamma_1(\mu) < Re\,\gamma_j(\mu)$ и $\sigma = \lambda_1(\mu) + \gamma_1(\mu) > 0$. Предположим, что W_o^s и W_o^u пересекаются по двум гомоклиническим к O траекториям – Γ_1 и Γ_{-1}. Будем предполагать, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в неведущих подмногообразиях многообразий W_o^s и W_o^u и касаются друг друга при $t \to +\infty$. Предположим также, что сепаратрисные величины A_1 и A_{-1} отличны от нуля. Введем также в рассмотрение величины π_1 и π_{-1} такие, что Γ_i выходит из O в сторону $\pi_i u > 0$. Будем считать, что $\pi_1 = 1$. Будем предполагать, что семейство X_μ трансверсально к пленке коразмерности два, выделенной вышеперечисленными условиями, и что при $\mu_i = 0$ X_μ имеет гомоклиническую к O траекторию, гомотопную Γ_i в малой окрестности V контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$.

Зададим аналогично [36] на множестве бесконечных вправо последовательностей символов алфавита $\{-1, 0, 1\}$ отношение порядка $\succ$ по правилу: $p = \{p_i\}_{i=0}^{+\infty} \succ q = \{q_i\}_{i=0}^{+\infty}$ тогда и только тогда, когда для некоторого j $(\prod_{i=0}^{j-1} A_i)(p_j - q_j) > 0$ и $p_i = q_i$ для всех $i < j$. Для произвольной бесконечной вправо последовательности $s = \{s_i\}_{i=0}^{+\infty}$ бесконечную вправо (а возможно и в обе стороны) последовательность $p = \{p_i\}$ назовем s – допустимой, если для любого j выполнено следующее требование: I) если $p_j = 0$, то $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} = 0^\infty$, 2) если $p_j = s_0 = -1$, то при $\pi_{-1} = 1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \succcurlyeq s$, а при $\pi_{-1} = -1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \preccurlyeq s$, 3) если $p_j = s_0 = -1$, то при $\pi_{-1} = 1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \preccurlyeq s$, а при $\pi_{-1} = -1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \succcurlyeq s$. Последовательность s назовем самодопустимой, если она s – допустима. Для произвольной самодопустимой последовательности s рассмотрим нидинг-систему $K_u(s)$: это множество, которое содержит все последовательности p из символов I и (-I) такие, что либо p бесконечна в обе стороны и s - допустима, либо p бесконечна влево и s - допустима последовательность ps, либо p - пустая последовательность, либо, если s не содержит нулей и непериодична, то $p = s$, либо, если $s = q^\infty$, где q - конечна и непериодична, то $p = q$. Мы предполагаем, что элементы последовательностей из $K_n(s)$ занумерованы так, что обязательно имеется элемент с нулевым номером. При этом последовательности, полученные друг из друга сдвигом, считаются различными.

Для произвольной непустой $p \in K_n(s)$ определим множество $\tilde{p}$ бесконечных последовательностей: если p бесконечна в обе стороны, то $\tilde{p}$ состоит только из p, если p конечна вправо или влево, то $\tilde{p}$ состоит из всевозможных последовательностей, которые получаются из p приписыванием соответственно справа или слева произвольных конечных влево или вправо последовательностей из $K_n(s)$ (приписывание повторяется до тех пор, пока не получится бесконечная в обе стороны последовательность, при этом не обязательно приписывать одну и ту же последовательность из $K_n(s)$). Может статься, что в $K_n(s)$ нет конечных вправо или влево последовательностей. В этом случае для конечной соответственно влево или вправо p $\tilde{p}$ состоит из единственной последовательности, полученной приписыванием к p бесконечной последовательности нулей слева или справа соответственно.

Введем топологию на $K_n(s)$: p_1 и p_2 будем считать близкими, если какая-либо последовательность из $\tilde{p}_1$ близка в обычном смысле какой-либо последовательности из $\tilde{p}_2$. Пустая последовательность изолирована. Зададим на $K_n(s)$ отображение сдвига $p \mapsto p'$: если $p = \{p_i\}_{i=i_0}^{i=i_1}$ ($i_0 \le 0$, $i_1 \ge 0$, возможно, что $i_0=-\infty$ или $i_1=+\infty$), то при $i_1>0$ $p'=\{p'_i=p_{i+1}\}_{i=i_0-1}^{i=i_1-1}$, а при $i_1=0$ p' - пустая последовательность. На пустой последовательности сдвиг неоднозначен - ее образами служат любые последовательности из $K_u(s)$ с $i_0=0$. Нидинг - системы (возможно в несколько отличной формулировке) рассматривались различными авторами [33 - 36], в основном в связи с моделью Лоренца. Наше определение ближе всего к [36]. Несложно показать (см. например [22]), что если s заканчивается бесконечной последовательностью нулей, то сдвиг на $K_u(s)$ эквивалентен ТМЦ с конечным числом символов. Обозначим через Ω_μ множество траекторий системы X_μ, целиком лежащих в V.

Теорема 3.I. На плоскости параметров $(\mu'_1=-\bar{\pi}_1 A_1\mu_1,\ \mu'_{-1}=-\bar{\pi}_{-1}A_{-1}\mu_{-1})$ лежат кривые $\mathcal{M}_i^+$ и $\mathcal{M}_i^-$: $\mu'_i=f_i^{\pm}(\mu'_{-i})$ $(i\in\{-1,1\})$, где $f_i^{\pm}$ определены при всех $\mu'_{-i}>0$, причем $f_i^+\geq 0\geq f_i^-$ и при $\mu'_{-i}\to+0$ стремятся к нулю вместе со своими константами Липшица. Всюду в области $\mu'_1<0$, $\mu'_{-1}<0$ $\Omega_\mu=\{0\}$; при $\mu'_{-1}=\mu'_1=0$ $\Omega_\mu=\{\Gamma_1,\Gamma_{-1},0\}$; при $\mu'_i=0$, $\mu'_{-i}<0$ Ω_μ состоит из O и гомоклинической к O траектории, гомотопной Γ_i в V ; при $\mu'_i>0$, $\mu'_{-i}<f_{-i}^-(\mu'_i)$ Ω_μ состоит из O , седлового предельного цикла, гомотопного Γ_i , и гетероклинической траектории, ω - предельной к O и α - предельной к циклу; при $\mu'_i>f_i^+(\mu'_{-i})$, $\mu'_{-i}>f_{-i}^+(\mu'_i)$ Ω_μ состоит из гиперболического множества, поток на котором эквивалентен надстройке над схемой Бернулли двух символов, точки O и траекторий, ω - предельных к O и α - предельных к траекториям из гиперболического множества; при

$\mu_i' > 0, f_i^+(\mu_{-i}') \geq \mu_i' \geq f_i^-(\mu_{-i}')$ ограничение $X_\mu|_{\Omega_\mu}$ топологически эквивалентно надстройке над $K_n(s_\mu)$ со вклеенным на месте пустой последовательности состоянием равновесия*), где s_μ при каждом фиксированном μ_{-i}' при изменении μ_i' от $f_i^-(\mu_{-i}')$ до $f_i^+(\mu_{-i}')$ пробегает, монотонно вырастая, все самодопустимые значения, начинающиеся с i. Значениям $s_\mu = p0^\infty$ отвечают сектора $\mathcal{U}_p$, ограниченные двумя непересекающимися липшицевыми кривыми (как отмечалось выше в этих секторах $X_\mu|_{\Omega_\mu}$ эквивалентно ТМЦ с конечным числом состояний). Значения $s_\mu = s$, не содержащие нулей, являются бифуркационными, им отвечают липшицевы кривые $\mathcal{M}_s$.

Приведенная теорема полностью определяет структуру бифуркационных диаграмм (рис. 16 - 21, см. также замечание в гл. 3.).

Случай $\pi_1 > 0$, $\pi_{-1} > 0$ (рис. 5) ранее не рассматривался. Случай $\pi_1 > 0$, $\pi_{-1} < 0$ (рис. 4) в связи с аттрактором Лоренца для систем с симметрией (в наших обозначениях это прямая $\mu_1' = \mu_{-1}'$) рассматривался в [14], для общих двупараметрических семейств трехмерных систем - в [21, 22]. В [21, 22] построены бифуркационные диаграммы и исследовано неблуждающее множество системы при небифуркационных значениях μ, однако для значений μ на бифуркационных кривых полного описания неблуждающего множества не было получено. Надо отметить также, что результаты [21, 22] доказаны только для системы, допускающей приведение гладкой заменой системы вблизи седла к некоторому специальному виду.

---

*) О надстройках, включающих состояния равновесия, см. [47].

Глава I. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПУАНКАРЕ

§ I. Построение решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений вблизи седла.

Рассмотрим конечномерную динамическую систему X_μ класса C^g $(g \geq 1)$, гладко зависящую от некоторого набора параметров μ и заданную в малой δ - окрестности состояния равновесия O. Будем предполагать, что O - седло с d^s - мерным устойчивым и d^u - мерным неустойчивым многообразиями W_μ^s и W_μ^u соответственно. Введем координаты (x, u), $x \in R^{d^s}$, $u \in R^{d^u}$ так, чтобы векторное поле системы приняло вид

$$\begin{cases} \dot{x} = B(\mu)x + F(x, u, \mu) \\ \dot{u} = C(\mu)u + G(x, u, \mu) \end{cases} \qquad \text{(I.I.I)}$$

где $B(\mu)$ - $(d^s \times d^s)$ -матрица, собственные числа которой лежат слева от мнимой оси, $C(\mu)$ - $(d^u \times d^u)$ -матрица с собственными числами справа от мнимой оси; F и G - функции класса C^g, $F(0,0,\mu) = 0$, $G(0,0,\mu)=0$, $\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,u)}\right|_{\substack{x=0\\u=0}} = 0$.

В [3] показано, что для любых $\tau \geq 0$, ξ, η $(\|\xi\| \leq \delta, \|\eta\| \leq \delta)$ существует и единственна траектория $\{x^*(t;\tau,\xi,\eta,\mu), u^*(t;\tau,\xi,\eta,\mu)\}$ системы X_μ такая, что $x^*(0;\tau,\xi,\eta,\mu) = \xi$, $u^*(\tau;\tau,\xi,\eta,\mu) = \eta$.

Непосредственной подстановкой в (I.I.I) можно убедиться [3], что $\{x^*, u^*\}$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{cases} x^*(t) = e^{B(\mu)t}\xi + \int\limits_0^t e^{B(\mu)(t-s)} F(x^*(s), u^*(s), \mu)\,ds \\ u^*(t) = e^{C(\mu)(t-\tau)}\eta - \int\limits_t^\tau e^{C(\mu)(t-s)} G(x^*(s), u^*(s), \mu)\,dS \end{cases} \qquad \text{(I.I.2)}$$

В [3] показано, что $\{x^*, u^*\}$ – равномерный предел в C^0-топологии последовательности функций $\{x^{(k)}, u^{(k)}\}_{k=0}^{+\infty}$, получаемых итерацией начальной функции $\{x^{(0)} \equiv 0, u^{(0)} \equiv 0\}$ под действием оператора $\mathcal{P}$ правых частей (I.I.2):

$$\begin{cases} x^{(k+1)}(t) = e^{B(\mu)t}\xi + \int_0^t e^{B(\mu)(t-s)} F(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), \mu)\, ds \\ u^{(k+1)}(t) = e^{C(\mu)(t-\tau)}\eta - \int_t^\tau e^{C(\mu)(t-s)} G(x^{(k)}(s), u^{(k)}(s), \mu)\, ds \end{cases} \quad \text{(I.I.3.)}$$

Лемма I.I.I. $\{x^*, u^*\}$ – гладкая функция от $(t; \tau, \xi, \eta, \mu)$ (класс гладкости такой же, как и у X_μ).

Доказательство. Заметим, что $\{x^*, u^*\}$, как траектория динамической системы, гладко зависит от $(t, x^*(t=0) = \xi, u^*(t=0), \mu)$ (в частности, $\eta = u^*(t=\tau)$ гладко зависит от $(t, \xi, u^*(0), \mu)$). Отсюда, в силу теоремы о неявной функции, для доказательства леммы достаточно показать, что $\det \frac{d\eta}{d[u^*(0)]} \neq 0$. Очевидно, достаточно показать, что $u^*(0)$ – липшицева функция от η. Докажем это. Из (I.I.3.)

$$\begin{cases} \left\| \frac{\partial x^{(k+1)}}{\partial \eta} \right\| \le K \int_0^t e^{-\bar\lambda(t-s)} \left\| \frac{\partial (x^{(k)}, u^{(k)})}{\partial \eta} \right\| ds \\ \left\| \frac{\partial u^{(k+1)}}{\partial \eta} \right\| \le e^{-\bar\gamma(\tau-t)} + K \int_t^\tau e^{-\bar\gamma(s-t)} \left\| \frac{\partial (x^{(k)}, u^{(k)})}{\partial \eta} \right\| ds \end{cases} \quad \text{(I.I.4)}$$

где $K = \max\limits_{\|x\| \le \delta, \|u\| \le \delta} \left\| \frac{\partial (F,G)}{\partial (x,u)} \right\| \to 0$ при $\delta \to 0$; числа $\bar\gamma > 0$ и $\bar\lambda > 0$ таковы, что $\operatorname{Spectr} B(\mu) \subset \{\operatorname{Re} W < -\bar\lambda\}$, $\operatorname{Spectr} C(\mu) \subset \{\operatorname{Re} W > \bar\gamma\}$.

Из (I.I.4) очевидно, что при достаточном малом K, если

$\|\frac{\partial (x^{(k)}, u^{(k)})}{\partial \eta}\| \le 2$, то и $\|\frac{\partial (x^{(k+1)}, u^{(k+1)})}{\partial \eta}\| \le 2$, откуда получаем, что для всех k $\|\frac{\partial (x^{(k)}, u^{(k)})}{\partial \eta}\| \le 2$.

Отсюда, поскольку $\{x^{(k)}, u^{(k)}\}$ равномерно сходится в C^0 -топологии к $\{x^*, u^*\}$, получаем, что $\{x^*, u^*\}$ - липшицева функция от η . Лемма доказана.

Пусть числа $0<\lambda_1<\ldots<\lambda_{i^s}$ $(i^s \le d^s)$ и $0<\gamma_1<\ldots<\gamma_{j^u}$ $(j^u \le d^u)$ таковы, что $\mathrm{Spectr}\, B(0)$ целиком лежит на комплексных прямых $\{\mathrm{Re}\, W = -\lambda_i\}_{i=1}^{i=i^s}$, а $\mathrm{Spectr}\, C(0)$ целиком лежит на прямых $\{\mathrm{Re}\, W = \gamma_j\}_{j=1}^{j=j^u}$.

Зададимся произвольными $\alpha>\lambda_1$ и $\beta>\gamma_1$ такими, что $\beta>\alpha-\lambda_1$, $\alpha>\beta-\gamma_1$, $\alpha\ne\lambda_i$, $\beta\ne\gamma_j$ ни для каких λ_i , γ_j. Ниже мы получим оценки для $x^*(t=\tau)$ и $u^*(t=0)$ (а также для их производных) с точностью до $e^{-\alpha\tau}$ и $e^{-\beta\tau}$ соответственно. Удобно предварительно привести систему заменой координат к некоторому специальному виду.

Заметим, во-первых, что (I.I.I) представляется в виде

$$\dot{x}_i = B_i(\mu)x_i + F_i(x,u,\mu) \quad (i=1,\ldots,i^s)$$

$$\dot{u}_j = C_j(\mu)u_j + G_j(x,u,\mu) \quad (j=1,\ldots,j^u) \tag{I.I.5}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_{i^s})$; $u=(u_1,\ldots,u_{j^u})$; x_i-векторы $(x_{i1},\ldots,x_{id_i^s})$ размерности d_i^s ; u_j -векторы $(u_{j1},\ldots,u_{jd_j^u})$ размерности d_j^u; $\sum_{i=1}^{i=i^s} d_i^s = d^s$; $\sum_{j=1}^{j=j^u} d_j^u = d^u$; $\mathrm{Spectr}\, B_i(0)$ целиком лежит на прямой $\{\mathrm{Re}\, W = -\lambda_i\}$; $\mathrm{Spectr}\, C_j(0)$ - на прямой $\{\mathrm{Re}\, W = \gamma_j\}$; матрицы $B_i(0)$ и $C_j(0)$ находятся в жордановой форме. Будем обозначать $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{i^s})$, $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_{j^u})$. По правым частям (I.I.5) стандартным образом [25] определяются отрезки нормальной формы системы X_μ

$$\begin{cases} F_i^{nf} = B_i(\mu)x_i + \sum\limits_{0<(m,\lambda)\le\alpha,\ (n,\gamma)=(m,\lambda)-\lambda_i} B_{imn}(\mu)x^m u^n \\ G_j^{nf} = C_j(\mu)u_j + \sum\limits_{0<(n,\gamma)\le\beta,\ (m,\lambda)=(n,\gamma)-\gamma_j} C_{jmn}(\mu)x^m u^n \end{cases} \quad \text{(I.I.6)}$$

где $m=(m_1,\dots,m_{i^s})$, $n=(n_1,\dots,n_{j^u})$; m_i, n_j - целые неотрицательные числа; $(m,\lambda)=\sum_i m_i\lambda_i$; $(n,\gamma)=\sum_j n_j\gamma_j$ $x^m u^n$ - вектор, составленный из всевозможных мономов вида $\left(\prod\limits_{i=1}^{i=i^s}\left(\prod\limits_{l=1}^{l=d_i^s} x_{il}^{m_{il}}\right)\right)\cdot\left(\prod\limits_{j=1}^{j=j^u}\left(\prod\limits_{l=1}^{l=d_j^u} u_{jl}^{n_{jl}}\right)\right)$,где $m_{il}\geq 0$, $n_{jl}\geq 0$, $\sum_l m_{il}=m_i$, $\sum_l n_{jl}=n_j$.

Ниже нам понадобится ряд обозначений. Обозначим $|m|=\sum_i m_i$, $|n|=\sum_j n_j$. Обозначим через $I_{i\alpha}$ максимальный набор пар целочисленных неотрицательных векторов $\{m,n\}$, удовлетворяющий условиям: I) если $\{m,n\}\in I_{i\alpha}$,то $(m,\lambda)>\alpha$, $(n,\gamma)>\alpha-\lambda_i$ и 2) для любых $\{m^1,n^1\}\in I_{i\alpha}$, $\{m^2,n^2\}\in I_{i\alpha}$ разности (m^1-m^2), (n^1-n^2) содержат отрицательные компоненты. Очевидно, $I_{i\alpha}$ - конечный набор. Аналогично определяется конечный набор $J_{j\beta}$ пар m и n - таких, что $(n,\gamma)>\beta$, $(m,\lambda)>\beta-\gamma_j$. Для двух целочисленных векторов p и p' обозначим через $\overline{p-p'}$ вектор p'' с компонентами $p''_l = max(0, p_l-p'_l)$.

Введем также несколько вольное обозначение

$\|x\|=(\|x_1\|,\dots,\|x_{i^s}\|)$, $\|u\|=(\|u_1\|,\dots,\|u_{j^u}\|)$

(здесь $\|x_i\|, \|u_j\|$ - обычные нормы вектора, а $\|x\|$, $\|u\|$ - вектора, составленные из норм).

Теорема I.I.I По α, β, а также по тем λ_i γ_j; для которых $\lambda_i < \alpha$, $\gamma_j < \beta$ однозначно определяется ρ_0 такое, что если ρ (гладкость системы X_μ) достаточно велика, то заменой координат класса $C^{\rho-\rho_0}$ (C^∞ , если $X_\mu \in C^\infty$, и аналитической, если X_μ аналитична) система X_μ приводится к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i^{nf} + \widetilde{F}_i \\ \dot{u}_j = G_j^{nf} + \widetilde{G}_j \end{cases} \qquad \text{(I.I.7)}$$

где $\widetilde{F}_i \in C^{\rho-\rho_0-1}$, $\widetilde{G}_j \in C^{\rho-\rho_0-1}$, причем для любых целочисленных m' , n' , γ таких, что $0 \le |m'|+|n'|+|\gamma| \le \rho-\rho_0-1$

$$\begin{cases} \left\| \dfrac{\partial^{|m'|+|n'|+|\gamma|} \widetilde{F}_i}{\partial x^{m'} \partial u^{n'} \partial \mu^{\gamma}} \right\| \le K \sum\limits_{\{m,n\} \in I_{i\alpha}} \|x\|^{\overline{m-m'}} \|u\|^{\overline{n-n'}} \\ \left\| \dfrac{\partial^{|m'|+|n'|+|\gamma|} \widetilde{G}_j}{\partial x^{m'} \partial u^{n'} \partial \mu^{\gamma}} \right\| \le K \sum\limits_{\{m,n\} \in J_{j\beta}} \|x\|^{\overline{m-m'}} \|u\|^{\overline{n-n'}} \end{cases} \qquad \text{(I.I.8)}$$

$(K>0)$

Доказательство: Из теории нормальных форм [25] следует, что полиномиальной заменой можно привести (I.I.5) к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i^{nf} + \sum\limits_{0 \le (m,\lambda) \le \alpha} \hat{F}_{im}(u,\mu) x^m + \sum\limits_{0 \le (n,\gamma) \le (\alpha-\lambda_i} \check{F}_{im}(x,\mu) u^n + \widetilde{F}_i \\ \dot{u}_j = G_j^{nf} + \sum\limits_{0 \le (n,\gamma) \le \beta} \hat{G}_{jn}(x,\mu) u^n + \sum\limits_{0 \le (m,\lambda) \le \beta-\gamma_j} \check{G}_{jm}(u,\mu) x^m + \widetilde{G}_j \end{cases} \qquad \text{(I.I.9)}$$

где $\tilde{F}_i$, $\tilde{G}_j$ удовлетворяют требованиям теоремы, а функции $\hat{F}$, $\check{F}$, $\hat{G}$ и $\check{G}$ – являются бесконечно малыми достаточно высокого порядка (в смысле обращения функции и достаточно большого числа её производных в нуль в начале координат).

Распрямлением устойчивого и неустойчивого многообразий системы X_μ добьемся, чтобы в (I.I.9)

$$\hat{F}_{i0} \equiv 0 , \quad \hat{G}_{j0} \equiv 0 \qquad \text{(I.I.10)}$$

Заменой класса $C^{\rho-1}$, построенной в [26] , убьем в (I.I.9) все члены вида $\hat{F}_i(u,\mu)x_{i'}$, где $i' \le i$, и $\hat{G}_j(x,\mu)u_{j'}$, где $j' \le j$, иными словами, добьемся, чтобы

$$\begin{cases} \hat{F}_{i(0,\dots,0,m_{i'}=1,0,\dots,0)}(u,\mu) \equiv 0 , \text{ при } i' \le i \\ \hat{G}_{j(0,\dots,0,n_{j'}=1,0,\dots,0)}(x,\mu) \equiv 0 , \text{ при } j' \le j \end{cases} \qquad \text{(I.I.II)}$$

Кроме того, из [27] следует (см. по этому поводу также [26,28]),что гладкой заменой координат можно привести уравнения (I.I.9) для $^{\text{т}}$ex x_i, для которых $\lambda_i \le \alpha$, и для u_j , для которых $\gamma_j \le \beta$, при $u=0$ и при $x=0$ соответственно и нормальной форме (при этом потеря гладкости полностью определяется значениями λ_i и γ_j). Отсюда следует, что в (I.I.9) можно положить

$$\begin{cases} \check{F}_{i0} \equiv 0 \text{ при } \lambda_i \le \alpha \\ \check{G}_{j0} \equiv 0 \text{ при } \gamma_j \le \beta \end{cases} \qquad \text{(I.I.I2)}$$

Рассмотрим конечные множества $\hat{I}_i$, $\check{I}_i$, $\hat{J}_j$, $\check{J}_j$ мономов $x^m u^n$ таких, что

$$\begin{cases} x^m u^n \in \hat{I}_i \Leftrightarrow \{0<(m,\lambda)\le\alpha \text{ и } (m,\lambda)-\lambda_i \geqslant (n,\gamma) > (m,\lambda)-\lambda_i-\gamma_{j_u}\} \\ x^m u^n \in \check{I}_i \Leftrightarrow \{0<(n,\gamma)\le\alpha-\lambda_i \text{ и } (n,\gamma) \geqslant (m,\lambda)-\lambda_i > (n,\gamma)-\lambda_{i_s}\} \\ x^m u^n \in \hat{J}_j \Leftrightarrow \{0<(n,\gamma)\le\beta \text{ и } (n,\gamma)-\gamma_j \geqslant (m,\lambda) > (n,\gamma)-\gamma_j-\lambda_{i_s}\} \\ x^m u^n \in \check{J}_j \Leftrightarrow \{0<(m,\lambda)\le\beta-\gamma_j \text{ и } (m,\lambda) \geqslant (n,\gamma)-\gamma_j > (m,\lambda)-\gamma_{j_u}\} \end{cases} \quad (\text{I.I.I3})$$

(здесь знак $\Leftrightarrow$ обозначает равносильность).

Введем отношения частичного порядка на множествах $(\bigcup_i \hat{I}_i)\cup(\bigcup_j \check{J}_j)$ и $(\bigcup_i \check{I}_i)\cup(\bigcup_j \hat{J}_j)$: если $x^{m^1}u^{n^1}$ и $x^{m^2}u^{n^2}$ принадлежат $(\bigcup_i \hat{I}_i)\cup(\bigcup_j \check{J}_j)$, то $x^{m^1}u^{n^1} \succ x^{m^2}u^{n^2}$ тогда и только тогда, когда либо I) $|m^1|>|m^2|$, либо 2) $|m^1|=|m^2|$ и $(m^1,\lambda)>(m^2,\lambda)$, либо 3) $m^1=m^2$ и $|n^1|>|n^2|$, а если $x^{m^1}u^{n^1}$ и $x^{m^2}u^{n^2}$ принадлежат $(\bigcup_i \check{I}_i)\cup(\bigcup_j \hat{J}_j)$, то $x^{m^1}u^{n^1} \succ x^{m^2}u^{n^2}$ тогда и только тогда, когда либо I) $|n^1|>|n^2|$, либо 2) $|n^1|=|n^2|$ и $(n^1,\gamma)>(n^2,\gamma)$, либо 3) $n^1=n^2$ и $|m^1|>|m^2|$.

Определим целочисленную функцию θ на $\hat{I}_i$, $\check{I}_i$, $\hat{J}_j$, $\check{J}_j$ так, чтобы

$$\begin{cases} (m,\lambda)-\lambda_i-\gamma_{\theta-1} \geqslant (n,\gamma) > (m,\lambda)-\lambda_i-\gamma_\theta & \text{при } x^m u^n \in \hat{I}_i \\ (n,\gamma)-\lambda_{\theta-1} \geqslant (m,\lambda)-\lambda_i > (n,\gamma)-\lambda_\theta & \text{при } x^m u^n \in \check{I}_i \\ (n,\gamma)-\gamma_j-\lambda_{\theta-1} \geqslant (m,\lambda) > (n,\gamma)-\gamma_j-\lambda_\theta & \text{при } x^m u^n \in \hat{J}_j \\ (m,\lambda)-\gamma_{\theta-1} \geqslant (n,\gamma)-\gamma_j > (m,\lambda)-\gamma_\theta & \text{при } x^m u^n \in \check{J}_j \end{cases} \quad (\text{I.I.I4})$$

(здесь $\lambda_0=\gamma_0=0$).

Для произвольного вектора y (ниже это будут вектора

$x=(x_1,\dots,x_{i^1})$, $u=(u_1,\dots,u_{j^u})$, также $F=(F_1,\dots,F_{i^1})$, $G=(G_1,\dots,G_{j^u})$, матрицы (понимаемые как вектора строк) $B(\mu)=(B_1(\mu),\dots,B_{i^1}(\mu))$ и $C(\mu)=(C_1(\mu),\dots,C_{j^u}(\mu))$ из (I.I.5)) обозначим через y_θ^- – вектор, полученный из y отбрасыванием первых $(\theta-1)$ компонент, а через y_θ^+ обозначим вектор, полученный из y отбрасыванием всех компонент, начиная с компоненты с номером θ : $y_\theta^+=(y_1,\dots,y_{\theta-1})$, $y_\theta^-=(y_\theta,y_{\theta+1},\dots)$.

Покажем, что $\hat F_{im}(u,\mu)$ можно представить в виде

$$\hat F_{im}(u,\mu)=\sum_{n:\,x^m u^n\in \hat{I}_i}\hat F_{imn}(u^-_{\theta(m,n,i)},\mu)u^n \tag{I.I.15}$$

Действительно, поскольку функция $\hat F_{im}(u,\mu)$ – бесконечно малая по $\|u\|$ достаточно высокого порядка, то, очевидно, можно записать

$$\hat F_{im}(u,\mu)=\hat F_{im,\left(n_1=\left[\frac{(m,\lambda)-\lambda_i}{\gamma_1}\right],\,n_2^-=0\right)}(u=u_2^-,\mu)\,u_1^{\left[\frac{(m,\lambda)-\lambda_i}{\gamma_1}\right]}+$$

$$+\sum_{0\le n_1\le\left[\frac{(m,\lambda)-\lambda_i}{\gamma_1}\right]-1}\hat F_{imn_1}(u_2^-,\mu)u_1^{n_1}$$

(здесь $[\cdot]$ означает целую часть). Произведя такое же разложение для функций $\hat F_{imn_1}(u_2^-,\mu)$, затем для функций $\hat F_{im,(n_1,n_2)}(u_3^-,\mu)$, которые получаются при разложении функций $\hat F_{imn_1}(u_2^-,\mu)$, и. т.д, получим, в конце концов, формулу (I.I.15). Аналогичные разложения верны и для $\check F_{in}$, $\hat G_{jn}$, $\check G_{jm}$.

Получаем в результате, используя (I.I.10), (I.I.12), что (I.I.9) представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i^{nf} + \sum\limits_{x^m u^n \in \hat{I}_i} \hat{F}_{imn}(u^-_{\theta(m,n,i)},\mu)x^m u^n + \sum\limits_{x^m u^n \in \check{I}_i} \check{F}_{imn}(x^-_{\theta(m,n,i)},\mu)x^m u^n + \tilde{F}_i \\ \\ \dot{u}_j = G_j^{nf} + \sum\limits_{x^m u^n \in \hat{J}_j} \hat{G}_{jmn}(x^-_{\theta(m,n,j)},\mu)x^m u^n + \sum\limits_{x^m u^n \in \check{J}_j} \check{G}_{jmn}(u^-_{\theta(m,n,j)},\mu)x^m u^n + \tilde{G}_j \end{cases} \qquad (I.I.I6)$$

Для доказательства теоремы, очевидно, нужно построить замену координат, обращающую все $\hat{F}_{imn}$, $\check{F}_{imn}$, $\hat{G}_{jmn}$, $\check{G}_{jmn}$ в нуль. Будем искать замену в виде

$$\begin{cases} \bar{x}_i = x_i + \sum\limits_{x^m u^n \in \hat{I}_i} \hat{R}_{imn}(u^-_{\theta(m,n,i)},\mu)x^m u^n + \sum\limits_{x^m u^n \in \check{I}_i} \check{R}_{imn}(x^-_{\theta(m,n,i)},\mu)x^m u^n \\ \\ \bar{u}_j = u_j + \sum\limits_{x^m u^n \in \hat{J}_j} \hat{P}_{jmn}(x^-_{\theta(m,n,j)},\mu)x^m u^n + \sum\limits_{x^m u^n \in \check{J}_j} \check{P}_{jmn}(u^-_{\theta(m,n,j)},\mu)x^m u^n \end{cases} \qquad (I.I.I7)$$

Очевидно, достаточно построить замену так, чтобы получилось

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_i = F_i^{nf}(\bar{x}, \bar{u}, \mu) + \tilde{\tilde{F}}_i(x, u, \mu) \\ \\ \dot{\bar{u}}_j = G_j^{nf}(\bar{x}, \bar{u}, \mu) + \tilde{\tilde{G}}_j(x, u, \mu) \end{cases} \qquad (I.I.I8)$$

где $\tilde{\tilde{F}}_i$ и $\tilde{\tilde{G}}_j$ удовлетворяют тем же требованиям, что и $\tilde{F}_i$, $\tilde{G}_j$. Подставляя (I.I.I7) в (I.I.I5) и сравнивая с (I.I.I8), получаем при учете (I.I.6), (I,I,I6)

$$\sum_{x^m u^n \in \hat{I}_i} \Big[\Big\{ \frac{d}{dt} \hat{R}_{imn}(u_\theta^-,\mu) + \hat{R}_{imn}(u_\theta^-,\mu) \mathcal{D}_{mn}(\mu) - B_i(\mu) \hat{R}_{imn}(u_\theta^-,\mu) + \hat{F}_{imn}(u_\theta^-,\mu) \Big\} x^m u^n + \sum_{\ell=1}^{\ell=i^3} \hat{R}_{imn}(u_\theta^-,\mu) \frac{\partial x^m}{\partial x_\ell} F_\ell(x,u,\mu) u^n + \sum_{\ell=1}^{\ell=j^4} \hat{R}_{imn}(u_\theta^-,\mu) x^m \frac{\partial u^n}{\partial u_\ell} G_\ell(x,u,\mu) +$$

$$+ \frac{\partial \hat{R}_{imn}}{\partial u_\theta^-} \left(G_\theta^-(x, u_\theta^+, u_\theta^-, \mu) - G_\theta^-(0,0,u_\theta^-,\mu) \right) x^m u^n \Big] +$$

$$+ \sum_{x^m u^n \in \check{I}_i} \Big[\Big\{ \frac{d}{dt} \check{R}_{imn}(x_\theta^-,\mu) + \check{R}_{imn}(x_\theta^-,\mu) \mathcal{D}_{mn}(\mu) - B_i(\mu) \check{R}_{imn}(x_\theta^-,\mu) + \check{F}_{imn}(x_\theta^-,\mu) \Big\} \times$$

$$\times x^m u^n + \sum_{\ell=1}^{\ell=i^3} \check{R}_{imn}(x_\theta^-,\mu) \frac{\partial x^m}{\partial x_\ell} F_\ell(x,u,\mu) u^n + \sum_{\ell=1}^{\ell=j^4} \check{R}_{imn}(x_\theta^-,\mu) x^m \frac{\partial u^n}{\partial u_\ell} G_\ell(x,u,\mu) +$$

$$+ \frac{\partial \check{R}_{imn}}{\partial x_\theta^-} \left(F_\theta^-(x_\theta^+, x_\theta^-, u, \mu) - F_\theta^-(0, x_\theta^-, 0, \mu) \right) x^m u^n \Big] +$$

$$+ \sum_{0 < (m,\lambda) \le \alpha,\ (n,\gamma) = (m,\lambda) - \lambda_i} B_{imn}(\mu) [x^m u^n - \bar{x}^m \bar{u}^n] + \tilde{F}_i(x,u,\mu) =$$

$$= \tilde{\tilde{F}}_i(x,u,\mu) \qquad (I.I.19)$$

$$\sum_{x^m u^n \in \hat{J}_j} \Big[\Big\{ \frac{d}{dt} \hat{P}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) + \hat{P}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) \mathcal{D}_{mn}(\mu) - C_j(\mu) \hat{P}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) + \hat{G}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) \Big\} x^m u^n +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{\ell=i^3} \hat{P}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) \frac{\partial x^m}{\partial x_\ell} F_\ell(x,u,\mu) u^n + \sum_{\ell=1}^{\ell=j^4} \hat{P}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) x^m \frac{\partial u^n}{\partial u_\ell} G_\ell(x,u,\mu) +$$

$$+ \frac{\partial \hat{P}_{jmn}}{\partial x_\theta^-} \left(F_\theta^-(x_\theta^+, x_\theta^-, u, \mu) - F_\theta^-(0, x_\theta^-, 0, \mu) \right) x^m u^n \Big] +$$

$$+ \sum_{x^m u^n \in \check{J}_j} \Big[\Big\{ \frac{d}{dt} \check{P}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) + \check{P}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) \mathcal{D}_{mn}(\mu) - C_j(\mu) \check{P}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) + \check{G}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) \Big\} x^m u^n +$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{\ell=i^3} \check{P}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) \frac{\partial x^m}{\partial x_\ell} F_\ell(x,u,\mu) u^n + \sum_{\ell=1}^{\ell=j^4} \check{P}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) x^m \frac{\partial u^n}{\partial u_\ell} G_\ell(x,u,\mu) +$$

$$+ \frac{\partial \check{P}_{jmn}}{\partial u_\theta^-} \left(G_\theta^-(x, u_\theta^+, u_\theta^-, \mu) - G_\theta^-(0,0,u_\theta^-,\mu) \right) x^m u^n \Big] +$$

$$+ \sum_{0 < (n,\gamma) \le \beta,\ (m,\lambda) = (n,\gamma) - \gamma_j} C_{jmn}(\mu) [x^m u^n - \bar{x}^m \bar{u}^n] + \tilde{G}_j(x,u,\mu) = \tilde{\tilde{G}}_j(x,u,\mu) \qquad (I.I.20)$$

Здесь $\theta \equiv \theta(m,n,i)$ в (I.I.19) и $\theta \equiv \theta(m,n,j)$ в (I.I.20);

$\mathcal{D}_{mn}(\mu)$ - матрица такая, что производная от $x^m u^n$ в силу линейной части системы (I.I.5) равна $\mathcal{D}_{mn}(\mu)\, x^m u^n$ (очевидно, что спектр $\mathcal{D}_{mn}(0)$ целиком лежит на прямой $\{Re\,W = (n,\gamma)-(m,\lambda)\}$); через $\frac{d}{dt}$ обозначены для функций аргумента u_θ^- производные в силу системы

$$\dot{u}_\theta^- = C_\theta^-(\mu)\, u_\theta^- + G_\theta^-(x=0, u_\theta^+=0, u_\theta^-, \mu) \qquad \text{(I.I.21)}$$

а для функций аргумента x_θ^- - в силу системы

$$\dot{x}_\theta^- = B_\theta^-(\mu)\, x_\theta^- + F_\theta^-(x_\theta^+=0, x_\theta^-, u=0, \mu) \qquad \text{(I.I.22)}$$

Лемма I.I.2. Левая часть (I.I.19) представляется в виде

$$\sum_{x^m u^n \in \hat{I}_i} (\hat{Q}_{imn}(u_\theta^-,\mu) + \{.\}_{m,n})\, x^m u^n + \sum_{x^m u^n \in \check{I}_i} (\check{Q}_{imn}(x_\theta^-,\mu) + \{.\}_{m,n})\, x^m u^n + \tilde{Q}_i \qquad \text{(I.I.23)}$$

левая часть (I.I.20) - в виде

$$\sum_{x^m u^n \in \hat{J}_j} (\hat{S}_{jmn}(x_\theta^-,\mu) + \{.\}_{m,n})\, x^m u^n + \sum_{x^m u^n \in \check{J}_j} (\check{S}_{jmn}(u_\theta^-,\mu) + \{.\}_{m,n})\, x^m u^n + \tilde{S}_j \qquad \text{(I.I.24)}$$

Здесь $\tilde{Q}_i$, $\tilde{S}_j$ удовлетворяют тем же требованиям, что и $\tilde{F}_i$, $\tilde{G}_j$ в формулировке теоремы; фигурными скобками обозначены коэффициенты в фигурных скобках при мономах $x^m u^n$ в (I.I.19) и (I.I.20); функции $\hat{Q}_{imn}$, $\check{S}_{jmn}$ есть полиномы от u, $\hat{R}_{em'n'}$, $\check{P}_{em'n'}$ и конечного числа их производных, причем в $\hat{Q}_{imn}$, $\check{S}_{jmn}$ входят $\hat{R}_{em'n'}$ и $\check{P}_{em'n'}$ только такие, что $x^{m'} u^{n'} < x^m u^n$; аналогично $\check{Q}_{imn}$, $\hat{S}_{jmn}$ определяются через $\check{R}_{em'n'}$ и $\hat{P}_{em'n'}$ такие, что $x^{m'} u^{n'} < x^m u^n$.

Доказательство

Рассмотрим слагаемое в (I.I.19) $\hat{R}_{imn}(u_\theta^-,\mu) \frac{\partial x^m}{\partial x_e} F_e(x,u,\mu) u^n$. Заметим, что в силу (I.I.10), (I.I.11) $F_e(x,u,\mu)$ разлагается в конечную сумму $\sum\limits_{e'>e} x_{e'} f_{e'}(u,\mu) + \sum\limits_{e_1,e_2} x_{e_1} x_{e_2} f_{e_1 e_2}(u,\mu)$.

Отсюда следует, что рассматриваемое слагаемое представляется в виде суммы членов вида $H_i(u,x,\mu)x^{m'}$, где либо $|m'|>|m|$, либо $(m',\lambda)>(m,\lambda)$. Ниже будет показано, что можно сделать так, чтобы функция $\hat{R}_{imn}$ (а также и $\check{R}_{imn}$, $\hat{P}_{jmn}$, $\check{P}_{jmn}$) были бесконечно малыми достаточно высокого порядка. Отсюда и $H_i(u,x,\mu)$ – функция достаточно высокого порядка малости по $\|u\|$. Легко видеть теперь, что

$$H_i(u,x,\mu)x^{m'}=\sum_{x^{m''}u^{n''}\in\hat{I}_i,\ x^{m''}u^{n''}>x^mu^n}\hat{H}_{im''n''}(u^-_{\theta(m'',n'',i)},\mu)x^{m''}u^{n''}+\tilde{H}_i \qquad (I.I.25)$$

где $\tilde{H}_i(u,x,\mu)$ удовлетворяет тем же требованиям, что и $\tilde{F}_i$ в формулировке теоремы (высокий порядок малости $\tilde{H}_i$ по $\|u\|$ необходим, чтобы разложение (I.I.25) не содержало членов вида $\check{H}_{im''n''}(x^-_{\theta(m'',n'',i)},\mu)x^{m''}u^{n''}$ для $x^{m''}u^{n''}\in\check{I}_i$. Таким образом, для рассматриваемого слагаемого суммы (I.I.I9) имеет место разложение типа (I.I.25). В таком случае будем говорить, что слагаемое раскладывается по мономам из $\hat{I}_i$, большим, чем x^mu^n.

Рассмотрим слагаемое $\hat{R}_{imn}(u^-_\theta,\mu)x^m\frac{\partial u^n}{\partial u_\ell}G_\ell(x,u,\mu)$. В силу (I.I.6), (I.I.I2) оно представляется в виде суммы

$$\hat{R}_{imn}(u^-_\theta,\mu)x^m\frac{\partial u^n}{\partial u_\ell}[G_\ell(x,u,\mu)-G_\ell(0,u,\mu)]+$$
$$+\sum_{(n',\gamma)=\gamma_\ell,\ |n'|>1}\hat{R}_{imn}(u^-_\theta,\mu)x^m\frac{\partial u^n}{\partial u_\ell}C_{\ell,m=0,n'}(\mu)u^{n'}$$

Первый член, поскольку $[G_\ell(x,u,\mu)-G_\ell(0,u,\mu)]$ обращается в нуль при $x=0$, подобно предыдущему раскладывается по мономам из $\hat{I}_i$, большим, чем x^mu^n. Рассмотрим член

$\hat{R}_{imn}(u^-_\theta,\mu)x^m\frac{\partial u^n}{\partial u_\ell}C_{\ell,0,n'}(\mu)u^{n'}$. Очевидно, что его можно переписать в виде $R(u^-_{\theta(m,n,i)},\mu)x^mu^{n''}$, где $|n''|>|n|$,

$(n'',\gamma)=(n,\gamma)-\gamma_\ell+(n',\gamma)$. Но поскольку $(n',\gamma)=\gamma_\ell$, получаем $(n'',\gamma)=(n,\gamma)$, откуда получаем (см.(I.I.I3), (I.I.I4)),что $x^m u^{n''}\in\hat{\mathrm{I}}_i$, $\theta(m,n'',i)=\theta(m,n,i)$и, так как $|n''|>|n|$, то $x^m u^{n''}\succ x^m u^n$. Получаем окончательно, что рассматриваемое слагаемое суммы (I.I.I9) раскладывается по мономам из $\hat{\mathrm{I}}_i$, большим, чем $x^m u^n$.

Рассмотрим слагаемое $\frac{\partial\hat{R}_{imn}}{\partial u_\theta^-}[G_\theta^-(x,u_\theta^+,u_\theta^-,\mu)-G_\theta^-(0,0,u_\theta^-,\mu)]x^m u^n$.

Так же, как и раньше. достаточно рассмотреть часть $\frac{\partial\hat{R}_{imn}}{\partial u_\theta^-}[G_\theta^-(0,u_\theta^+,u_\theta^-,\mu)-G_\theta^-(0,0,u_\theta^-,\mu)]x^m u^n$. Очевидно, она представляется в виде суммы членов вида $R(\overset{\circ}{u}{}^-_{\theta(m,n,i)},\mu)x^m u^{n+n'}$, где у вектора n' хотя бы одна компонента $n'_1,\dots,n'_{\theta(m,n,i)-1}$ ненулевая. Пусть $n'_{\ell'}$ ($\ell'\le\theta(m,n,i)-1$) – первая ненулевая компонента. Поскольку $(n+n',\gamma)>(n,\gamma)$, то из (I.I.I4) $(m,\lambda)-\lambda_i-\gamma_{\theta(m,n,i)}<(n,\gamma)+(n',\gamma)$.С другой стороны, также из (I.I.I4) $(m,\lambda)-\lambda_i\ge(n,\gamma)+\gamma_{\ell'}$. Из этих двух неравенств следует, что рассматриваемый член можно представить в виде $(R(u^-_{\theta(m,n,i)},\mu)u^{n''})x^m u^{n+n'''}$, где 1) $n''+n'''=n'$, 2) все компоненты n'' с номерами, меньшими некоторого $\ell''>\ell'$ нулевые и 3) $(m,\lambda)-\lambda_i-\gamma_{\theta'-1}\ge(n,\gamma)+(n''',\gamma)>(m,\lambda)-\lambda_i-\gamma_{\theta'}$, где $\theta'\le\min(\theta(m,n,i),\ell'')$. Отсюда в силу (I.I.I3), (I.I.I4) получаем, что $x^m u^{n+n'''}\in\hat{\mathrm{I}}_i$, и что $(R(u^-_{\theta(m,n,i)},\mu)u^{n''})$ есть функция от $u^-_{\theta(m,n+n''',i)}$. Кроме того, так как $|n+n'''|>|n|$, то $x^m u^{n+n'''}\succ x^m u^n$.Таким образом, рассматриваемое слагаемое суммы (I.I.I9) также раскладывается по мономам из $\hat{\mathrm{I}}_i$, большим чем $\check{x}^m u^n$.

Для суммы в (I.I.I9) по мономам $x^m u^n\in\check{\mathrm{I}}_i$ аналогично получаем, что кроме слагаемых в фигурных скобках все остальные слагаемые с данными m и n раскладываются по мономам из $\check{I}_i$, большим, чем $x^m u^n$.

Отсюда, очевидно, следует, что для первых двух сумм в (I.I.19) справедливо разложение (I.I.23). Осталось рассмотреть выражение

$$\sum_{0<(m,\lambda)\le\alpha,\ (n,\gamma)=(m,\lambda)-\lambda_i} B_{imn}(\mu)\,[x^m u^n - \bar{x}^m \bar{u}^n].$$

Рассмотрим член $[x^m u^n - \bar{x}^m \bar{u}^n]$, $(n,\gamma)=(m,\lambda)-\lambda_i$. При подстановке в него вместо $\bar{x}$ и $\bar{u}$ выражений (I.I.17), мы обнаружим, что в него войдут различные произведения членов x_ℓ, u_ℓ, $\hat{R}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta};\mu)x^{m'}u^{n'}$, $\check{R}_{\ell m'n'}(x_{\bar\theta};\mu)x^{m'}u^{n'}$, $\hat{P}_{\ell m'n'}(x_{\bar\theta};\mu)x^{m'}u^{n'}$, $\check{P}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta};\mu)x^{m'}u^{n'}$. Поскольку $\hat{R}$, $\check{R}$, $\hat{P}$, $\check{P}$ имеют достаточно высокий порядок малости, произведения, содержащие $\hat{R}(u)\,\check{R}(x)$, $\hat{R}(u)\ \hat{P}(x)$, $\check{R}(x)\ \check{P}(u)$ и $\hat{P}(x)\ \check{P}(u)$, можно отнести к $\tilde{Q}_i$. Для оставшихся произведений построим разложения по мономам из $\hat{I}_i$ и из $\check{I}_i$ (в смысле (I.I.25)). Очевидно, что по мономам из $\hat{I}_i$ раскладываются произведения, содержащие только x_ℓ, u_ℓ, $\hat{R}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta},\mu)x^{m'}u^{n'}$ и $\check{P}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta},\mu)x^{m'}u^{n'}$, а по мономам из $\check{I}_i$ – только произведения, содержащие x_ℓ, u_ℓ, $\check{R}_{\ell m'n'}(x_{\bar\theta},\mu)x^{m'}u^{n'}$ и $\hat{P}_{\ell m'n'}(x_{\bar\theta},\mu)x^{m'}u^{n'}$. При умножении $\hat{R}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta},\mu)x^{m'}u^{n'}$ или $\check{P}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta},\mu)x^{m'}u^{n'}$ на что-нибудь, отличное от $u^{n''}$, мы получим функцию высокого порядка малости по $\|u\|$, помноженную на $x^{m''}$, где $|m''|>|m|$. Отсюда следует, что такое произведение раскладывается по мономам из $\hat{I}_i$, большим, чем $x^m u^n$, и, значит, дает правильный вклад в разложение (I.I.23). То же самое имеет место и для произведений, которые раскладываются по мономам из $\check{I}_i$. Таким образом, осталось рассмотреть, какой вклад в (I.I.23) дают выражения $\hat{R}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta(m',n',\ell)},\mu)x^{m'}u^{n'+n''}$, $\check{P}_{\ell m'n'}(u_{\bar\theta(m',n',\ell)},\mu)x^{m'}u^{n'+n''}$, $\check{R}_{\ell m'n'}(x_{\bar\theta(m',n',\ell)},\mu)\,x^{m'+m''}u^{n'}$ и $\hat{P}_{\ell m'n'}(x_{\bar\theta(m',n',\ell)},\mu)\,x^{m'+m''}u^{n'}$. Первое из них может появиться только в $\bar{x}^{m}\bar{u}^{n''}$, где $m = (0, \ldots, 0, m_\ell = 1, 0, \ldots, 0)$, $(n'', \gamma) = (m, \lambda) - \lambda_i = \lambda_\ell - \lambda_i$. Из последнего равенства получаем $(m', \lambda) - (n', \gamma) - \lambda_\ell = (m', \lambda) - (n'+n'', \gamma) - \lambda_i$, откуда в силу (I.I.I4) получаем, что так как $x^{m'}u^{n'} \in \hat{I}_\ell$, то $x^{m'}u^{n'+n''} \in \hat{I}_i$, причем $\theta(m', n', \ell) = \theta(m', n'+n'', i)$. Теперь, так как $x^{m'}u^{n'+n''} > x^{m}u^{n}$, получаем, что выражение $\hat{R}_{\ell m' n'}(u_{\theta(m',n',\ell)}^{-}, \mu) x^{m'} u^{n'+n''}$ дает правильный вклад в (I.I.23).

Аналогичные рассуждения проводятся для остальных выражений. Формула (I.I.23) доказана, формула (I.I.24) получается такими же рассуждениями. Лемма доказана. (Мы доказали лемму в предположении малости $\hat{R}$, $\check{R}$, $\hat{P}$ и $\check{P}$. Ниже мы остановимся на этом вопросе)

Из леммы следует, что д я построения нужной замены достаточно построить достаточно высокого порядка малости функции R и P такие, чтобы: для любых $x^{m}u^{n} \in \hat{I}_i$ выполнялось

$$\frac{d}{dt}\hat{R}_{imn}(u_\theta^{-}, \mu) = B_i(\mu)\hat{R}_{imn}(u_\theta^{-}, \mu) - \hat{R}_{imn}(u_\theta^{-}, \mu)\mathcal{D}_{mn}(\mu) - \hat{F}_{imn} - \hat{Q}_{imn} \qquad (I.I.26)$$

для $x^{m}u^{n} \in \check{J}_j$ –

$$\frac{d}{dt}\check{P}_{jmn}(u_\theta^{-}, \mu) = C_j(\mu)\check{P}_{jmn}(u_\theta^{-}, \mu) - \check{P}_{jmn}(u_\theta^{-}, \mu)\mathcal{D}_{mn}(\mu) - \check{G}_{jmn} - \check{S}_{jmn} \qquad (I.I.27)$$

(где $\frac{d}{dt}$ - производная в силу (I.I.2I)), и для любых $x^{m}u^{n} \in \check{I}_i$ выполнялось

$$\frac{d}{dt}\check{R}_{imn}(x_\theta^{-}, \mu) = B_i(\mu)\check{R}_{imn}(x_\theta^{-}, \mu) - \check{R}_{imn}(x_\theta^{-}, \mu)\mathcal{D}_{mn}(\mu) - \check{F}_{imn} - \check{Q}_{imn} \qquad (I.I.28)$$

а для $x^{m}u^{n} \in \hat{J}_j$ –

$$\frac{d}{dt}\hat{P}_{jmn}(x_\theta^{-}, \mu) = C_j(\mu)\hat{P}_{jmn}(x_\theta^{-}, \mu) - \hat{P}_{jmn}(x_\theta^{-}, \mu)\mathcal{D}_{mn}(\mu) - \hat{G}_{jmn} - \hat{S}_{jmn} \qquad (I.I.29)$$

(где $\frac{d}{dt}$ - производная в силу (I.I.22)).

Рассмотрим для $x^m u^n \in \hat{I}_i$ систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{R} = B_i(\mu) R - R \mathcal{D}_{mn}(\mu) - \hat{F}_{imn}(u_\theta^-, \mu) - \hat{Q}_{imn}(u_\theta^-, \mu) \\ \dot{u}_\theta^- = C_\theta^-(\mu) u_\theta^- + G_\theta^-(0, 0, u_\theta^-, \mu) \end{cases} \qquad (I.I.30)$$

где $\theta \equiv \theta(m, n, i)$.

Спектр линеаризации второго уравнения лежит при $\mu = 0$ в полосе $\{\mathrm{Re}\, W \geq \gamma_\theta\}$, а спектр линеаризации первого уравнения - на оси $\{\mathrm{Re}\, W = -\lambda_i + (m, \lambda) - (n, \gamma)\}$. Поскольку в силу (I.I.I4) $-\lambda_i + (m, \lambda) - (n, \gamma) < \gamma_\theta$, получаем, что (I.I.30) имеет неведущее многообразие $R = \hat{R}_{imn}(u_\theta^-, \mu)$, где $\hat{R}_{imn}$ удовлетворяет (I.I.26). Гладкость неведущего многообразия такая же, как гладкость правых частей (I.I.30). Подобным же образом находятся $\check{R}$, $\hat{P}$ и $\check{P}$, удовлетворяющие (I.I.27) -(I.I.29) Поскольку функции $\hat{Q}_{mn}$ и $\check{S}_{mn}$ ($\check{Q}_{mn}$ и $\hat{S}_{mn}$) определяются через $\hat{R}_{m'n'}$ и $\check{P}_{m'n'}$ ($\check{R}_{m'n'}$ и $\hat{P}_{m'n'}$) такие, что $x^{m'} u^{n'} < x^m u^n$, то мы можем таким образом, переходя от меньших мономов к большим, последовательно определить из (I.I.26) -(I.I.29) все R и P. Нетрудно заметить при этом, что если порядок малости $\hat{F}$, $\check{F}$, $\hat{G}$ и $\check{G}$ достаточно высок, то высоким будет и порядок малости R и P. Теорема доказана.

Прежде чем строить последовательные приближения (I.I.3) для системы (I.I.7), рассмотрим последовательные приближения для укороченной системы (см. (I.I.6))

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_i^{nf}(x, u, \mu) \\ \dot{u}_j = G_j^{nf}(x, u, \mu) \end{cases} \qquad (I.I.31)$$

Теорема I.I.2. Последовательные приближения (I.I.3) для системы (I.I.3I) имеют вид

$$\begin{cases} x_i^{(k)}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) = e^{-\lambda_i t}\sum\limits_{\ell} b_{i\ell}^{(k)}(t,\tau,\mu)\,\xi^{m^{(k)}(i,\ell)}\eta^{n^{(k)}(i,\ell)}e^{-\varkappa_{i\ell}^{(k)}\tau} \\ u_j^{(k)}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) = e^{-\gamma_j(\tau-t)}\sum\limits_{\ell} c_{j\ell}^{(k)}(t,\tau,\mu)\,\xi^{p^{(k)}(j,\ell)}\eta^{q^{(k)}(j,\ell)}e^{-\zeta_{j\ell}^{(k)}\tau} \end{cases} \tag{I.I.32}$$

где суммы берутся по некоторым конечным наборам индексов; $\varkappa_{i\ell}^{(k)}$ и $\zeta_{j\ell}^{(k)}$ - некоторые неотрицательные числа; неотрицательные целочисленные векторы $m^{(k)}(i,\ell)$, $n^{(k)}(i,\ell)$, $p^{(k)}(j,\ell)$, $q^{(k)}(j,\ell)$, таковы, что

$$\begin{cases} (n^{(k)}(i,\ell),\gamma) = (m^{(k)}(i,\ell),\lambda) - \lambda_i = \varkappa_{i\ell}^{(k)} \\ (p^{(k)}(j,\ell),\lambda) = (q^{(k)}(j,\ell),\gamma) - \gamma_j = \zeta_{j\ell}^{(k)} \end{cases} \tag{I.I.33}$$

$b_{i\ell}^{(k)}$, $c_{j\ell}^{(k)}$ - медленно растущие экспоненты от t и τ (показатель роста при каждом k может быть сделан сколь угодно малым за счет малости $\|\mu\|$), причем если $\varkappa_{i\ell}^{(k)}=0$, то $b_{i\ell}^{(k)}$ не зависит от τ, а если $\zeta_{j\ell}^{(k)}=0$, то $c_{j\ell}^{(k)}$ зависит только от $(t-\tau)$. Начиная с некоторого k_0, все члены с $\varkappa_{i\ell}\le\alpha-\lambda_i$ и с $\zeta_{j\ell}\le\beta-\gamma_j$ стабилизируются, в том смысле, что разность $\{x^{(k_0+1)}-x^{(k_0)},\, u^{(k_0+1)}-u^{(k_0)}\}$ при разложении по формуле (I.I.32) содержит только члены с $\varkappa_{i\ell}>\alpha-\lambda_i$ и $\zeta_{j\ell}^{(k)}>\beta-\gamma_j$.

Доказательство. Докажем формулы (I.I.32), (I.I.33) индукцией по k. При $k=1$ имеем $x_i^{(1)}=e^{B_i(\mu)t}\xi_i$, $u_j^{(1)}=e^{-C_j(\mu)(t-\tau)}\eta_j$. Эти равенства можно переписать в виде, соответствующем (I.I.32):

$$\begin{cases} x_i^{(1)} = e^{-\lambda_i t} b_{i1}^{(1)}(t)\, \xi^{m^{(1)}(i,1)} \eta^{n^{(1)}(i,1)} e^{-\varkappa_{i1}^{(1)}\tau} \\ u_j^{(1)} = e^{-\gamma_j(\tau-t)} c_{j1}^{(1)}(\tau-t)\, \xi^{p^{(1)}(j,1)} \eta^{q^{(1)}(j,1)} e^{-\zeta_{j1}^{(1)}\tau} \end{cases}$$

где $b_{i1}^{(1)} = e^{(\lambda_i + B_i(\mu))t}$, $c_{j1}^{(1)} = e^{(\gamma_j - C_j(\mu))(\tau-t)}$,

$\varkappa_{i1}^{(1)} = \zeta_{j1}^{(1)} = 0$, $m^{(1)}(i,1) = (0,\dots,0, m_i = 1, 0, \dots, 0)$,

$q_{j1}^{(1)}(j,1) = (0,\dots,0, q_j = 1, 0, \dots, 0)$, $n^{(1)}(i,1) = 0$, $p^{(1)}(j,1) = 0$.

Очевидно, что (I.I.33) выполнено.

Предположим теперь (I.I.32), (I.I.33) выполнены при некотором k.

Вычислим $\{x^{(k+1)}, u^{(k+1)}\}$, Из (I.I.6), (I.I.3) находим, что $x_i^{(k+1)}$ состоит из суммы конечного числа слагаемых (взятых с некоторыми коэффициентами) вида $\int_0^t e^{B_i(\mu)(t-s)} (x^{(k)}(s))^m (u^{(k)}(s))^n ds$,

где
$$(n, \gamma) = (m, \lambda) - \lambda_i \qquad \text{(I.I.34)}$$

Из (I.I.32), (I.I.34) получаем, что это слагаемые вида

$$e^{-\lambda_i t} \int_0^t e^{(B_i(\mu)+\lambda_i)(t-s)} \Big(\prod_{h=1}^{h=i^s} \Big(\sum_{\ell} b_{h\ell}^{(k)}(s,\tau)\, \xi^{m^{(k)}(h,\ell)} \eta^{n^{(k)}(h,\ell)} e^{-\varkappa_{h\ell}^{(k)}\tau}\Big)^{m_h}\Big) \times$$

$$\times \Big(\prod_{j=1}^{j=j^u} \Big(\sum_{\ell} c_{j\ell}^{(k)}(s,\tau)\, \xi^{p^{(k)}(j,\ell)} \eta^{q^{(k)}(j,\ell)} e^{-(\gamma_j + \zeta_{j\ell}^{(k)})\tau}\Big)^{n_j}\Big) ds$$

Отсюда, так как $e^{(B_i(\mu)+\lambda_i)(t-s)}$ есть медленно растущая экспонента от $(t-s)$ (тем медленней, чем меньше $\|\mu\|$), то получаем, что $x_i^{(k+1)}$ представимо в виде (I.I.32), причем

$$\begin{cases} m^{(k+1)}(i,\ell') = \sum\limits_{h=1}^{h=i^s} \sum\limits_{\ell} m(h,\ell) m^{(k)}(h,\ell) + \sum\limits_{j=1}^{j=j^u} \sum\limits_{\ell} n(j,\ell) p^{(k)}(j,\ell) \\ n^{(k+1)}(i,\ell') = \sum\limits_{h=1}^{h=i^s} \sum\limits_{\ell} m(h,\ell) n^{(k)}(h,\ell) + \sum\limits_{j=1}^{j=j^u} \sum\limits_{\ell} n(j,\ell) q^{(k)}(j,\ell) \end{cases} \qquad \text{(I.I.35)}$$

$$\varkappa_{il'}^{(k+1)} = \sum_{h=1}^{h=i^s} \sum_{\ell} m(h,\ell)\varkappa_{h\ell}^{(k)} + \sum_{j=1}^{j=j^u} \sum_{\ell} n(j,\ell)\,\zeta_{j\ell}^{(k)} + (n,\gamma) \quad (I.I.36)$$

$$b_{il'}^{(k+1)} = \int_0^t e^{(B_i(\mu)+\lambda_i)(t-s)} \Big(\prod_{h=1}^{h=i^s} \prod_{\ell} [b_{h\ell}^{(k)}(s,\tau,\mu)]^{m(h,\ell)}\Big)\Big(\prod_{j=1}^{j=j^u} [c_{j\ell}^{(k)}(s,\tau,\mu)]^{n(j,\ell)}\Big) ds \quad (I.I.37)$$

где неотрицательные $m(h,\ell)$ и $n(j,\ell)$ таковы, что $m_h = \sum_{\ell} m(h,\ell)$, $n_j = \sum_{\ell} n(j,\ell)$. Аналогично получаем, что $u_j^{(k+1)}$ также представимо в виде (I.I.32), причем

$$\begin{cases} p^{(k+1)}(j,\ell') = \sum_{i=1}^{i=i^s} \sum_{\ell} m(i,\ell)\, m^{(k)}(i,\ell) + \sum_{h=1}^{h=j^u} \sum_{\ell} n(h,\ell)\, p^{(k)}(h,\ell) \\ q^{(k+1)}(j,\ell') = \sum_{i=1}^{i=i^s} \sum_{\ell} m(i,\ell)\, n^{(k)}(i,\ell) + \sum_{h=1}^{h=j^u} \sum_{\ell} n(h,\ell)\, q^{(k)}(h,\ell) \end{cases} \quad (I.I.38)$$

$$\begin{cases} \zeta_{j\ell'}^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{i=i^s} \sum_{\ell} m(i,\ell)\varkappa_{i\ell}^{(k)} + \sum_{h=1}^{h=j^u} \sum_{\ell} n(h,\ell)\zeta_{h\ell}^{(k)} + (m,\lambda) \\ c_{j\ell'}^{(k+1)} = \int_t^{\tau} e^{(C_j(\mu)-\gamma_j)(t-s)} \Big(\prod_{i=1}^{i=i^s} \prod_{\ell} [b_{i\ell}^{(k)}(s,\tau,\mu)]^{m(i,\ell)}\Big)\Big(\prod_{h=1}^{h=j^u} \prod_{\ell} [c_{h\ell}^{(k)}(s,\tau,\mu)]^{n(h,\ell)}\Big) ds \end{cases} \quad (I.I.39)$$

где $m_i = \sum_{\ell} m(i,\ell)$, $n_h = \sum_{\ell} n(h,\ell)$ и вектора $m = (m_1, \dots, m_{i^s})$ и $n = (n_1, \dots, n_{j^u})$ удовлетворяют условию

$$(n,\gamma) - \gamma_j = (m,\lambda) \quad (I.I.40)$$

Из (I.I.35), (I.I.33), (I.I.34) и (I.I.36) находим $(m^{(k+1)}(i,\ell'),\lambda) - \lambda_i =$

$$= \sum_h \sum_{\ell} m(h,\ell)(m^{(k)}(h,\ell),\lambda) + \sum_j \sum_{\ell} n(j,\ell)(p^{(k)}(j,\ell),\lambda) - \lambda_i =$$

$$= \sum_h \sum_{\ell} m(h,\lambda)(\lambda_h + \varkappa_{h\ell}^{(k)}) + \sum_j \sum_{\ell} n(j,\ell)\zeta_{j\ell}^{(k)} - \lambda_i = \varkappa_{i\ell'}^{(k+1)} - (n,\gamma) +$$

$$+ \sum_h m_h \lambda_h - \lambda_i = \varkappa_{i\ell'}^{(k+1)}$$

Аналогично проверяется равенство $(n^{(k+1)}(i,\ell'),\gamma) = \varkappa_{i\ell'}^{(k+1)}$. Равенство $(q^{(k+1)}(j,\ell'),\gamma) - \gamma_j = (p^{(k+1)}(j,\ell'),\lambda) = \zeta_{j\ell'}^{(k+1)}$ таким же образом получается из (I.I.38), (I.I.39), (I.I.33), (I.I.40).

Заметим, что если $\varkappa_{i\ell'}^{(k+1)} = 0$, то из (I.I.36) $n = 0$ и $\varkappa_{h\ell}^{(k)} = 0$, тогда из (I.I.37) $b_{i\ell'}^{(k+1)}$ не зависит от τ. Точно так же, из (I.I.39), если $\zeta_{j\ell'}^{(k+1)} = 0$, то $c_{j\ell'}^{(k+1)}$ зависит только от $(\tau - t)$.

Мы доказали, что для $m^{(k+1)}$, $n^{(k+1)}$, $p^{(k+1)}$, $q^{(k+1)}$, $x^{(k+1)}$, и $\zeta^{(k+1)}$ выполнено (I.I.33). Таким образом (I.I.32), (I.I.33) верны для всех k.

Из (I.I.36) видно, что если член с номером l разложения (I.I.32) для $x_i^{(k)}$ дает вклад при вычислении (I.I.3) в член с номером l' в разложении для $x_{i'}^{(k+1)}$, то либо $x_{i'l'}^{(k+1)} \geq x_{il}^{(k)} + \gamma_1$ (если в (I.I.36) $n \neq 0$), либо $i' > i$ и $x_{i'l'}^{(k+1)} \geq x_{il}^{(k)}$ (это при $n = 0$: тогда в силу (I.I.34) $(m, \lambda) = \lambda_{i'}$, откуда $m_i \neq 0$ только при $i < i'$). Также из (I.I.36), если член с номером l в $u_j^{(k)}$ дает вклад в член с номером l' в $x_{i'}^{(k+1)}$, то $x_{i'l'}^{(k+1)} \geq \zeta_{jl}^{(k)} + \gamma_1$ (здесь уже не может быть $n = 0$). Аналогичные неравенства получаются из (I.I.39), (I.I.40):
I) либо $\zeta_{j'l'}^{(k+1)} \geq \zeta_{jl}^{(k)} + \lambda_1$, либо $j' > j$ и $\zeta_{j'l'}^{(k+1)} \geq \zeta_{jl}^{(k)}$,
и 2) $\zeta_{j'l'}^{(k+1)} \geq x_{il}^{(k)} + \lambda_1$.

Подытоживая, получаем следующее утверждение: пусть $\tilde{x}_i^{(h)}$ и $\tilde{\zeta}_j^{(h)}$ - такие последовательности, что $\tilde{x}_i^{(0)} = 0$, $\tilde{\zeta}_j^{(0)} = 0$,

$$\tilde{x}_{i'}^{(h+1)} = \min\left(\gamma_1 + \min_{i,j}\left(\tilde{x}_i^{(h)}, \tilde{\zeta}_j^{(h)}\right), \min_{i<i'} \tilde{x}_i^{(h)}\right),$$

$$\tilde{\zeta}_{j'}^{(h+1)} = \min\left(\lambda_1 + \min_{i,j}\left(\tilde{x}_i^{(h)}, \tilde{\zeta}_j^{(h)}\right), \min_{j<j'} \tilde{\zeta}_j^{(h)}\right).$$

Тогда, если для некоторого h на k-ой итерации в $\{x^{(k)}, u^{(k)}\}$ стабилизируются все члены из (I.I.32) с $x_{il}^{(k)} \leq \tilde{x}_i^{(h)}$ и с $\zeta_{jl}^{(k)} \leq \tilde{\zeta}_j^{(h)}$, то на $(k+1)$-ом шаге стабилизируются все члены с $x_{il}^{(k+1)} \leq \tilde{x}_i^{(h+1)}$, $\zeta_{jl}^{(k+1)} \leq \tilde{\zeta}_j^{(h+1)}$. Поскольку с ростом h все $\tilde{x}_i^{(h)}$ и $\tilde{\zeta}_j^{(h)}$ стремятся к бесконечности, то из данного утверждения сразу следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению полной системы (I.I.7).
Отбросим в разложении (I.I.32) для $x_i^{(k_0)}$ из теоремы I.I.2 все члены с $x_{il}^{(k_0)} > \alpha - \lambda_i$, а в $u_j^{(k_0)}$ - все члены с

$\varphi_{jl}^{(k_0)} > \beta - \gamma_j$. Результат обозначим соответственно через $x_i^{n\delta}$ и $u_j^{n\delta}$.

Теорема I.I.3. Решение $\{x^*, u^*\}$ краевой задачи (I.I.2) для системы (I.I.7) представляется в виде

$$\begin{cases} x_i^* = x_i^{n\delta}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) + \tilde{x}_i^*(t;\tau,\xi,\eta,\mu) \\ u_j^* = u_j^{n\delta}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) + \tilde{u}_j^*(t;\tau,\xi,\eta,\mu) \end{cases} \tag{I.I.41}$$

где $\tilde{x}^* \in C^{\rho'}$, $\tilde{u}_j^* \in C^{\rho'}$ (ρ' - гладкость системы (I.I.7)) и для любых неотрицательных целочисленных m', n', p', q', r таких, что $0 \le |m'|+|n'|+|r| \le \rho'$, $0 \le |p'|+|q'|+|r| \le \rho'$ имеют место неравенства

$$\begin{cases} \left\| \dfrac{\partial^{|m'|+|n'|+|r|} \tilde{x}_i^*}{\partial\xi^{m'}\partial\eta^{n'}\partial(\mu,\tau,t)^r} \right\| \le N \times \begin{Bmatrix} e^{-\lambda_i t} e^{(\lambda_i-\alpha)\tau} & \text{при } \lambda_i < \alpha \\ e^{-\alpha t} & \text{при } \lambda_i > \alpha \end{Bmatrix} \times \sum\limits_{\{m,n\}\in I_{i\alpha}} \|\xi\|^{\overline{m-m'}} \|\eta\|^{\overline{n-n'}} \\ \left\| \dfrac{\partial^{|p'|+|q'|+|r|} \tilde{u}_j^*}{\partial\xi^{p'}\partial\eta^{q'}\partial(\mu,\tau,t)^r} \right\| \le N \times \begin{Bmatrix} e^{\gamma_j t} e^{-\beta\tau} & \text{при } \gamma_j < \beta \\ e^{\beta t} e^{-\beta\tau} & \text{при } \gamma_j > \beta \end{Bmatrix} \times \sum\limits_{\{p,q\}\in J_{j\beta}} \|\xi\|^{\overline{p-p'}} \|\eta\|^{\overline{q-q'}} \end{cases} \tag{I.I.42}$$

для некоторого $N > 0$.

Доказательство. Рассмотрим пространство Ψ функций $\{x, u\}$, ($x = (x_1, \ldots, x_{i_s})$, $u = (u_1, \ldots, u_{j_u})$), представимых в виде (I.I.41):

$$\begin{cases} x(t;\tau,\xi,\eta,\mu) = x^{n\delta}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) + \tilde{x}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) \\ u(t;\tau,\xi,\eta,\mu) = u^{n\delta}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) + \tilde{u}(t;\tau,\xi,\eta,\mu) \end{cases}$$

и удовлетворяющих неравенствам

$$\left\|\frac{\partial^{|m'|+|n'|+|\nu|}\tilde{x}_i}{\partial\xi^{m'}\partial\eta^{n'}\partial(\mu,\tau,t)^{\nu}}\right\| \le \begin{Bmatrix} e^{-\lambda_i(1-\varepsilon)t}e^{(\lambda_i(1-2\varepsilon)-\alpha)\tau} & \text{при} & \lambda_i<\alpha \\ e^{-\alpha(1+\varepsilon)t} & \text{при} & \lambda_i>\alpha \end{Bmatrix} \times \sum_{\{m,n\}\in I_{i\alpha}} N(|m|+|n|)\|\xi\|^{\overline{m-m'}}\|\eta\|^{\overline{n-n'}}$$

$$\left\|\frac{\partial^{|p'|+|q'|+|\nu|}\tilde{u}_j}{\partial\xi^{p'}\partial\eta^{q'}\partial(\mu,t,\tau)^{\nu}}\right\| \le \begin{Bmatrix} e^{\gamma_j(1-\varepsilon)t}e^{-(\beta+\gamma_j\varepsilon)\tau} & \text{при} & \gamma_j<\beta \\ e^{\beta(1+\varepsilon)t}e^{-\beta(1+\varepsilon)\tau} & \text{при} & \gamma_j>\beta \end{Bmatrix} \times \sum_{\{p,q\}\in J_{j\beta}} N(|p|+|q|)\|\xi\|^{\overline{p-p'}}\|\eta\|^{\overline{q-q'}} \qquad \text{(I.I.42)}'$$

,

где ε - достаточно малое положительное число, $N(\cdot)$ - некоторая положительная достаточно быстро возрастающая функция целого аргумента. Заметим, что так как $0\le t\le\tau$, то из (I.I.42)' следует (I.I.42).

Лемма I.I.3 При надлежащем выборе ε и $N(\cdot)$ $\mathcal{P}\Psi\subseteq\Psi$ (где $\mathcal{P}$ - оператор правых частей (I.I.2) или (I.I.3)).

Доказательство. Для произвольной $\{x,u\}=\{x^{нф}+\tilde{x},u^{нф}+\tilde{u}\}$ рассмотрим разность $\mathcal{P}(\{x,u\})-\{x^{нф},u^{нф}\}$. Очевидно, нужно показать, что эта разность удовлетворяет (I.I.42). Из (I.I.3), (I.I.7) получаем, что i -ая компонента координаты x этой разности представляется в виде

$$\Big(e^{B_i(\mu)t}\xi_i+\int_0^t e^{B_i(\mu)(t-s)}F_i'(x^{нф}(s),u^{нф}(s),\mu)ds-x_i^{нф}\Big)+$$
$$+\int_0^t e^{B_i(\mu)(t-s)}[F_i'(x^{нф}(s)+\tilde{x}(s),u^{нф}(s)+\tilde{u}(s),\mu)-F_i'(x^{нф}(s),u^{нф}(s),\mu)]ds+$$
$$+\int_0^t e^{B_i(\mu)(t-s)}\tilde{F}_i'(x^{нф}(s)+\tilde{x}(s),u^{нф}(s)+\tilde{u}(s),\mu)\,ds \qquad \text{(I.I.43)}$$

(здесь через F_i' обозначен отрезок нормальной формы (I.I.6) без линейной части: $F_i^{нф}=F_i'+B_i(\mu)x_i$, через $\tilde{F}_i'$ - $\tilde{F}_i$ без линейной части).

Как это следует из теоремы I.I.2, первое слагаемое (I.I.43) удовлетворяет (I.I.42)$'$ при достаточно малом ε для некоторого N', не зависящего от того, с каким N удовлетворяет (I.I.42)$'$ $\{x, u\}$. (Заметим при этом, что это слагаемое содержит медленно растущие функции t и τ из (I.I.32): $b(t,\tau,\mu)$ и $c(t,\tau,\mu)$. Они выражаются через матричные экспоненты вида $e^{(B_i(\mu)+\lambda_i)t}$ и $e^{(C_j(\mu)-\gamma_j)(\tau-t)}$, и при $\mu=0$ имеют степенной рост. Чтобы получить для этих функций оценку сверху $N'e^{\varepsilon'(t+\tau)}$ с достаточно малым ε', мы должны сделать достаточно малой $\|\mu\|$ и достаточно большим N').

Перейдем к оценке второго слагаемого (I.I.43). Из (I.I.6) оно представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида

$$B_{imn}(\mu)\int_0^t e^{B_i(\mu)(t-s)}\left[(x^{*}(s)+\tilde{x}(s))^m(u^{*}(s)+\tilde{u}(s))^n-(x^{*}(s))^m(u^{*}(s))^n\right]ds \qquad (\text{I.I.44})$$

где

$$(n,\gamma)=(m,\lambda)-\lambda_i \qquad (\text{I.I.45})$$

$$0\le(m,\lambda)\le\alpha,\quad 0\le(n,\gamma)\le\alpha-\lambda_i<\beta \qquad (\text{I.I.46})$$

$$|m|+|n|>1 \qquad (\text{I.I.47})$$

Очевидно, что (I.I.44) представляется в виде суммы конечного числа слагаемых вида

$$Z=B_{imn}(\mu)\int_0^t e^{B_i(\mu)(t-s)}(x^{*}(s))^{\bar m}(\tilde{x}(s))^{\tilde m}(u^{*}(s))^{\bar n}(\tilde{u}(s))^{\tilde n}\,ds \qquad (\text{I.I.48})$$

где

$$\bar n+\tilde n=n,\ \bar m+\tilde m=m,\ |\tilde m|+|\tilde n|>0 \qquad (\text{I.I.49})$$

Из (I.I.46), (I.I.45) получаем, в частности, что $\lambda_i<\alpha$ и что в m отличны от нуля только компоненты m_h такие, что $\lambda_h<\alpha$, а в n – компоненты n_j такие, что $\gamma_j<\beta$.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации в (I.I.42)$'$ всюду нужно положить $\lambda < \alpha$, $\gamma < \beta$. При этом из (I.I.42)$'$ получим

$$\begin{cases} \|\tilde{x}_h(s)\| \le e^{-(\lambda_h - \varepsilon\lambda_h)s} e^{(\lambda_h - \alpha - 2\varepsilon\lambda_h)\tau} \sum\limits_{\ell} N(|\hat{m}(h,\ell)| + |\hat{n}(h,\ell)|) \|\xi\|^{\hat{m}(h,\ell)} \|\eta\|^{\hat{n}(h,\ell)} \\ \\ \|\tilde{u}_j(s)\| \le e^{(\gamma_j - \varepsilon\gamma_j)s} e^{-(\beta + \varepsilon\gamma_j)\tau} \sum\limits_{\ell} N(|\hat{p}(j,\ell)| + |\hat{q}(j,\ell)|) \|\xi\|^{\hat{p}(j,\ell)} \|\eta\|^{\hat{q}(j,\ell)} \end{cases} \quad \text{(I.I.50)}$$

где $\hat{m}(h,\ell)$, $\hat{n}(h,\ell)$, $\hat{p}(j,\ell)$, $\hat{q}(j,\ell)$ - целочисленные неотрицательные векторы такие, что для любых h, j, ℓ

$$\begin{cases} (\hat{m}(h,\ell),\lambda) > \alpha, \quad (\hat{n}(h,\lambda),\gamma) > \alpha - \lambda_h \\ \\ (\hat{p}(j,\ell),\lambda) > \beta - \gamma_j, \quad (\hat{q}(j,\ell),\gamma) > \beta \end{cases} \quad \text{(I.I.51)}$$

Оценку для $\|x_h^{\mu,1}(s)\|$ и $\|u_j^{\mu,1}(s)\|$ извлечем из (I.I.32):

$$\begin{cases} \|x_h^{\mu,1}(s)\| \le N'' e^{-\lambda_i s} e^{\varepsilon'' s} \sum\limits_{\ell} \|\xi\|^{m(h,\ell)} \\ \\ \|u_j^{\mu,1}(s)\| \le N'' e^{-\gamma_j(\tau - s)} e^{\varepsilon''(\tau - s)} \sum\limits_{\ell} \|\eta\|^{q(j,\ell)} \end{cases} \quad \text{(I.I.52)}$$

где ε'' может быть сделано сколь угодно малым за счет малости $\|\mu\|$ и $(N'')^{-1}$; $m(h,\ell)$ и $q(j,\ell)$ - неотрицательные целочисленные векторы такие, что для любых h, j, ℓ

$$(m(h,\ell),\lambda) \ge \lambda_h, \quad (q(j,\ell),\gamma) \ge \gamma_j \quad \text{(I.I.53)}$$

Подставляя в (I.I.48) (I.I.50) и (I.I.52), используя оценку $\|e^{B_i(\mu)(t-s)}\| \le N''' e^{-(\lambda_i - \varepsilon''')(t-s)}$, при учете (I.I.45) получаем

$$\|Z\| \le N''' \|B_{i\,mn}(\mu)\| e^{-(\lambda_i - \varepsilon''')t} \int_0^t e^{[-\varepsilon''' + \varepsilon''(|m'| - |n'|) + \varepsilon((\tilde{m},\lambda) - (\tilde{n},\gamma))]s} ds \times$$

$$\times e^{(\varepsilon''|n'| - \varepsilon(\tilde{n},\gamma) - 2\varepsilon(\tilde{m},\lambda))\tau} e^{[(\tilde{m},\lambda) - \alpha|\tilde{m}| - (n',\gamma) - \beta|\tilde{n}|]\tau} \times \sum N^0 \|\xi\|^{m^0} \|\eta\|^{n^0} \quad \text{(I.I.54)}$$

где сумма берется по всевозможным наборам неотрицательных целочисленных векторов $\bar{m}(l)$, $\bar{n}(l)$, $\tilde{m}(l)$, $\tilde{n}(l)$ таких, что

$$\sum_l \tilde{m}(l)=\tilde{m},\ \sum_l \bar{m}(l)=\bar{m},\ \sum_l \bar{n}(l)=\bar{n},\ \sum_l \tilde{n}(l)=\tilde{n} \qquad (I.I.55)$$

При этом

$$\begin{cases} m^o=\sum\limits_l \sum\limits_h \bar{m}_h(l)m(h,l)+\sum\limits_l \sum\limits_h \tilde{m}_h(l)\hat{m}(h,l)+\sum\limits_l \sum\limits_j \tilde{n}_j(l)\hat{p}(j,l) \\ n^o=\sum\limits_l \sum\limits_j \bar{n}_j(l)q(j,l)+\sum\limits_l \sum\limits_h \tilde{m}_h(l)\hat{n}(h,l)+\sum\limits_l \sum\limits_j \tilde{n}_j(l)\hat{q}(j,l), \end{cases} \qquad (I.I.56)$$

а N^o – есть произведение $N(|\hat{m}|+|\hat{n}|)$ и $N(|\hat{p}|+|\hat{q}|)$ по всем $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{p}$, $\hat{q}$, дающим вклад в $\{m^o, n^o\}$. Заметим, что в силу (I.I.47) $|m^o|+|n^o|>|\hat{m}(h,l)|+|\hat{n}(h,l)|$ $|m^o|+|n^o|>|\hat{p}(j,l)|+|\hat{q}(j,l)|$ для любых $\hat{m}$, $\hat{n}$, $\hat{p}$, $\hat{q}$, дающих вклад в $\{m^o, n^o\}$. Поэтому, если функция $N(\cdot)$ возрастает достаточно быстро то

$$N(|m^o|+|n^o|) >> N^o \qquad (I.I.57)$$

Из (I.I.5I), (I.I.55), (I.I.56), (I.I.49), (I.I.53)

$$(m^o,\lambda)>(\bar{m},\lambda)+\alpha|\tilde{m}|+|\tilde{n}|\beta-(\bar{n},\gamma) \qquad (I.I.58)$$

$$(n^o,\gamma)>|\tilde{m}|\alpha-(\bar{m},\lambda)+(\bar{n},\gamma)+|\tilde{n}|\beta \qquad (I.I.59)$$

Покажем, что из (I.I.58) следует

$$(m^o,\lambda)>\alpha \qquad (I.I.60)$$

Действительно, если $|\tilde{m}|\neq 0$, то так как $\gamma_j<\beta$, то $|\tilde{n}|\beta>(\bar{n},\gamma)$ и (I.I.60) очевидно следует из (I.I.58). Если $\tilde{m}=0$, то из (I.I.49), (I.I.45), (I.I.58) получем $(m^o,\lambda)>\beta+\lambda_i$, откуда (I.I.60) следует по определению чисел β и α. Аналогично показывается, что из (I.I.59) следует

$$(n^o,\gamma)>\alpha-\lambda_i \qquad (I.I.6I)$$

Из (I.I.6I), (I.I.60) и определения множества $I_{i\alpha}$ получаем, что если $\{m^0, n^0\} \notin I_{i\alpha}$, то $m^0 = m^1 + \hat{m}$, $n^0 = n^1 + \hat{n}$, где $m_i^1 \geq 0, n_j^1 \geq 0, |m^1| + |n^1| \geq 1$ и $\{\hat{m}, \hat{n}\} \in I_{i\alpha}$. Заметим, что за счет малости δ (размера окрестности седла, в которой ведутся рассмотрения), величина $\|\xi\|^{m^1}\|\eta\|^{n^1}$ может быть сделана сколь угодно малой. Отсюда и из (I.I.57) можно переписать (I.I.54) в виде

$$\|Z\| \leq \delta' e^{-(\lambda_i - \varepsilon''')t} \int_0^t e^{[-\varepsilon''' + \varepsilon''(|\tilde{m}| - |\tilde{n}|) + \varepsilon((\tilde{m},\lambda) - (\tilde{n},\gamma))]s} ds \times$$

$$\times e^{(\varepsilon''|\tilde{n}| - \varepsilon(\tilde{n},\gamma) - 2\varepsilon(\tilde{m},\lambda))\tau} e^{[(\tilde{m},\lambda) - \alpha|\tilde{m}| - (\tilde{n},\gamma) - \beta|\tilde{n}|]\tau} \times$$

$$\times \sum_{\{\hat{m},\hat{n}\} \in I_{i\alpha}} N(|\hat{m}| + |\hat{n}|) \|\xi\|^{\hat{m}} \|\eta\|^{\hat{n}} \qquad \text{(I.I.62)}$$

где δ' может быть сделано сколь угодно малым, если δ достаточно мало и $N(.)$ возрастает достаточно быстро.

Рассмотрим выражение $e^{[(\tilde{m},\lambda) - \alpha|\tilde{m}| - (\tilde{n},\gamma) - \beta|\tilde{n}|]\tau}$, входящее в (I.I.62). Если $\tilde{n} \neq 0$, то $|\tilde{n}|\beta + (\bar{n},\gamma) + |\tilde{m}|\alpha - (\tilde{m},\lambda) \geq \beta > \alpha - \lambda_i + \varepsilon^0$ для некоторого фиксированного ε^0 , которое зависит только от соотношения между α , β , λ и γ .

Если $\tilde{n} = 0$, то из (I.I.49), (I.I.45) получаем $|\tilde{n}|\beta + (\bar{n},\gamma) + |\tilde{m}|\alpha - (\tilde{m},\lambda) = |\tilde{m}|\alpha + (\bar{m},\lambda) - \lambda_i$ и если $|\tilde{m}| > 1$ или $|\tilde{m}| = 1$ и $\bar{m} \neq 0$, то вновь получаем $|\tilde{n}|\beta + (\bar{n},\gamma) + |\tilde{m}|\alpha - (\tilde{m},\lambda) > \alpha - \lambda_i + \varepsilon^0$.

При выполнении этого неравенства, очевидно, что, если ε , ε'', ε''' достаточно малы по сравнению с ε^0 , то из (I.I.62) следует для $\|Z\|$ неравенство типа (I.I.42)$'$ с дополнительным малым множителем δ' .

В единственном нерассмотренном случае $\tilde{n} = 0$, $\bar{m} = 0$, $|\tilde{m}| = 1$ имеем $n = \bar{n}$, $m = \tilde{m}$ и $|\tilde{n}|\beta + (\bar{n},\gamma) + |\tilde{m}|\alpha - (\tilde{m},\lambda) = (n,\gamma) + \alpha - (m,\lambda) = \alpha - \lambda_i$.

(I.I.62) записывается при этом в виде

$$\|Z\| \le \delta' e^{-(\lambda_i-\varepsilon''')t}\int_0^t e^{[-\varepsilon'''-\varepsilon''|n|+\varepsilon\lambda_h]s}ds\cdot e^{(\varepsilon''|n|-2\varepsilon\lambda_h)\tau}\times$$

$$\times e^{(\lambda_i-\alpha)\tau}\sum_{\{\hat m,\hat n\}\in I_{i\alpha}} N(|\hat m|+|\hat n|)\|\xi\|^{\hat m}\|\eta\|^{\hat n} \qquad \text{(I.I.63)}$$

где h – единственный индекс такой, что $\hat n_h = 1$. Из (I.I.45) получаем $\lambda_h = \lambda_i + (n,\gamma)$, то есть $\lambda_h > \lambda_i$. Выберем $\varepsilon''', \varepsilon''$ малыми по сравнению с ε так, чтобы $\varepsilon\lambda_h > \varepsilon'''+\varepsilon''|n|$. Тогда

$$\int_0^t e^{[-\varepsilon'''-\varepsilon''|n|+\varepsilon\lambda_h]s}ds < \frac{e^{[-\varepsilon'''-\varepsilon''|n|+\varepsilon\lambda_h]t}}{\varepsilon\lambda_h-\varepsilon''|n|-\varepsilon'''}$$

и (I.I.63) переписывается в виде $\|Z\|\le\delta'' e^{-(\lambda_i-\varepsilon\lambda_i)t}e^{(\lambda_i-\alpha-2\varepsilon\lambda_i)\tau}\times$

$$\times e^{[\varepsilon(\lambda_h-\lambda_i)-\varepsilon''|n|]t}e^{[\varepsilon''|n|-2\varepsilon(\lambda_h-\lambda_i)]\tau}\sum_{\{\hat m,\hat n\}\in I_{i\alpha}} N(|\hat m|+|\hat n|)\|\xi\|^{\hat m}\|\eta\|^{\hat n},$$

откуда при учете того, что $\lambda_h>\lambda_i$ и $0\le t\le\tau$ получаем при достаточно малом $\varepsilon''/\varepsilon$ для $\|Z\|$ неравенство типа (I.I.42)$'$ с дополнительным малым множителем δ''.

Таким образом, мы показали, что норма второго слагаемого в (I.I.43) удовлетворяет неравенству (I.I.42) с дополнительным множителем, который может быть сделан сколь угодно малым, если δ достаточно мало и $N(.)$ возрастает достаточно быстро.

Перейдем к оценке нормы третьего слагаемого в (I.I.43). Из (I.I.7) получаем, что она оценивается суммой конечного числа слагаемых вида

$$\tilde Z = N''' K e^{-(\lambda_i-\varepsilon''')t}\int_0^t e^{(\lambda_i-\varepsilon''')s}\|x^{nd}(s)\|^{\bar m}\|\tilde x(s)\|^{\tilde m}\|u^{nd}(s)\|^{\bar n}\|\tilde u(s)\|^{\tilde n}ds \qquad \text{(I.I.64)}$$

где

$$(\bar m,\lambda)+(\tilde m,\lambda)>\alpha \qquad \text{(I.I.65)}$$

$$(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\gamma)>\alpha-\lambda_i \qquad \text{(I.I.66)}$$

(I.I.64) по структуре аналогично

(I.I.48). Подставляя в (I.I.64) так же, как в (I.I.48), оценки (I.I.52) для $\|x_h^{nj}(s)\|$, $\|u_j^{nj}(s)\|$ и (I.I.42)$'$ для $\|\widetilde{x}_h(s)\|$, $\|\widetilde{u}_j(s)\|$, получаем для $\widetilde{z}$ оценку, аналогичную (I.I.54):

$$\widetilde{z} \leq e^{-(\lambda_i-\varepsilon''')t}\int_0^t e^{[\lambda_i-(\overline{m},\lambda)-(\widetilde{m},\widetilde{\lambda})+(\overline{n},\gamma)+(\widetilde{n},\widetilde{\gamma})-\varepsilon''+\varepsilon''(|\overline{m}|-|\overline{n}|)+\varepsilon((\widetilde{m},\lambda^+)-(\widetilde{n},\gamma^+))]s}\times$$

$$\times e^{\varepsilon(\beta|n^-|-\alpha|m^-|)s}\,ds\times e^{-[(\overline{n},\gamma)+|\widetilde{n}|\beta+|\widetilde{m}|\alpha-(\widetilde{m},\widetilde{\lambda})-\varepsilon''|\overline{n}|+2\varepsilon(\widetilde{m},\lambda^+)+\varepsilon(\widetilde{n},\widetilde{\gamma})]\tau}\times$$

$$\times\sum N^0\|\xi\|^{m^0}\|\eta\|^{n^0} \qquad, \quad \text{(I.I.67)}$$

где сумма берется по всевозможным наборам неотрицательных целочисленных векторов $\overline{m}(\ell)$, $\widetilde{m}(\ell)$, $\overline{n}(\ell)$, $\widetilde{n}(\ell)$,, удовлетворяющих (I.I.55); $\{m^0, n^0\}$ задаются выражением (I.I.56), где $m(h,\ell)$, $q(j,\ell)$ удовлетворяют (I.I.53), $\widehat{m}(h,\ell)$, $\widehat{n}(h,\ell)$, $\widehat{p}(j,\ell)$, $\widehat{q}(j,\ell)$ удовлетворяют (I.I.5I); N^0 удовлетворяет (I.I.57) (при $|\overline{m}|+|\widetilde{m}|+|\overline{n}|+|\widetilde{n}|>1$ (I.I.57) доказывается так же, как и для $\|z\|$, а при $|\overline{m}|+|\widetilde{m}|+|\overline{n}|+|\widetilde{n}|=1$ (I.I.57) следует из того, что в этом случае константа K в (I.I.64) может быть сделана сколь угодно малой за счет малости δ, потому что в $\widetilde{F}'$ удалена линейная часть); через $\widetilde{\lambda}$, λ^+, m^- и $\widetilde{\gamma}$, γ^+, n^- обозначены i^s - мерные и j^u - мерные соответственно векторы с компонентами $\widetilde{\lambda}_h=\min(\alpha,\lambda_h)$, $\widetilde{\gamma}_j=\min(\beta,\gamma_j)$, $\lambda_h^+=\begin{cases}\lambda_h & \text{при } \lambda_h<\alpha\\ 0 & \text{при } \lambda_h>\alpha\end{cases}$,

$$\gamma_j^+=\begin{cases}\gamma_j & \text{при } \gamma_j<\beta\\ 0 & \text{при } \gamma_j>\beta\end{cases},\quad m_h^-=\begin{cases}0 & \text{при } \lambda_h<\alpha\\ \widetilde{m}_h & \text{при } \lambda_h>\alpha\end{cases},\quad n_j^-=\begin{cases}0 & \text{при } \gamma_j<\beta\\ \widetilde{n}_j & \text{при } \gamma_j>\beta\end{cases}.$$

Из (I.I.55), (I.I.56), (I.I.5I) (I.I.53) получаем

$$(m^0,\lambda)\geq(\overline{m},\lambda)+\alpha|\widetilde{m}| \qquad \text{(I.I.68)}$$

$$(n^0,\gamma)\geq(\overline{n},\gamma)+\beta|\widetilde{n}| \qquad \text{(I.I.69)}$$

причем неравенства становятся строгими: (I.I.68) - при $\widetilde{m}\neq 0$, (I.I.69) - при $\widetilde{n}\neq 0$. Из (I.I.68) при $\widetilde{m}\neq 0$ непосредственно, а при $\widetilde{m}=0$ – при учете (I.I.65) следует (I.I.60). Точно так же, из (I.I.69), (I.I.66) следует (I.I.6I), откуда так же как это было сделано для оценки (I.I.54) следует, что (I.I.67) можно переписать в виде, аналогичном (I.I.62)

$$\tilde{Z} \le \delta' e^{-(\lambda_i-\varepsilon''')t} \int_0^t e^{[\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-(\tilde n,\gamma^+))]s} \times$$

$$\times e^{\varepsilon(\beta|n^-|-\alpha|m^-|)s} ds \times e^{-[(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-\varepsilon''|\bar n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)]\tau} \times$$

$$\times \sum_{\{\hat m,\hat n\}\in I_{i\alpha}} N(|\hat m|+|\hat n|)\,\|\xi\|^{\hat m}\,\|\eta\|^{\hat n}, \qquad \text{(I.I.70)}$$

где δ' может быть сделано сколь угодно малым, если δ достаточно мало и $N(.)$ возрастает достаточно быстро.

Уменьшением ε''' всегда можно добиться, чтобы показатель экспоненты в подынтегральном выражении в (I.I.70) был отличен от нуля. Если он меньше нуля, то интеграл в (I.I.70) оценивается сверху константой, не зависящей от δ, а если показатель больше нуля, то интеграл оценивается сверху константой, помноженной на подинтегральное выражение, вычисленное при $s=t$.

Таким образом, получаем из (I.I.70) $\tilde{Z} \le \delta'' e^{(-\lambda_i+\varepsilon''')t} \times$

$$\times e^{\max(0,\,\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-(\tilde n,\gamma^+)+\beta|n^-|-\alpha|m^-|))t} \times$$

$$\times e^{-[(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-\varepsilon''|\bar n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)]\tau} \times$$

$$\times \sum_{\{\hat m,\hat n\}\in I_{i\alpha}} N(|\hat m|+|\hat n|)\,\|\xi\|^{\hat m}\,\|\eta\|^{\hat n}.$$

Мы покажем, что из последнего неравентсва следует для $\tilde{Z}$ (I.I.42)$'$ с дополнительным малым мнодителем. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы:

при $\lambda_i < \alpha$

$$e^{[\varepsilon'''-\varepsilon\lambda_i+\max(0,\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-(\tilde n,\gamma^+)+\beta|n^-|-\alpha|m^-|))]t} \le$$

$$\le e^{[\lambda_i-\alpha+(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-\varepsilon''|\bar n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)-2\varepsilon\lambda_i]\tau},$$

а при $\lambda_i > \alpha$

$$e^{[\alpha(1+\varepsilon)-\lambda_i+\varepsilon''+\max(0,\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)]t} \leq$$

$$\leq e^{-[(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-\varepsilon''|\tilde n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)]\tau}$$

Поскольку $0 \leq t \leq \tau$, то, очевидно, для выполнения этих неравенств необходимо и достаточно, чтобы при $\lambda_i < \alpha$

$$\max(0,\varepsilon'''-\varepsilon\lambda_i+\max(0,\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+$$
$$+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-\alpha|m^-|+\beta|n^-|-(\tilde n,\gamma^+))))\leq \lambda_i-\alpha+(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-$$
$$-\varepsilon''|\tilde n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)-2\varepsilon\lambda_i \qquad (I.I.7I)'$$

а при $\lambda_i > \alpha$

$$\max(0,\alpha(1+\varepsilon)-\lambda_i+\varepsilon'''+\max(0,\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+$$
$$+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-\alpha|m^-|+\beta|n^-|-(\tilde n,\gamma^+))))\leq(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+$$
$$+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-\varepsilon''|\tilde n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma) \qquad (I.I.7I)''$$

Рассмотрим сначала (I.I.7I)'. Заметим, что из (I.I.66) и неравенств $\beta > \alpha-\lambda_i$, $|\tilde m|\alpha \geq (\tilde m,\tilde\lambda)$ следует, что при достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon''$ правая часть (I.I.7I)' положительна, так что, если $\varepsilon, \varepsilon'', \varepsilon'''$ достаточно малы, то достаточно проверить неравенство

$$\varepsilon'''-\varepsilon\lambda_i+\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-$$
$$-\alpha|m^-|+\beta|n^-|-(\tilde n,\gamma^+))))\leq\lambda_i-\alpha+(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-$$
$$-\varepsilon''|\tilde n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)-2\varepsilon\lambda_i$$

или

$$\alpha+\varepsilon\tilde\lambda_i+\varepsilon''|\bar m|\leq|\tilde m|\alpha+(\bar m,\lambda)+\beta|\tilde n|-(\bar n,\gamma)+\varepsilon((\tilde m,\tilde\lambda)+2(\tilde n,\gamma^+)) \qquad (I.I.72)$$

(в рассматриваемом случае $\tilde\lambda_i=\min(\alpha,\lambda_i)=\lambda_i$). Покажем, что (I.I.7I)'' также сводится к неравенству (I.I.72). Действительно, поскольку правая часть в (I.I.7I)'' неотрицательна, а $\alpha(1+\varepsilon)-\lambda_i+\varepsilon'''<0$ при достаточно малых ε и ε''', то для выполнения (I.I.7I)'' достаточно выполнения неравенства

$$\alpha(1+\varepsilon)-\lambda_i+\varepsilon'''+\lambda_i-(\bar m,\lambda)-(\tilde m,\tilde\lambda)+(\bar n,\gamma)+(\tilde n,\tilde\gamma)-\varepsilon'''+\varepsilon''(|\bar m|-|\bar n|)+$$
$$+\varepsilon((\tilde m,\lambda^+)-\alpha|m^-|+\beta|n^-|-(\tilde n,\gamma^+))))\leq(\bar n,\gamma)+|\tilde n|\beta+|\tilde m|\alpha-(\tilde m,\tilde\lambda)-$$
$$-\varepsilon''|\tilde n|+2\varepsilon(\tilde m,\lambda^+)+\varepsilon(\tilde n,\tilde\gamma)$$

которое, как легко убедиться, сводится к (I.I.72).

Относительно (I.I.72) заметим, что для его выполнения при достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon''$ достаточно, чтобы $\alpha < |\tilde{m}|\alpha + (\tilde{m}, \lambda) + \beta|\tilde{n}| - (\tilde{n}, \tilde{\gamma})$, но в силу (I.I.65) это неравенство выполнено всегда, кроме случая $|\tilde{m}| = 1$, $\bar{m} = 0$, $\tilde{m} = m^-$, $\tilde{n} = n^-$. В этом исключительном случае (I.I.72) переписывается в виде $\varepsilon \tilde{\lambda}_i \leq \varepsilon \alpha$, что очевидно выполнено.

Окончательно получаем, что при подходящем выборе ε и $N(.)$ при достаточно малом δ, если $\{x, u\}$ представляется в виде (I.I.4I), где $\|\tilde{x}_i\|$, $\|\tilde{u}_j\|$ удовлетворяют неравенству (I.I.42)$'$, то норма координаты x_i разности $\mathcal{T}(\{x,u\}) - \{x^{нл}, u^{нл}\}$ также удовлетворяет (I.I.42)$'$ с дополнительным малым множителем. В силу симметрии задачи относительно замены $x \leftrightarrow u$, $t \leftrightarrow \tau - t$, $\lambda \leftrightarrow \gamma$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, $F \leftrightarrow -G$, $B \leftrightarrow -C$ получаем, что то же самое выполнено и для любой координаты u_j.

Прежде чем приступить к рассмотрению неравенств (I.I.42)$'$ для производных заметим, что оценки для нормы функции мы получали чисто алгебраическим путем. Формально ситуация выглядит следующим образом: есть три набора переменных: $y_1, y_2, \ldots$, $v_1, v_2 \ldots$ и $w_1, w_2, \ldots$, и два набора функций: $f_1, f_2, \ldots$, и $g_1, g_2, \ldots$; g_l есть функции от y и v; f_l - функции от v и w. Предполагается, что y и w ограничены общей константой. В нашем случае переменные y - это ξ_i и η_j; v - μ, t, τ, s; w - переменные x и u; g - это $\tilde{x}_i$, $x_i^{нл}$, $\tilde{u}_j$, $u_j^{нл}$, $e^{B_i(\mu)(t-s)}$, $\int_0^t e^{\lambda s} ds$, $B_{imn}(\mu)$, а также ξ_i η_j, понимаемые как тождественные функции и т.п.; f - функции $\tilde{F}_i'$, $\tilde{G}_j'$, а также мономы в подынтегральном выражении (I.I.48). Мы имеем для функций f и g систему оценок $E_{[f]}$ и $E_{[g]}$, где $E_{[f]}$ и $E_{[g]}$ - полиномы с положительными коэффициентами по $\|y\|$ и $\|w\|$ такие, что

$$\|f(w_1, w_2, \dots; v_1, v_2, \dots)\| \le E_{[f]}(\|w_1\|, \|w_2\|, \dots; v_1, v_2, \dots) \quad \text{(I.I.73)}$$

$$\|g(y_1, y_2, \dots; v_1, v_2, \dots)\| \le E_{[g]}(\|y_1\|, \|y_2\|, \dots; v_1, v_2, \dots) \quad \text{(I.I.74)}$$

В нашем случае это оценки (I.I.8), (I.I.42)$'$, (I.I.52), а также оценки $\|[x^{(1)}(s)]^{\bar m}[\tilde x(s)]^{\tilde m}[u^{(1)}(s)]^{\bar n}[\tilde u(s)]^{\tilde n}\| \le \|x^{(1)}(s)\|^{\bar m}\|\tilde x(s)\|^{\tilde m}\|u^{(1)}(s)\|^{\bar n}\|\tilde u(s)\|^{\tilde n}$ (см. (I.I.48)), $\|e^{B_i(\mu)(t-s)}\| \le N''' e^{-(\lambda_i-\varepsilon'')(t-s)}$, $\int_0^t e^{\varkappa s} ds \le \frac{1}{|\varkappa|} e^{\max(0,\varkappa)t}$, $\|\xi_i\| \le \delta$, $\|\eta_j\| \le \delta$, $\|B_{imn}(\mu)\| \le N''''$, $e^{\varkappa t} \le e^{\varkappa \tau}$ при $\varkappa \ge 0$ и т.п.

Мы получаем оценки вида (I.I.74) для некоторых выражений, полученных подстановками в f вместо W функций $g(y, v)$, а также операциями сложения, умножения и $\int_0^t ds$ (в нашем случае это оценки (I.I.42)$'$ для выражения (I.I.43)). При этом мы пользуемся только правилами (которые следует понимать как оператор присваивания: правая часть присваивается левой, но не наоборот):

$$E_{[h^{(1)}+h^{(2)}]} = E_{[h^{(1)}]} + E_{[h^{(2)}]}, \quad E_{[h^{(1)}\cdot h^{(2)}]} = E_{[h^{(1)}]} \cdot E_{[h^{(2)}]}$$

$$E_{[\int_0^t h\, ds]} = \int_0^t E_{[h]}\, ds, \quad E_{[f(g)]} = E_{[f]}(E_{[g]}) \qquad \text{(I.I.75)}$$

(где h - это f или g). Расширим множество функций, дополнив его всевозможными производными до некоторого порядка от исходных функций f и g : для f - производные по W и v , для g - по y и v . Дополним также систему оценками для производных.

Возьмем произвольную f из расширенной системы и любое W_i . Пусть $E_{[f]} = E^{(1)}_{[f]} + E^{(2)}_{[f]}$, где в $E^{(1)}_{[f]}$ собраны все мономы, не содержащие $\|W_i\|$, а в $E^{(2)}_{[f]}$ - содержащие. Будем говорить, что оценки для f и $\frac{\partial f}{\partial W_i}$ согласованы, если

$$E_{[\frac{\partial f}{\partial W_i}]} = L\left(E^{(1)}_{[f]} + \frac{E^{(2)}_{[f]}}{\|W_i\|}\right) \qquad \text{(I.I.76)}$$

где $L > 0$ - произвольная постоянная. Будем говорить, что оценки для f и $\frac{\partial f}{\partial v_i}$ согласованы, если $E_{[\frac{\partial f}{\partial v_i}]} = L\, E_{[f]}$. Также, для произвольной g из расширенной системы будем говорить, что оценки для g и ее производных согласованы, если

$$E_{[\frac{\partial g}{\partial y_i}]} = L\left(E^{(1)}_{[g]} + \frac{E^{(2)}_{[g]}}{\|y_i\|} \right) \qquad (I.I.77)$$

$$E_{[\frac{\partial g}{\partial v_i}]} = L\, E_{[g]}$$

(здесь в $E^{(1)}_{[g]}$ собраны все мономы, не содержащие $\|y_i\|$, а в $E^{(2)}_{[g]}$ - содержащие).

Очевидно (I.I.42)$'$, (I.I.8) - согласованные оценки. Систему, в которой все оценки согласованы, будем называть правильной. Легко видеть, что если у нас произвольное выражение $\mathcal{F}$, полученное из функций правильной расширенной системы сложениями, умножениями, интегрированием по ds и подстановками, и если, пользуясь только правилами (I.I.75) мы получим для этого выражения оценку вида (I.I.74), то для производной $\mathcal{F}$ по y или v, полученной по правилам дифференцирования суммы, произведения функций и сложной функции, пользуясь также правилами (I.I.75) можно получить согласованную оценку.

Покажем, например, как получается согласованная оценка для $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i}$. Пусть в $\mathcal{F}$ входит выражение $f_j(g_k)$. Пусть мы имеем оценки $E_{[f_j]} = \sum_{\ell \ge 0} E_\ell \|W_k\|^\ell$, где E_ℓ не зависят от $\|W_k\|$, и $E_{[g_k]} = E^{(1)}_{[g_k]} + E^{(2)}_{[g_k]}$, где $E^{(1)}_{[g_k]}$ не зависит от $\|y_i\|$. Пусть для $f_j(g_k)$ строится оценка по правилу (I.I.75):

$$E_{[f_j(g_k)]} = \sum_{\ell \ge 0} E_\ell \cdot \left(E^{(1)}_{[g_k]} + E^{(2)}_{[g_k]} \right)^\ell \qquad (I.I.78)$$

Тогда для $\frac{\partial f_j(g_k)}{\partial y_i} = \frac{\partial f_j}{\partial g_k} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}$, пользуясь (I.I.75)-(I.I.77), можно записать оценку

$$E_{\left[\frac{\partial l_i(g_k)}{\partial y_i}\right]} = E_{\left[\frac{\partial l_i}{\partial g_k}\right]}\left(E_{[g_k]}\right) \times E_{\left[\frac{\partial g_k}{\partial y_i}\right]} = L^2 \times \left(E_0 + \sum_{\ell \geq 1} E_\ell \left(E^{(1)}_{[g_k]} + E^{(2)}_{[g_k]}\right)^{\ell}\right) \times$$

$$\times \left(E^{(1)}_{[g_k]} + \frac{E^{(2)}_{[g_k]}}{\|y_i\|}\right) \leq \tilde{L}\left(E_0 + \sum_{\ell \geq 1}\left(E_\ell\left(E^{(1)}_{[g_k]}\right)^{\ell} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{n=1}^{\ell} C_\ell^n \left(E^{(1)}_{[g_k]}\right)^{\ell-n} \frac{\left(E^{(2)}_{[g_k]}\right)^n}{\|y_i\|}\right)\right)$$

(мы использовали ограниченность g и y), и эта оценка согласована с (I.I.78). Аналогично вычисляются согласованные оценки для суммы и произведения функций. Действуя таким образом, мы на каждом этапе вычисления оценки для $\mathcal{F}$ будем параллельно вычислять согласованную оценку для $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i}$. Аналогично получается согласованная оценка для $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i}$.

Заметим, что $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_i}$ и $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i}$ также есть некоторые выражения, составленные из функций правильной расширенной системы и, значит, для их производных также можно получить, пользуясь правилами (I.I.75), согласованную оценку. Так по индукции можно получить согласованные оценки любых производных от $\mathcal{F}$.

Возвращаясь к неравенствам (I.I.42)$'$, заметим, что оценку для (I.I.43) мы получали, пользуясь только правилами (I.I.75) значит, для производных от выражения (I.I.43) имеют место согласованные оценки, то есть (I.I.42)$'$ с дополнительным малым множителем выполнено для всех производных. Лемма доказана.

Из Леммы I.I.3 очевидно следует, что $\{x^*, u^*\}$, как предел последовательных приближений (I.I.3), принадлежит C^0 - замыканию множества Ψ . Это C^0 - замыкание, очевидно, есть пространство функций, представимых в виде (I.I.4I) и удовлетворяющих неравенствам (I.I.42)$''$, которые получаются из (I.I.42)$'$ заменой норм производных на верхние пределы соответствующих конечных разностей (пределы берутся при стремлении шага разности к нулю). Поскольку же в силу леммы I.I.I $\{x^*, u^*\}$ – функция класса $C^{\rho'}$, а для гладкой функции нормы производных оцениваются верхними пределами норм соответствующих конечных разностей, то получаем, что $\{x^*, u^*\}$ удовлетворяет (I.I.42)$'$, и значит и (I.I.42). Теорема доказана.

§ 2. Отображение Пуанкаре вблизи гомоклинической кривой седла

Рассмотрим семейство C^{ρ} – гладких $(\rho \geq 3)$ динамических систем X_μ, заданных на гладком $(d^s + d^u)$ – мерном многообразии и гладко зависящих от некоторого набора параметров μ. Предположим, что X_μ имеет грубое состояние равновесия O типа седло с d^s – мерным устойчивым и d^u – мерным неустойчивым многообразиями – W^s_μ и W^u_μ. Пусть $\lambda_i(\mu)$, $\gamma_j(\mu)$ ($i = 1, \ldots, d^s$; $j = 1, \ldots, d^u$) – корни характеристического уравнения системы в седле, $\operatorname{Re} \lambda_{d^s}(0) \leq$ $\leq \operatorname{Re} \lambda_{d^s-1}(0) \leq \ldots \leq \operatorname{Re} \lambda_1(0) < 0 < \operatorname{Re} \gamma_1(0) \leq \operatorname{Re} \gamma_2(0) \leq \ldots$ $\ldots \leq \operatorname{Re} \gamma_{d^u}(0)$ (обозначения здесь несколько отличаются от принятых в первом параграфе). Предположим, что $\gamma_1(\mu)$ вещественно, и что $\gamma_1(\mu) < \operatorname{Re} \gamma_2(\mu)$. При этом W^u_μ выделяется $(d^u - 1)$ – мерное неведущее многообразие W^{uu}_μ.

Выберем один из параметров: $\hat{\mu}$, и предположим, что при $\hat{\mu} = 0$ многообразия W^s_μ и W^u_μ пересекаются по некоторой траектории Γ (гомоклинической кривой седла), не лежащей в W^{uu}_μ. Предположим также, что семейство X_μ трансверсально в пространстве C^g- гладких динамических систем пленке $\mathfrak{X}$ систем с гомоклинической кривой седла.

Наложим еще одно условие на систему X_μ. Для этого нам понадобится ряд замечаний. Пусть d^{ls} - размерность устойчивого ведущего подпространства то есть, более точно, d^{ls}- такое целое, что $Re\,\lambda_1(0) = Re\,\lambda_2(0) = \ldots = Re\,\lambda_{d^{ls}}(0) > Re\,\lambda_{d^{ls}+1}(0)$. Введем в окрестности V_0 седла O координаты (x, y, u, v) так, чтобы уравнение W^s_μ было $(u=0, v=0)$, $W^u_\mu - (x=0, y=0)$, $W^{uu}_\mu - (u=0, x=0, y=0)$, $(d^s - d^{ls})$- мерного устойчивого неведущего многообразия W^{ss}_μ - $(x=0, u=0, v=0)$.

При этом векторное поле X_μ запишется в V_0 в виде

$$\dot{x} = B_1(\mu)\,x + F_1(x, y, u, v; \mu)$$

$$\dot{y} = B_2(\mu)\,y + F_2(x, y, u, v; \mu)$$

$$\dot{u} = C_1(\mu)\,u + G_1(x, y, u, v; \mu)$$

$$\dot{v} = C_2(\mu)\,v + G_2(x, y, u, v; \mu) \tag{I.2.I}$$

где $Spectr\,B_1(\mu) = \{\lambda_1(\mu), \ldots, \lambda_{d^{ls}}(\mu)\}$, $Spectr\,B_2(\mu) = \{\lambda_{d^{ls}+1}(\mu), \ldots, \lambda_{d^s}(\mu)\}$, $C_1(\mu) \equiv \gamma_1(\mu)$, $Spectr\,C_2(\mu) = \{\gamma_2(\mu), \ldots, \gamma_{d^u}(\mu)\}$,

$$\begin{cases} F_i = F_{i1}(x, u, v; \mu)\,x + F_{i2}(x, y, u, v, \mu)\,y \\ G_j = G_{j1}(x, y, u; \mu)\,u + G_{j2}(x, y, u, v; \mu)\,v \end{cases} \tag{I.2.2}$$

где $F_{il}(0; \mu) = 0$, $G_{jl}(0; \mu) = 0$, $F_{il} \in C^{g-1}$, $G_{jl} \in C^{g-1}$.

Обозначим через (dx, dy, du, dv) координаты в касательном пространстве.

Лемма I.2.I. Динамическая система $\tilde{X}_\mu$, индуцированная в касательном расслоении системой X_μ, имеет единственные C^{s-2} – гладкие инвариантные многообразия W_μ^-, W_μ^+, W_μ^{--}, W_μ^{++}, выделяемые тем, что в V_0 они задаются уравнениями:

$$W_\mu^+ = \left\{u=0,\ v=0,\ dv = H_\mu^+(x,y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ du \end{pmatrix}\right\},$$

$$W_\mu^- = \left\{x=0,\ y=0,\ dy = H_\mu^-(u,v)\begin{pmatrix} dx \\ du \\ dv \end{pmatrix}\right\},$$

$$W_\mu^{++} = \{u=0,\ v=0,\ du=0,\ dv=0,\ dx = H_\mu^{++}(x,y)\,dy\}$$

$$W_\mu^{--} = \{x=0,\ y=0,\ dx=0,\ dy=0,\ du = H_\mu^{--}(u,v)\,dv\}$$

,где

$H_\mu^+(0,0)=0$, $H_\mu^-(0,0)=0$, $H_\mu^{++}(0,0)=0$, $H_\mu^{--}(0,0)=0$.

Доказательство: Проведем доказательство только для W_μ^+ (остальное аналогично). Очевидно, достаточно построить W_μ^+ только в V_0, так как не представляет труда распространить поле $dv = H_\mu^+(x,y)\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ du \end{pmatrix}$ инвариантным образом из $W_\mu^{s,loc} = W_\mu^s \cap V_0 = \{u=0, v=0\}$ на все W_μ^s.

В силу (I.2.I), (I.2.2) получаем, что для того, чтобы W_μ^+ было инвариантно, необходимо и достаточно выполнения для H_μ^+ уравнения

$$\frac{d}{dt}H_\mu^+ = \left(C_2(\mu) + G_{22}\big|_{\substack{u=0\\v=0}}\right)H_\mu^+ + (0,0,\ G_{21}|_{u=0}) -$$

$$- H_\mu^+ \begin{pmatrix} B_1(\mu)+\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & B_2(\mu)+\frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \\ 0 & 0 & C_1(\mu)+G_{11} \end{pmatrix}_{\substack{u=0\\v=0}} - H_\mu^+ \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial v} \\ G_{12} \end{pmatrix}_{\substack{u=0\\v=0}} H_\mu^+ ,$$

где $\frac{d}{dt}$ здесь означает производную в силу системы

$$\begin{cases} \dot{x} = B_1(\mu)x + F_1(x, y, 0, 0; \mu) \\ \dot{y} = B_2(\mu)y + F_2(x, y, 0, 0; \mu) \end{cases}$$

Спектр линейной части последней системы лежит в левой полуплоскости, спектр линеаризации правой части уравнения для H^+_μ – в правой, таким образом, утверждение о существовании и единственности H^+_μ следует из теоремы о неустойчивом многообразии седла. Лемма доказана.

Наложим на X_μ следующее условие: для любой точки траектории Γ касательная к W^u_μ трансверсальна взятому в этой точке слою многообразия W^+_μ. Поскольку W^+_μ – инвариантное многообразие, то данное условие не зависит от выбора точки на Γ. Подсчет размерностей показывает, что это условие общего положения.

Пусть $R(x,y)$ – произвольная гладкая функция $R^{d^s} \to R^1$ такая, что при всех малых $\delta > 0$ поверхность $R(x,y) = \delta$ – гладкая сфера без контакта для траекторий из W^s_μ, и при $R(x,y) \le \delta$ выполнено $\|x\| \le \delta$, $\|y\| \le \delta$, причем $\|x\| = \delta$ при $R = \delta$ $\|y\| \le \frac{\|x\|}{2}$. Будем полагать $V_0 = \{R(x,y) \le \delta, \|u\| \le \delta, \|v\| \le \delta\}$ для некоторого малого $\delta > 0$. Выберем малые δ^u и δ^v и построим секущую Π W^s_μ: $\Pi = \{R(x,y) = \delta, \|u\| \le \delta^u, \|v\| \le \delta^v\}$. Точки на Π будем задавать координатами (z, u, v), где $z = (z_1, \ldots, z_{d^s-1})$ параметризуют поверхность $R(x,y) = \delta$. Функции, осуществляющие переход от координат z к (x,y), обозначим через $x_0(z,\delta)$, $y_0(z,\delta)$. Выберем координаты z так, чтобы $\left\|\frac{\partial(x_0,y_0)}{\partial z}\right\| = O(\delta)$ и чтобы при $\|y\| \le \frac{\|x\|}{2}$

$(z_{d^{x}}, \ldots, z_{d^s-1}) = y/\delta$.

Пусть V - малая окрестность контура $O \cup \Gamma$. Положим $V_\Gamma = V \setminus V_0$. Очевидно, что V_Γ можно выбрат достаточно "узкой", так, чтобы любая траектория, начинающаяся в V_Γ, не покидая V, входила в V_0, пересекая при этом Π. Определим отображение Пуанкаре T_μ так, чтобы траектория, ходящая из точки $P \in \Pi \setminus W_\mu^{s,loc}$, тогда и только тогда попадала из V_0 в V_Γ, а затем пересекала Π в некоторой точке $\bar{P}$, когда $\bar{P} = T_\mu P$. Для $P \in W_\mu^{s,loc} \cap \Pi$ положим $T_\mu P = \ell_\mu^0$, где ℓ_μ^0 - кусок $W_\mu^u \cap \Pi$, проходящий при $\hat{\mu} = 0$ через точку $P^+(z^+, 0, 0) = \Gamma \cap \Pi$. Очевидно, динамика системы $X_\mu | V$ полностью определяется отображением T_μ.

Обозначим: $\pi_\Gamma = 1$, если Γ выходит из O в направлении $u > 0$, и $\pi_\Gamma = -1$, если Γ выходит из O в направлении $u < 0$.

Теорема I.2.I. В некоторых координатах (x, y, u, v) при достаточно малых положительных δ, δ^u, δ^v, δ^μ, $\bar{\delta}^u \in (0, \delta^u]$ для каждых z, u, $\bar{v}$, μ таких, что $\|\bar{v}\| \le \delta^v$, $\|u\| \le \bar{\delta}^u$, $\|\mu\| \le \delta^\mu$ при $\pi_\Gamma u < 0$ не существуют, а при $\pi_\Gamma u \ge 0$ - существуют и единственны $\bar{z}$, $\bar{u}$, v такие, что $T_\mu P(z, u, v) = \bar{P}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{v})$. При этом

$$\begin{cases} \bar{u} = u^0(\bar{v}, \mu) + \pi_\Gamma (A_\Gamma + \hat{A}^u(\bar{v}, \mu)) |u|^{\hat{B}(\mu)} x_0(z, \delta) + \hat{u}(u, z, \bar{v}, \mu) \equiv \Phi^u(u, z, \bar{v}, \mu) \\ \bar{z} = z^0(\bar{v}, \mu) + \hat{A}^z(\bar{v}, \mu) |u|^{\hat{B}(\mu)} x_0(z, \delta) + \hat{z}(u, z, \bar{v}, \mu) \equiv \Phi^z(u, z, \bar{v}, \mu) \\ v = \Phi^v(u, z, \bar{v}, \mu) \end{cases} \quad (I.2.3)$$

где u^0, z^0, $\hat{A}^u$, $\hat{A}^z$ - гладкие функции от $(\bar{v}, \mu)$, A_Γ - так называемая сепаратрисная величина, определяемая формулой (I.2.25) (см. ниже),

$u^0(0,0)=0$, $z^0(0,0)=z^+$, $\hat{A}^k(0,0)=0$, $\hat{B}(\mu)$ - гладко зависящая от μ матрица с собственными числами $\left(-\frac{\lambda_1(\mu)}{\gamma_1(\mu)},\ldots,-\frac{\lambda_{d\,es}(\mu)}{\gamma_1(\mu)}\right)$,

$$\begin{cases} \left\|\dfrac{\partial^{m+|n|+|\tau|}(\vec{u},\hat{z})}{\partial u^m\partial \bar{v}^n\partial(z,\mu)^\tau}\right\| \le \hat{N}\,\dfrac{\delta^{\max(0,1-|n|)}}{|u|^m}\left|\dfrac{u}{\delta}\right|^{\hat{\alpha}} \\ \left\|\dfrac{\partial^{m+|n|+|\tau|}\Phi^v}{\partial u^m\partial \bar{v}^n\partial(z,\mu)^\tau}\right\| \le \hat{N}\,\dfrac{\delta^{\max(0,1-|n|)}}{|u|^m}\left|\dfrac{u}{\delta}\right|^{\hat{\beta}} \end{cases} \qquad (I.2.4)$$

где $\hat{N},\hat{\alpha},\hat{\beta}$ - константы такие, что $\hat{N}>0$, $\hat{\beta}>1$, $\hat{\alpha}>\left|\frac{Re\,\lambda_1(0)}{\gamma_1(0)}\right|$, $0\le m+|n|+|\tau|\le g-1$.

Доказательство. Траектория Γ выходит из O, касаясь ведущего направления - оси u, поэтому Γ при достаточном малом δ трансверсально пересекает гиперплоскость $u=\pi_\Gamma\delta$ в некоторой точке $P^-(0,0,\pi_\Gamma\delta,v^-)$, $\|v^-\|\le\frac{\delta}{2}$. Выберем малое $\delta'>0$ и построим секущую $\Pi^-:\{u=\pi_\Gamma\delta$, $\|x\|\le\delta'$, $\|y\|\le\delta'$, $\|v-v^-\|\le\delta'\}$. При достаточно малых δ^μ и δ' при всех $\|\mu\|\le\delta^\mu$ определенно т.н. "глобальное" отображение $T^{gl}_\mu:\Pi^-\to\Pi$ по траекториям системы X_μ. Пусть $\mathcal{U}_\mu$ - множество точек $P\in\Pi$ таких, что траектория системы X_μ, выходящая из P, впервые покидает V_0 в некоторой точке $P'\in\Pi^-$. Отображение $\mathcal{U}_\mu\to\Pi^-$, ставящее точке P в соответствие точку P', обозначим через T^{loc}_μ. Положим $T^{loc}_\mu(W^{s,loc}_\mu\cap\Pi)=W^{u,loc}_\mu\cap\Pi^-$. Очевидно $T_\mu=T^{gl}_\mu T^{loc}_\mu$.

Рассмотрим отображение T^{loc}_μ. Воспользуемся результатами § I в случае, когда α достаточно близко к $\sup\limits_{\|\mu\|\le\delta^\mu}|\lambda_{d\,es}(\mu)|$, β - $\sup\limits_{\|\mu\|\le\delta^\mu}\gamma_2(\mu)$. При этом в силу теоремы I.I.I существуют $C^{\rho-\rho_0}$ - координаты (x, y, u, v), в которых векторное поле системы X_μ в V_0 записывается в виде (I.2.I), (I.2.2), где

$$\begin{cases} F_{11}(0,u,v;\mu)\equiv 0, & F_{21}(0,u,v;\mu)\equiv 0 \\ F_{11}(x,0,0;\mu)\equiv 0, & F_{12}(x,y,0,0;\mu)\equiv 0 \\ G_{11}(x,y,0;\mu)\equiv 0, & G_{21}(x,y,0;\mu)\equiv 0 \\ G_{11}(0,0,u;\mu)\equiv 0, & G_{12}(0,0,u,v;\mu)\equiv 0 \\ F_{22}(0,0,0,0;\mu)\equiv 0, & G_{22}(0,0,0,0;\mu)\equiv 0 \end{cases} \qquad (I.2.5)$$

(легко видеть, что в рассматриваемом случае соотношения (I.2.I), (I.2.2) и (I.2.5) эквивалентны (I.I.7), (I.I.8)).

Для рассматриваемого случая этот результат был получен в [28], там же показано, что $\rho_0 = 1$ и что $F_{ij} \in C^{\rho-1}$. $G_{ij} \in C^{\rho-1}$.

При достаточно малых δ и δ^μ для любых x_0, y_0, u_τ, v_τ, μ, τ таких, что $\|x_0\|\le\delta$, $\|y_0\|\le\delta$, $\|u_\tau\|\le\delta$, $\|v_\tau\|\le\delta$, $\|\mu\|\le\delta^\mu$, $\tau\ge 0$ существует единственный отрезок $\{x^*(t), y^*(t), u^*(t), v^*(t)\}_{t\in[0,\tau]}$ траектории системы X_μ, целиком лежащий в V_0 и удовлетворяющий условиям $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $u(\tau)=u_\tau$, $v(\tau)=v_\tau$.

В силу теоремы I.I.3 в рассматриваемых координатах

$$\begin{cases} x^*(t) = e^{B_1(\mu)t}x_0 + \tilde{x}(t;\tau, x_0, y_0, u_\tau, v_\tau, \mu) \\ y^*(t) = \tilde{y}(t;\tau, x_0, y_0, u_\tau, v_\tau, \mu) \\ u^*(t) = e^{-\gamma_1(\mu)(\tau-t)}u_\tau + \tilde{u}(t;\tau, x_0, y_0, u_\tau, v_\tau, \mu) \\ v^*(t) = \tilde{v}(t;\tau, x_0, y_0, u_\tau, v_\tau, \mu) \end{cases},$$

где при $0\le |m|+|n|+|p|+|q|+|r| \le \rho - 1$ для некоторых

$N > 0$, $\alpha > \lambda_1(0)$, $\beta > \gamma_1(0)$

$$\left\| \frac{\partial^{|m|+|n|+|p|+|q|+|r|} \tilde{x}}{(\partial x_0)^m (\partial y_0)^n (\partial u_\tau)^p (\partial v_\tau)^q \partial (t,\tau,\mu)^r} \right\| \le N \left(\|x_0\|^{i^x} + \|y_0\|^{i^y} \right) \left(\|u_\tau\|^{i^u} + \|v_\tau\|^{i^v} \right) e^{-\alpha t} \qquad (I.2.6)$$

$$\left\| \frac{\partial^{|m|+|n|+|p|+|q|+|r|} \tilde{y}}{(\partial x_0)^m (\partial y_0)^n (\partial u_\tau)^p (\partial v_\tau)^q \partial (t,\tau,\mu)^r} \right\| \le N \left(\|x_0\|^{i^x} + \|y_0\|^{i^y} \right) e^{-\alpha t} \qquad (I.2.7)$$

$$\left\| \frac{\partial^{|m|+|n|+|p|+|q|+|r|} \tilde{u}}{(\partial x_0)^m (\partial y_0)^n (\partial u_\tau)^p (\partial v_\tau)^q \partial (t,\tau,\mu)^r} \right\| \le N \left(\|x_0\|^{j^x} + \|y_0\|^{j^y} \right) \left(\|u_\tau\|^{j^u} + \|v_\tau\|^{j^v} \right) e^{-\beta(\tau - t)} \qquad (I.2.8)$$

$$\left\| \frac{\partial^{|m|+|n|+|p|+|q|+|r|} \tilde{v}}{(\partial x_0)^m (\partial y_0)^n (\partial u_\tau)^p (\partial v_\tau)^q \partial (t,\tau,\mu)^r} \right\| \le N \left(\|u_\tau\|^{j^u} + \|v_\tau\|^{j^v} \right) e^{-\beta(\tau - t)} \qquad (I.2.9)$$

Здесь $i^x = 2, i^y = 1$ при $m = 0, n = 0$; $i^x = 1, i^y = 1$ при $|m| = 1$, $n = 0$; $i^x = i^y = 0$ при $|m| > 1$ или при $n \ne 0$; $i^u = i^v = 1$ при $p = 0, q = 0$; $i^u = i^v = 0$ при $|p| + |q| > 0$; $j^x = j^y = 1$ при $m = 0$, $n = 0$; $j^x = j^y = 0$ при $|m| + |n| > 0$; $j^u = 2, j^v = 1$ при $p = 0, q = 0$; $j^u = j^v = 1$ при $p = 1, q = 0$; $j^u = j^v = 0$ при $p > 1$ или при $q \ne 0$.

Отсюда $P'(x', y', v') = T_\mu^{loc} P(z, u, v)$ тогда и только тогда, когда $P' \in \Pi^-$, $P \in \Pi$ и

$$x' = e^{B_1(\mu)\tau} x_0(z,\delta) + \tilde{x}(\tau; \tau, x_0(z,\delta), y_0(z,\delta), \pi_r\delta, v', \mu) \quad \text{(I.2.10)}$$

$$y' = \tilde{y}(\tau; \tau, x_0(z,\delta), y_0(z,\delta), \pi_r\delta, v', \mu) \quad \text{(I.2.11)}$$

$$u = e^{-\gamma_1(\mu)\tau} \pi_r\delta + \tilde{u}(0; \tau, x_0(z,\delta), y_0(z,\delta), \pi_r\delta, v', \mu) \quad \text{(I.2.12)}$$

$$v = \tilde{v}(0; \tau, x_0(z,\delta), y_0(z,\delta), \pi_r\delta, v', \mu) \quad \text{(I.2.13)}$$

для некоторого $\tau \in [0; +\infty)$, либо когда $P \in W_\mu^{s,loc} \cap \Pi$, $P' \in W_\mu^{u,loc} \cap \Pi^-$, то есть $u=0$, $v=0$, $x'=0$, $y'=0$, что опять же дается формулами (I.2.10) - (I.2.13) при $\tau = +\infty$. Из (I.2.12), (I.2.8) получаем, что, во-первых, необходимо $\pi_r u \geq 0$, а во вторых, что при $\pi_r u \geq 0$ τ однозначно определяется по z, u, v', μ, причем

$$\tau = -\frac{1}{\gamma_1(\mu)} \ln\left|\frac{u}{\delta}\right| + O\left(\delta \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\beta/\gamma_1(\mu) - 1}\right)$$

$$\frac{\partial^m \tau}{\partial u^m} = \frac{(-1)^m (m-1)!}{\gamma_1(\mu)\, u^m}\left(1 + O\left(\delta \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\beta}{\gamma_1(\mu)} - 1}\right)\right)$$

$$\left\| \frac{\partial^{m+|n|+|\tau|} \tau}{(\partial u)^m (\partial v')^n (\partial(z,\mu))^\tau} \right\| = O\left(\frac{\delta^{1+\max(0,1-|n|)}}{|u|^m} \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\beta}{\gamma_1(\mu)}}\right) \quad \text{(I.2.14)}$$

$$(1 \le m + |n| + |\tau| \le g - 1, \quad |n| + |\tau| > 0)$$

Подставляя выражение для τ в (I.2.10), (I.2.12), (I.2.13), получаем, что x', y', v однозначно определяются по z, u, v', μ, причем для некоторых функций x^{loc}, y^{loc}, v^{loc},

$$\begin{cases} x' = \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\hat{B}(\mu)} x_0(z,\delta) + x^{loc}(z,u,v',\mu) \\ y' = y^{loc}(z,u,v',\mu) \\ v = v^{loc}(z,u,v',\mu) \end{cases} \tag{I.2.I5}$$

где $\hat{B}(\mu) = -\frac{B_1(\mu)}{\gamma_1(\mu)}$, и при $0 \le m + |n| + |r| \le \rho - 1$

$$\left\| \frac{\partial^{m+|n|+|r|} x^{loc}}{(\partial u)^m (\partial v')^n \partial(z,\mu)^r} \right\| \le N' \frac{\delta^{1+\max(0,1-|n|)}}{|u|^m} \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\alpha}{\gamma_1(\mu)}} \tag{I.2.I6}$$

$$\left\| \frac{\partial^{m+|n|+|r|} y^{loc}}{(\partial u)^m (\partial v')^n \partial(z,\mu)^r} \right\| \le N' \frac{\delta}{|u|^m} \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\alpha}{\gamma_1(\mu)}} \tag{I.2.I7}$$

$$\left\| \frac{\partial^{m+|n|+|r|} v^{loc}}{(\partial u)^m (\partial v')^n \partial(z,\mu)^r} \right\| \le N' \frac{\delta^{\max(0,1-|n|)}}{|u|^m} \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\beta}{\gamma_1(\mu)}} \tag{I.2.I8}$$

Из (I.2.I5) - (I.2.I8) следует, что при $\|u\| \le \bar{\delta}^u$ из (I.2.I5) вытекает, что $\|x'\| \le \delta'$, $\|y'\| \le \delta'$, $\|v\| \le \delta$ при достаточно малом $\frac{\bar{\delta}^u}{\delta}$ и при

$$\delta' \geq K' \delta \left(\frac{\bar{\delta}^u}{\delta}\right)^{\nu'} \tag{I.2.I9}$$

для некоторых $K' > 0$, $\nu' < \frac{\lambda_1(0)}{\gamma_1(0)}$, причем ν' может быть выбрано сколь угодно близким к $\frac{\lambda_1(0)}{\gamma_1(0)}$ за счет малости $\frac{\bar{\delta}^u}{\delta}$ и δ^μ. Иными словами, при достаточно малых δ^μ, δ, $\bar{\delta}^u/\delta$, и при выполнении условия (I.2.I9), для любых z, u, v', μ таких, что $\|u\| \le \bar{\delta}^u$, $\|v'\| \le \delta$, $\|\mu\| \le \delta^\mu$, для того, чтобы $P' = T_\mu^{loc} P$ необходимо и достаточно, чтобы

$\pi_\Gamma u \geq 0$ и чтобы x', y', v удовлетворяли (I.2.I5).

Перейдем к отображению T_μ^{gl}. Если δ' и δ^μ достаточно малы, то T_μ^{gl} представляется в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{z} \\ \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^+(\mu) \\ u^+(\mu) \\ v^+(\mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}(\mu) & A_{12}(\mu) & A_{13}(\mu) \\ A_{21}(\mu) & A_{22}(\mu) & A_{23}(\mu) \\ A_{31}(\mu) & A_{32}(\mu) & A_{33}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ v'-v^- \end{pmatrix} + \dots \tag{I.2.20}$$

,

где многоточием обозначены члены выше первого порядка малости,

$$u^+(0)=0, \quad v^+(0)=0, \quad z^+(0)=z^+ \tag{I.2.2I}$$

где $(z^+, \delta, 0)$ – координаты точки $P^+ = \Gamma \cap \Pi$. След $W_\mu^{u\,loc} \cap \Pi^-$ задается уравнением $\{x=0, y=0\}$. Отсюда, касательное пространство к $\ell_\mu^0 = T_\mu^{gl}(W_\mu^{u\,loc} \cap \Pi^-)$ задается уравнением

$$(d\bar{z} = A_{13}(\mu)\,dv', \; d\bar{u} = A_{23}(\mu)\,dv', \; d\bar{v} = A_{33}(\mu)\,dv') \tag{I.2.22}$$

Из (I.2.I), (I.2.2), (I.2.5) следует, что $H_\mu^+ \equiv 0$. Отсюда и из (I.2.2I) следует, что трансверсальность слоя W_μ^+ и касательной к W_μ^u эквивалентна условию

$$\det A_{33}(0) \neq 0 \tag{I.2.23}$$

Из (I.2.23) и (I.2.20)

$$v'-v^- = (A_{33}(\mu))^{-1}(\bar{v}-v^+(\mu)) - (A_{33}(\mu))^{-1}(A_{31}(\mu)x' + A_{32}(\mu)y') + \dots,$$

откуда и из (I.2.20, (I.2.2I), если δ^μ достаточно мало, находим

$$\begin{cases} \bar{z} = z_0(\bar{v},\mu) + \hat{A}^z(\bar{v},\mu)x' + \dots \\ \bar{u} = u_0(\bar{v},\mu) + \pi_\Gamma(A_\Gamma + \hat{A}^u(\bar{v},\mu))x' + \dots \\ v' = v^{gl}(\bar{v},\mu,x',y') \end{cases} \tag{I.2.24}$$

где многоточием обощначены члены первого порядка малости по y' и выше первого порядка малости по x' ; z^0, u^0, $\hat{A}^z$, $\hat{A}^u$, v^{gl} – гладкие функции, определяемые при $\|\mu\| \le \delta^\mu$, $\|v\| \le \delta^v$ для некоторого достаточно малого δ^v ; $z^0(0,0)=z^+$, $u^0(0,0)=0$, $\hat{A}^u(0,0)=0$,

$$A_\Gamma = \pi_\Gamma\left(A_{21}(0) - A_{23}(0)(A_{33}(0))^{-1}A_{31}(0)\right) \qquad (I.2.25)$$

Для того, чтобы $\bar{P} = T^{gl}_\mu P'$, кроме (I.2.24) необходимо также, чтобы $|\bar{u}| \le \delta^u$. Это достигается, очевидно, если для некоторого $K''>0$

$$\delta' \le K''\delta^u \qquad (I.2.26)$$

Для доказательства теоремы I.2.I необходимо показать, что при любых $(u, z, \bar{v}, \mu)$ таких, что $0 \le \pi_\Gamma u \le \bar{\delta}^u$, $\|\mu\| \le \delta^\mu$, $\|\bar{v}\| \le \delta^v$, существуют и единственны x', y' и v', удовлетворяющие (I.2.I5) и (I.2.24). Для этого, очевидно, достаточно показать, что v' однозначно определяется из уравнения

$$v' = v^{gl}\left(\bar{v}, \mu, \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\hat{B}(\mu)} x_0(z,\delta) + x^{loc}(z,u,v',\mu), y^{loc}(z,u,v',\mu)\right) \qquad (I.2.27)$$

полученного подстановкой (I.2.I5) в (I.2.24).

Обозначим правую часть (I.2.27) через $\mathcal{F}(v')$. По построению, если $\|v^- - v^-\| \le \delta'$, то и $\|\mathcal{F}(v') - v^-\| \le \delta'$. Кроме того $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v'} = \frac{\partial v^{gl}}{\partial x'}\frac{\partial x^{loc}}{\partial v'} + \frac{\partial v^{gl}}{\partial y'}\frac{\partial y^{loc}}{\partial v'}$. В силу (I.2.I5) – (I.2.I8) $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v'} = O\left(\delta\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\alpha}{\delta_1(\mu)}}\right)$, и если $\frac{\delta^u}{\delta}$ достаточно мало, то $\left\|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v'}\right\|$ может быть сделана сколь угодно малой. Таким образом, $v' \mapsto \mathcal{F}(v')$ – сжимающее отображение, значит, v' однозначно определяется по $(u, z, \bar{v}, \mu)$, удовлетворяющим условиям теоремы I.2.I. По (u, z, v', μ) из (I.2.I5) однозначно определяются x', y' и v, а по $(x', y', \bar{v}, \mu)$ из (I.2.24) определяются $\bar{u}$ и $\bar{z}$.

$$\begin{cases} \bar{u} = u^0(\bar{v},\mu) + (A_\Gamma + \hat{A}^u(\bar{v},\mu))|u|^{\hat{\beta}(\mu)} x_0(z,\delta) + \hat{u}(u,z,w,\bar{v},\mu) = \Phi^u(u,z,\bar{v},\mu) \\ \bar{z} = z^0(\bar{v},\mu) + (A_\Gamma^z + \hat{A}^z(\bar{v},\mu))|u|^{\hat{\beta}(\mu)} x_0(z,\delta) + \hat{z}(u,z,w,\bar{v},\mu) \equiv \Phi^z(u,z,\bar{v},\mu) \\ \bar{w} = w^0(\bar{v},\mu) + \hat{A}^w(\bar{v},\mu)|u|^{\hat{\beta}(\mu)} x_0(z,\delta) + \hat{w}(u,z,w,\bar{v},\mu) \equiv \Phi^w(u,z,w,\bar{v},\mu) \\ v = \Phi^v(u,z,w,\bar{v},\mu) \end{cases} \qquad (I.2.28)$$

(Здесь по-прежнему выполнено (I.2.4) с очевидной заменой $z \to (z,w)$, кроме того $\hat{A}^z(0,0)=0$).

Аналогично замечанию 2, из (I.2.24) выводится, что трансверсальность пересечения слоев многообразий W_μ^- и W_μ^{++} на Γ эквивалентна условию $\det\begin{pmatrix} A_\Gamma \\ A_\Gamma^z \end{pmatrix} \neq 0$. (I.2.29)

Замечание 4. Из (I.2.3) получаем, что ℓ_μ^0 задается уравнением $(\bar{u} = u^0(\bar{v},\mu),\ \bar{z} = z^0(\bar{v},\mu))$. Отсюда очевидно, что трансверсальность X_μ к пленке $\mathfrak{X}$ эквивалентна условию $\frac{\partial u^0(0,\mu)}{\partial \mu} \neq 0$. Кроме того, по условию имеем, что $u^0(0,\mu)|_{\mu=0} \equiv 0$, откуда $\frac{\partial u^0(0,\mu)}{\partial \mu} \neq 0$, что позволяет положить

$$\hat{\mu} = u^0(0,\mu) \qquad (I.2.30)$$

§ 3. Инвариантные многообразия контуров, образованных гомоклиническими кривыми седла.

Рассмотрим двупараметрическое семейство динамических систем X_μ класса C^3 , имеющих состояние равновесия O типа седло с d^s - мерным устойчивым и d^u - мерным неустойчивым многообразиями. Предположим, как и в § 2, что $\gamma_1(\mu)$ вещественно и $\gamma_1(\mu) < \mathrm{Re}\,\gamma_2(\mu)$. Предположим, что при $\mu = 0$ многообразия W_0^s и W_0^u пересекаются по двум гомоклиническим кривым Γ_1 и Γ_{-1} , не лежащим в W_0^{ku} и выходящим из O в противоположных направлениях. Предположим также, что для любой точки на Γ_1 или на Γ_{-1} касательная к W_0^u пересекается с отвечающим данной точке слоем многообразия W_0^+ трансверсально.

Пусть V - малая окрестность контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$.

Теорема I.3.I. Система X_μ имеет отталкивающее инвариантное (d^s+1) - мерное C^1- многообразие M^+_μ такое, что: I) $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O \subset M^+_0$, 2) касательное расслоение над M^+_μ содержит W'_μ 3) любая траектория, не лежащая в M^+_μ, покидает V за конечное время.

Доказательство. Будем предполагать, что Γ_1 выходит из O в сторону $u>0$, а Γ_{-1} - в сторону $u<0$. Тогда в силу теоремы I.3.2 отображение Пуанкаре $T_{1\mu}$ определено при $u\geq 0$, а $T_{-1\mu}$ - при $u\leq 0$. В случае, когда седловая величина $\sigma<0$, отображения $T_{i\mu}$ $(i\in\{-1,1\})$ определены при $0\leq iu\leq i\delta^u$ (см. замечание I к теореме I.3.I), а при $\sigma\geq 0$ - только при $0\leq iu\leq i\bar\delta^u$ $(\bar\delta^u<\delta^u)$. Изменим в случае $\sigma\geq 0$ отображение $T_{i\mu}$, положив при $\delta^u\geq|u|\geq\bar\delta^u$ $\bar u=0$ и помножив при $|u|\leq\bar\delta^u$ в (I.2.3) правую часть уравнения для $\bar u$ на $\chi(\bar\delta^u,|u|)$, где $\chi\in C^\infty([0,+\infty)\to[0,1])$, $\chi=$ при $|u|\leq(\bar\delta^u)^2$, $\chi=0$ при $|u|>\bar\delta^u$, $\left|\frac{\partial\chi}{\partial u}\right|\leq\frac{2}{\bar\delta^u}$ (существование функции χ см. в). Очевидно, что если $\bar\delta^u,\delta^v,\delta^\mu$ достаточно малы по сравнению с δ^u, то для видоизмененного таким образом отображения $T_{i\mu}$ $|\bar u|\leq\delta^u$.

Из (I.2.3), (I.2.4) получаем, что отображения $T_{i\mu}$ удовлетворяют соотношению

$$\left\|\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial v}\right\|\left\|\frac{\partial(\varphi_i^u,\varphi_i^z)}{\partial(u,z,\mu)}\right\|+\left\|\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial v}\right\|+\frac{1}{L}\left\|\frac{\partial\varphi_i^v}{\partial(u,z,\mu)}\right\|+2L\left\|\frac{\partial(\varphi_i^u,\varphi_i^z)}{\partial v}\right\|\leq q<1 \quad (I.3.I)$$

где

$$L=O\left(\left(\frac{\bar\delta_u}{\delta}\right)^{\hat\beta-1}\right) \quad (I.3.2)$$

Возьмем произвольную поверхность $\mathcal{H}: \bar v=h(\bar u,\bar z,\mu)$, где h имеет L константой Липшица и определена при $|\bar u|\leq\delta^u$.

Получаем, что для любых $(u, z, \bar{v}, \mu)$, удовлетворяющих условию теоремы, соответствующие $(\bar{u}, \bar{z}, v)$ существуют и единственны.

Из (I.2.27) и (I.2.15) - (I.2.18) при $0 \le |m| + |p| + |q| + |r| \le \rho - 1$

$$\left\| \frac{\partial^{|q|+|r|} v'}{(\partial \bar{v})^q (\partial \mu)^r} \right\| \le N'', \quad \left\| \frac{\partial^{|p|+|q|+|m|+|r|} v'}{(\partial \bar{v})^q (\partial z)^m (\partial u)^p (\partial \mu)^r} \right\| \le N' \frac{\delta}{|u|^p} \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\nu'}$$

(Здесь $|p| + |m| > 0$, ν' такое же, как в (I.2.19)).

Из этих соотношений и (I.2.15) - (I.2.18), (I.2.24) получаем (I.2.3), (I.2.4). Теорема доказана.

Замечание I. В случае, когда седловая величина $\sigma = \lambda_1(0) + \gamma_1(0)$ отрицательна, в условии теоремы можно положить $\bar{\delta}^u = \delta^u$. Дело в том, что единственными ограничениями на $\bar{\delta}^u$ служат (I.2.19) и (I.2.26), но при $\sigma < 0$, очевидно, $\nu' > 1$, откуда получаем, что $\bar{\delta}^u = \delta^u$ удовлетворяет соотношениям (I.2.19), (I.2.26) при достаточно малом $\frac{\delta^u}{\delta}$.

Замечание 2. В силу (I.2.24) $(T_0^{gl})^{-1}(W_0^{s,loc} \cap \Pi)$ задается уравнением $A_\Gamma dx' + A' dy' = 0$, $\left.\frac{\partial v^{gl}}{\partial x'}\right|_{(0,0,x',y')} dx' + \left.\frac{\partial v^{gl}}{\partial y'}\right|_{(0,0,x',y')} dy' = dv'$

для A_Γ из (I.2.25) и некоторого A'. Отсюда получаем, что поскольку в силу (I.2.5) $H_\mu^- \equiv 0$, то касательная к W_μ^s и слой многообразия H_μ^- пересекаются по Γ трансверсально тогда и только тогда, когда $A_\Gamma \ne 0$.

Замечание 3. Предположим, что Γ не лежит в $W_\mu^{ss} = \{u = 0, v = 0, x = 0\}$. Очевидно тогда, что точка $P^+ = \Gamma \cap \Pi$ лежит в области $\|y\| \le \frac{\|x\|}{2}$. При этом рассмотрения можно сузить только на эту часть секущей Π. Теперь Π будет задаваться уравнением $\|x\| = \delta$, координатами на Π будут $z \in S^{(d^{ls}-1)}$, $w = y/\delta \in R^{(d^s - d^{ls})}$, $u \in R^1$ и $v \in R^{(d^u-1)}$. В новых координатах (I.2.3) запишется в виде

Покажем, что существует прообраз $T_{i\mu}^{-1}(\mathcal{H} \cap T_{i\mu} U_{i\mu})$ ($U_{i\mu}$ - - область определения $T_{i\mu}$), представляющий собой поверхность $\widetilde{\mathcal{H}} : v = \widetilde{h}_i(u, z, \mu)$, определенную при всех u таких, что $0 \leq iu \leq i\delta^u$. Действительно, чтобы точка $P(u, z, v) \in \in T_{i\mu}^{-1}(\mathcal{H} \quad {}_{i\mu} U_{i\mu})$, необходимо и достаточно, чтобы (см. теорему I.2.I)) $0 \leq iu \leq i\delta^u$ и

$$\begin{cases} \bar{u} = \Phi_i^u(u, z, h(\bar{u}, \bar{z}, \mu), \mu) \\ \bar{z} = \Phi_i^z(u, z, h(\bar{u}, \bar{z}, \mu), \mu) \end{cases} \qquad (I.3.3)$$

$$v = \Phi_i^v(u, z, h(\bar{u}, z, \mu), \mu) \qquad (I.3.4)$$

При $u = 0$ из (I.3.3) $(\bar{u}, \bar{z})$ находится однозначно как координаты единственной точки пересечения $\ell_{i\mu}^o = T_{i\mu}(W_\mu^{s,loc} \cap \Pi)$ с $\mathcal{H}$. Отсюда и из того, что в силу (I.3.I) $\left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial \bar{v}} \right\| L \leq \frac{1}{2}$, на основании теоремы о неявной функции находим, что по любым данным (u, z, μ) из (I.3.3) $(\bar{u}, \bar{z})$ находится однозначно. Отсюда и из (I.3.4) получаем требуемое утверждение.

Покажем теперь, что $\widetilde{h}_i$ - функция с константой Липшица L . Действительно, если $\|\Delta \bar{v}\| \leq L \|(\Delta \bar{u}, \Delta \bar{z}, \Delta \mu)\|$, то $\|\Delta \bar{v}\| \leq$
$\leq L \left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial(u, z, \mu)} \right\| \|(\Delta u, \Delta z, \Delta \mu)\| + L\|\Delta \mu\| + L \left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial \bar{v}} \right\| \|\Delta \bar{v}\|$,
откуда $\|\Delta \bar{v}\| \leq \left[L\left(\left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial(u, z, \mu)} \right\| + 1\right) \Big/ \left(1 - L \left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial \bar{v}} \right\|\right) \right] \|(\Delta u, \Delta z, \Delta \mu)\|$,
Теперь, поскольку $\|\Delta v\| \leq \left\| \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \bar{v}} \right\| \|\Delta \bar{v}\| + \left\| \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial(u, z, \mu)} \right\| \|(\Delta u, \Delta z, \Delta \mu)\|$,
получаем $\|\Delta v\| \leq \left[\left\| \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial(u, z, \mu)} \right\| + L \left\| \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \bar{v}} \right\| \frac{1 + \left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial(u, z, \mu)} \right\|}{1 - L \left\| \frac{\partial(\Phi_i^u, \Phi_i^z)}{\partial \bar{v}} \right\|} \right] \|(\Delta u, \Delta z, \Delta \mu)\|$,
откуда из (I.3.I) $\|\Delta v\| \leq L \|(\Delta u, \Delta z, \Delta \mu)\|$,
что и требовалось. Из (I.2.4), (I.3.4) $\widetilde{h}_i = 0$ при $u = 0$. Получаем, что $\widetilde{\mathcal{H}} = \widetilde{\mathcal{H}}_1 \cup \widetilde{\mathcal{H}}_{-1}$ - липшицева поверхность, определенная при всех $u \in [-\delta^u, \delta^u]$.

Покажем, что отображение $\mathcal{H} \mapsto \widetilde{\mathcal{H}}$ является сжимающим в C^0 - топологии в пространстве липшицевых поверхностей с константой L. Действительно, пусть $\mathcal{H}^1$ и $\mathcal{H}^2$ - две поверхности рассматриваемого вида, $\widetilde{\mathcal{H}}^1$ и $\widetilde{\mathcal{H}}^2$ - их прообразы. Возьмем произвольное (u, z, μ) (для определенности $u \geq 0$) и рассмотрим точки $\widetilde{P}^1 \in \widetilde{\mathcal{H}}^1$ и $\widetilde{P}^2 \in \widetilde{\mathcal{H}}^2$: $\widetilde{P}^1 = (u, z, v = \widetilde{h}^1(u, z, \mu))$, $\widetilde{P}^2 = (u, z, v + \Delta v = \widetilde{h}^2(u, z, \mu))$, а также их образы $P^1 = T_{1\mu}\widetilde{P}^1 = (\bar{u}, \bar{z}, \bar{v} = h^1(\bar{u}, \bar{z}, \mu))$ и $P^2 = T_{1\mu}\widetilde{P}^2 = (\bar{u} + \Delta\bar{u}, \bar{z} + \Delta\bar{z}, \bar{v} + \Delta\bar{v} = h^2(\bar{u} + \Delta\bar{u}, \bar{z} + \Delta\bar{z}, \mu))$. Очевидно, что $\|\Delta\bar{v}\| \leq \|h^2(\bar{u}, \bar{z}, \mu) - h^1(\bar{u}, \bar{z}, \mu)\| + L\|(\Delta\bar{u}, \Delta\bar{z})\|$.

Кроме того, поскольку $\Delta u = 0$, $\Delta z = 0$, $\Delta\mu = 0$, то $\|(\Delta\bar{u}, \Delta\bar{z})\| \leq \left\|\dfrac{\partial(\varphi_1^u, \varphi_1^z)}{\partial v}\right\| \|\Delta v\|$, и таким образом

$$\|\Delta\bar{v}\| \leq \frac{\|h^2(\bar{u}, \bar{z}, \mu) - h^1(\bar{u}, \bar{z}, \mu)\|}{1 - L\left\|\dfrac{\partial(\varphi_1^u, \varphi_1^z)}{\partial v}\right\|}.$$

Теперь, так как

$$\|\Delta v\| \leq \left\|\frac{\partial\varphi_1^v}{\partial v}\right\| \|\Delta\bar{v}\|, \quad \|\widetilde{h}^2(u, z, \mu) - \widetilde{h}^1(u, z, \mu)\| \leq \frac{\left\|\dfrac{\partial\varphi_1^v}{\partial v}\right\|}{1 - L\left\|\dfrac{\partial(\varphi_1^u, \varphi_1^z)}{\partial v}\right\|} \|h^2(\bar{u}, \bar{z}, \mu) - h^1(\bar{u}, \bar{z}, \mu)\|$$

и в силу (I.3.I) получаем

$$\|\widetilde{h}^2(u, z, \mu) - \widetilde{h}^1(u, z, \mu)\| \leq q\|h^2(\bar{u}, \bar{z}, \mu) - h^1(\bar{u}, \bar{z}, \mu)\|.$$

Таким образом, $\mathcal{H} \mapsto \widetilde{\mathcal{H}}$ - сжимающее отображение.

Очевидно, что

$$\frac{\partial\widetilde{\mathcal{H}}}{\partial(u, z, \mu)} = \frac{\partial\varphi^v}{\partial(u, z, \mu)} + \frac{\partial\varphi^v}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\bar{u}, \bar{z}, \mu)}\left(1 - \frac{\partial(\varphi^u, \varphi^z)}{\partial v}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\bar{u}, \bar{z}, \mu)}\right)^{-1}\frac{\partial(\varphi^u, \varphi^z, \mu)}{\partial(u, z, \mu)} \quad (I.3.5)$$

(здесь производные $\frac{\partial(\Phi^u, \Phi^z, \Phi^v, \mu)}{\partial(u, z, \bar{v}, \mu)}$ берутся при $\bar{v} = h(\bar{u}, \bar{z}, \mu)$, где $(\bar{u}, \bar{z})$ вычисляются по (u, z) из (I.3.3)). Из (I.3.I), (I.3.5), если $\| \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\bar{u}, \bar{z}, \mu)} \| \le L$, то $\| \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial(u, z, \mu)} \| \le L$.

При каждом фиксированном $\mathcal{H}$, отображение $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial(\bar{u}, \bar{z}, \mu)} \mapsto \frac{\partial \bar{\mathcal{H}}}{\partial(u, z, \mu)}$, определяемое правилом (I.3.3), является сжимающим в C^0 - топологии в пространстве ограниченных функций, что легко следует из (I.3.I). Отсюда в силу принципа послойного сжатия [24] получаем, что существует инвариантное многообразие $\mathcal{H}^+ \in C^1$. Заметим, что поскольку L может быть сделано сколь угодно малым за счет малости $\bar{\delta}^u$, то $\frac{\partial h^+}{\partial(u, z, \mu)} = 0$ при $u = 0$.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что сдвиг многообразия $\mathcal{H}^+$ по траекториям системы X_μ дает гладкое инвариантное многообразие M^+_μ . Пусть

$\mathcal{H}_1 \in \Pi_1^- = \{u = \delta\}$ и $\mathcal{H}_{-1} \in \Pi_{-1}^- = \{u = -\delta\}$ - прообразы многообразия $\mathcal{H}$ относительно отображений соответственно $T^{\mathcal{H}}_{1\mu}$ и $T^{\mathcal{H}}_{-1\mu}$ (см. доказательство теоремы I.2.I). Из (I.2.24) $\mathcal{H}_i$ задаются уравнениями вида $v' = v^i(x', y', \mu)$, где v^i - гладкие функции. В обозначениях теоремы I.2.I (см. (I.2.I0) - (I.2.I5)), для того, чтобы траектория точки $(x, y, u, v) \in V_0$ проходила через $v' = v^i(x', y', \mu)$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\tau \ge 0$

$$x' = e^{B_1(\mu)\tau} x + \tilde{x}(\tau; \tau, x, y, i\delta, v', \mu) \qquad (I.3.6)$$

$$y' = \tilde{y}(\tau; \tau, x, y, i\delta, v', \mu) \tag{I.3.7}$$

$$u = e^{-\gamma_1(\mu)\tau} i\delta + \tilde{u}(0; \tau, x, y, i\delta, v', \mu) \tag{I.3.8}$$

$$v = \tilde{v}(0; \tau, x, y, i\delta, v', \mu) \tag{I.3.9}$$

$$v' = v^i(x', y', \mu) \tag{I.3.10}$$

При $i\delta > 0$ τ однозначно определяется из (I.3.8) через (u, x, y, v', μ) по формулам (I.2.I4). Подстановка (I.2.I4) и (I.3.I0) в (I.3.6), (I.3.7) показывает, что x' и y' однозначно определяются по (u, x, y, μ), причем

$$\left\| \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y, u, \mu)} \right\| = O\left(\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\gamma'-1}\right) \tag{I.3.II}$$

(где $\gamma' > 0$).

Теперь из (I.3.9) получаем, что при $u \neq 0$ v однозначно выражается через (x, y, u, μ), причем из (I.2.I4) -(I.2.I8) и (I.3.I0)-(I.3.II)

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial(x, y, u, \mu)} \right\| = O\left(\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\beta}{\gamma_1(\mu)} - 1 + \gamma'}\right)$$

$$\| v \| = O\left(\delta \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\beta}{\gamma_1(\mu)}}\right)$$

для β из (I.2.9)

Отсюда, полагая $v=0$ при $u=0$, получаем, что множество траекторий, проходящих через $\mathcal{H}^+$ образует гладкое инвариантное многообразие M^+_μ. Теорема доказана.

Замечание I. Поскольку по доказанному при $(u=0,\ v=0)$ M^+_μ касается $\{dv=0\}$, то из (I.2.3), (I.2.4) получаем, что ограничение на $M^+_\mu \cap \Pi$ отображения Пуанкаре $T_{i\mu}$ $(i \in \{-1, 1\})$

имеет вид

$$\begin{cases} \bar{u} = u^{0i}(\mu) + \pi_i \left(A_i + \hat{A}_i^u(\mu)\right)|u|^{\hat{B}(\mu)} x_0(z,\delta) + \hat{u}^i(u,z,\mu) \equiv \Psi_i^u(u,z,\mu) \\ \bar{z} = z^{0i}(\mu) + \hat{A}_i^z(\mu)|u|^{\hat{B}(\mu)} x_0(z,\delta) + \hat{z}^i(u,z,\mu) \equiv \Psi_i^z(u,z,\mu) \end{cases} \quad (I.3.12)$$

где u^{0i}, z^{0i}, $\hat{A}_i^u$, $\hat{A}_i^z$ - гладкие функции ; $\hat{A}_i^u(0)=0$;

$$\begin{cases} \|\hat{u}^i\| + \|\hat{z}^i\| + \left\| \dfrac{\partial(\hat{u}^i, \hat{z}^i)}{\partial(z,\mu)} \right\| \le N\delta \left|\dfrac{u}{\delta}\right|^{\hat{\alpha}} \\ \left\| \dfrac{\partial(\hat{u}^i, \hat{z}^i)}{\partial u} \right\| \le N \left|\dfrac{u}{\delta}\right|^{\hat{\alpha}-1} \end{cases} \quad (I.3.13)$$

Замечание 2. Предположим, что параметры (μ_1, μ_{-1}) таковы, что при $\mu_i = 0$ X_μ имеет гомоклиническую к O траекторию, гомотопную в V Γ_i. Тогда, при условии, что семейство X_μ трансверсально пленке систем с двумя гомоклиническими кривыми седла, можно считать (см. (I.2.30))

$$\mu_i = u^{0i}(\mu) \quad (I.3.14)$$

Замечание 3. Предположим, что в ситуации теоремы I.3.I $d^{ls}=1$ ($\lambda_1(\mu)$ - вещественно), Γ_1 и Γ_{-1} входят в O навстречу друг другу, касаясь устойчивого ведущего направления, и касательная W^s_μ трансверсальна слоям многообразия W_μ^- (что эквивалентно $A_1 \ne 0$, $A_{-1} \ne 0$ в силу замечания 2 к теореме I.2.I). Тогда применение теоремы I.3.I. к системе, полученной из X_μ обращением времени, показывает наличие у X_μ в V притягивающего (d^u+1) - мерного инвариантного многообразия M_μ^-. Любая траектория, целиком лежащая в V, лежит на двумерном многообразии $M_\mu = M_\mu^+ \cap M_\mu^-$. $M_\mu \cap \Pi$ состоит из двух гладких кривых a_1 и a_{-1}. Из (I.2.3), (I.2.4) несложно вывести, что ограничение $T_{j\mu}|_{a_i} : a_i \to a_j$ имеет вид

$$\bar{u} = \mu_j + \pi_i \pi_j (A_j + \hat{A}_j^u(\mu)) \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\frac{\lambda_1(\mu)}{\delta_1(\mu)}} \delta + \hat{u}^{ij}(u,\mu) \equiv \Psi_{ij}(u,\mu) \qquad (I.3.15)$$

где

$$\begin{cases} \|\hat{u}^{ij}\| + \left\|\frac{\partial \hat{u}^{ij}}{\partial \mu}\right\| \le N\delta \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\hat{\alpha}} \\ \left\|\frac{\partial \hat{u}^{ij}}{\partial u}\right\| \le N \left|\frac{u}{\delta}\right|^{\hat{\alpha}-1} \end{cases} \qquad (I.3.16)$$

Замечание 4. Как следует из доказательства теоремы, при $\sigma < 0$ многообразие M^+_μ определяется единственным образом. Несложно показать, что при $\sigma < 0$ многообразие M^+_0 является устойчивым многообразием контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$. Действительно, из (I.3.12), (I.3.13) при $\mu = 0$ $|\bar{u}| \le N|u|^{\rho'}$ где ρ' может быть сделано сколь угодно близким к $\left|\frac{\lambda_1(0)}{\delta_1(0)}\right|$. Заметим, что при $\sigma < 0$ $\rho' > 1$, откуда получаем, что $|\bar{u}| \le q|u|$ для некоторого $q < 1$. Отсюда, очевидно, любая траектория из M^+_0 стремится к $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$ при $t \to +\infty$.

Замечание 5. В случае систем с одной гомоклинической кривой утверждение теоремы остается в силе (в доказательстве теоремы надо только положить $\tilde{\mathcal{H}}_{-1} = \{v = 0\}$, поскольку $T_{-1\mu}$ не определено). В случае, когда $\lambda_1(\mu)$ вещественно и некратно, Γ не лежит в W^{ss}_0, $A_\Gamma > 0$ и $\sigma < 0$ из (I.3.12), (I.3.13) аналогично тому, как в замечании 4, получаем, что при $\mu = 0$ и $u \ge 0$ имеет место $0 \le \bar{u} \le q u$, где $q < 1$, откуда получаем, что в этом случае M^+_0 является устойчивым многообразием контура $\Gamma \cup O$ и определяется однозначно.

ГЛАВА 2. БИФУРКАЦИИ КОНТУРА, УСТОЙЧИВОГО НА M_0^+.

§I. Предельные множества систем, близких к X_0.

Рассмотрим двупараметрическое семейство X_μ динамических систем класса C^3, имеющих состояние равновесия O типа седло с d^s-мерным устойчивым и d^u-мерным неустойчивым многообразиями. Предположим, что для X_μ выполнены условия замечания 4 к теореме I.3.I., то есть, что $\gamma_1(\mu) < \mathrm{Re}\,\gamma_2(\mu)$, что при $\mu = 0$ W_0^u и W_0^s пересекаются по двум гомоклиническим кривым Γ_1 и Γ_{-1}, не лежащим в W_0^{uu} и выходящим из O в противоположных направлениях, что для любой точки на Γ_1 или Γ_{-1} касательная к W_0^u пересекается с отвечающим данной точке слоем многообразия W_0^+ трансверсально, и что седловая величина $\sigma < 0$. В силу теоремы I.3.I система X_μ имеет гладкое инвариантное (d^s+1)-мерное многообразие M_μ^+ такое, что любая траектория, лежащая в $V \setminus M_\mu^+$ покидает V за конечное время. С другой стороны, в силу замечания 4 к теореме I.3.I, любая траектория из M_μ^+ не покидает V при $t \to +\infty$. В связи с этим дальнейшее рассмотрение будем проводить для ограничения $X_\mu|_{M_\mu^+}$.

В силу трансверсальности пересечения W_0^u с M_0^+ по $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$ многообразие M_μ^+ пересекается с W_μ^u по двум траекториям: $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$. Рассмотрим последовательности точек $\{P_{1j}(\mu)\}_{j=0}^{j=j_1'}$ и $\{P_{-1j}(\mu)\}_{j=0}^{j=j_{-1}'}$, в которых $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ пересекают Π ($j_i' = +\infty$, если $\Gamma_i(\mu)$ не является гомоклинической к O, в противном случае j_i' конечно и $P_{ij_i'} \in \Pi \cap W_\mu^{s,loc}$. Положим $\Sigma = \Pi \cap M_\mu^+$. Имеем $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_{-1} \cup \Sigma_0$, где

$$\Sigma_1 = \Sigma \cap \{u > 0\},\ \Sigma_{-1} = \Sigma \cap \{u < 0\},\ \Sigma_0 = \Sigma \cap \{u = 0\}.$$

Обозначим координаты точки $P_{ij}(\mu)$ на Σ через $(u^{ji}(\mu), z^{ji}(\mu))$. Очевидно, что u^{ji} и z^{ji} гладко зависят от μ, причем $\mu_i = u^{0i}(\mu)$.

Определим последовательности $s_1(\mu)=\{S_{j1}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}$ и $s_{-1}(\mu)=\{S_{j,-1}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}$ символов алфавита $\{-1, 0, 1\}$ следующим образом: I) $S_{0i}(\mu)=i$; 2) если $1 \le j \le j_i'$, то $S_{ji}(\mu)= \operatorname{sign} u^{j-1,i}(\mu)$; 3) если $j_i' \ne +\infty$ то $S_{ji}(\mu)=0$ при $j>j_i'$ (заметим, что $u^{j-1,i}(\mu)\ne 0$ при $1\le j\le j_i'$ так что слово $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=0}^{j=j_i'}$ не содержит нулей).

В случае, если $\Gamma_i(\mu)$ возвращается в седло при $t\to+\infty$, то слово $s=\{S_{ji}(\mu)\}_{j=0}^{j=j_i'}$ будем называть типом гомоклинической траектории $\Gamma_i(\mu)$. Периодическую траекторию системы X_μ, лежащую в V и гомотопную в V гомоклинической траектории типа s, назовем циклом типа s. Тип периодической траектории определяется с точностью до циклической перестановки символов.

Построим некоторое двоичное дерево $\mathcal{G}$ следующим образом: в первую вершину поместим пару символов ($1, -1$), от нее опустим стрелки в вершины ($1, -11$) и ($1-1, -1$) и так далее, по правилу: из вершины (p, q) проводятся стрелки в вершины (p, qp) и (pq, q) (здесь p и q - конечные слова алфавита $\{-1, 1\}$). Пару конечных слов алфавита $\{-1, 1\}$ назовем допустимой, если она стоит в одной из вершин построенного дерева. Пару бесконечных вправо слов (p, q) назовем допустимой, если существует последовательность допустимых пар конечных слов (p_k, q_k) таких, что все p_k являются префиксами p, q_k - префиксами q, длины p_k и q_k стремятся к бесконечности при $k\to\infty$ и для любого k пара (p_{k+1}, q_{k+1}) принадлежит поддереву с начальной вершиной (p_k, q_k). Слово s назовем допустимым, если оно является элементом одной из допустимых пар.

Обозначим для произвольной допустимой пары (p, q) через $\mathcal{G}(p,q)$ поддерево в $\mathcal{G}$ с начальной вершиной (p, q). Для допустимого слова s будем писать: $s\in\mathcal{G}(p,q)$, если любая допустимая пара, содержащая s, принадлежит $\mathcal{G}(p,q)$, и $s\notin\mathcal{G}(p,q)$, если никакая допустимая пара, содержащая s, не принадлежит $\mathcal{G}(p,q)$. Для конечного слова s алфавита $\{-1, 1\}$ длину слова обозначим через $\ell(s)$. "Числом вращения" $\tau(s)$ назовем отношение числа единиц в слове к длине слова. Для бесконечного слова $s=\{s_j\}_{j=0}^{+\infty}$ через $\tau(s)$ обозначим $\lim_{\ell\to\infty} \tau(\{s_j\}_{j=0}^{j=\ell})$, если он существует.

Заметим, что если в $\mathcal{G}$ заменить каждую пару (p, q) на пару чисел $(\tau(p), \tau(q))$, то получится известное дерево Фэри (свойства дерева Фэри изложены, например, в [32]).

Лемма 2.I.I.

а) Если (p, q) - допустимая пара, то $\tau(p) > \tau(q)$.

б) Если (p, q) - допустимая пара, s - допустимое слово, отличное от p и q, то $s \in \mathcal{G}(p,q)$ при $\tau(p) > \tau(s) > \tau(q)$ и $s \notin \mathcal{G}(p,q)$ $\tau(s) \geq \tau(p)$ или $\tau(s) \leq \tau(q)$.

в) Если $(g, h) \in \mathcal{G}(p,q)$, то

$$\begin{cases} pq^\infty \leq gh^\infty < g0^\infty < g^\infty \leq p^\infty \\ q^\infty \leq h^\infty < h0^\infty < hg^\infty \leq qp^\infty \end{cases} \qquad (2.I.I)$$

(здесь под b^∞, где b - некоторая группа символов $\{-1, 0, 1\}$ понимается бесконечное вправо слово, полученное повторением b; под $<$ понимается отношение лексикографического порядка на множестве бесконечных вправо слов алфавита $\{-1, 0, 1\}$).

г) Каждая допустимая пара встречается в $\mathcal{G}$ ровно один раз.

д) Для каждого конечного допустимого слова s, отличного от $\{-1\}$ и $\{1\}$ существует и единственна допустимая пара $(p^+(s), q^-(s))$ такая, что если s начинается с единицы, то $s = p^+(s)\, q^-(s)$, $s \in \mathcal{G}(s, q^-(s))$ и любая допустимая пара, содержащая s, имеет вид

$$(s,\ q^-(s)\, s^k) \qquad (2.I.2)$$

где $k \geq 0$.

Если же s начинается с минус единицы, то $s = q^-(s)p^+(s)$, $s \in \mathcal{G}(p^+(s), s)$ и любая допустимая пара, содержащая s, имеет вид

$$(p^+(s)s^k,\ s) \qquad (2.I.3)$$

где $k \geq 0$.

е) Для каждого конечного допустимого слова g, не равного $\{1\}$ и $\{-1\}$, существует и единственно допустимое слово $h \neq g$ такое, что $\rho(h) = \rho(g)$. При этом $p^+(g) = p^+(h)$, $q^-(g) = q^-(h)$ и либо $g = p^+ q^-$, $h = q^- p^+$, либо $g = q^- p^+$, $h = p^+ q^-$.

ж) Если (p, q) – допустимая пара бесконечных слов, то найдется слово g такое, что $p = 1\cdot 1 g$, $q = -1 1 g$. При этом существует $\tau(g) = \tau(p) = \tau(q) = \tau(p,q)$. $\tau(p,q)$ иррационально и однозначно определяет пару (p, q).

з) Если p – бесконечное допустимое слово, то p непериодично и в p сколь угодно далеко от начала встречаются сколь угодно длинные префиксы p.

и) Для любого $\tau^* \in [0, 1]$ существует допустимое слово p такое, что $\tau(p) = \tau^*$.

Доказательство.

а) Заметим, что для любых слов g и h

$$\tau(gh) = \tau(hg) = \tau(g)\frac{l(g)}{l(g)+l(h)} + \tau(h)\frac{l(h)}{l(g)+l(h)} \qquad (2.I.4)$$

Отсюда, если $\tau(g) > \tau(h)$, то

$$\tau(g) > \tau(gh) = \tau(hg) > \tau(h) \qquad (2.I.5)$$

По определению $\mathcal{G}$ для допустимой пары (p, q) существует последовательность пар $\{(p_j, q_j)\}_{j=0}^{j=k}$ такая, что $(p_0, q_0) = (1, -1)$, $(p_k, q_k) = (p, q)$, $(p_{j+1}, q_{j+1}) = (p_j, q_j p_j)$ или $(p_{j+1}, q_{j+1}) = (p_j q_j, q_j)$. Отсюда, поскольку $\tau(p_0) > \tau(q_0)$ на основании (2.I.5) индукцией получаем $r(p) > r(q)$.

б) Пусть $(g, h) \in \mathcal{Y}(p,q)$. Тогда существует последовательность пар $\{(p_j, q_j)\}_{j=0}^{j=k}$: $(p_0, q_0) = (p,q)$, $(p_k, q_k) = (g,h)$, $(p_{j+1}, q_{j+1}) = (p_j, q_j p_j)$ или $(p_{j+1}, q_{j+1}) = (p_j q_j, q_j)$. Индукцией по j получаем, что

$$g = p q^{n_1} p^{n_2} \dots p^{n_{i_1-1}} q^{n_{i_1}}, \quad h = q p^{m_1} q^{m_2} \dots q^{m_{i_2-1}} p^{m_{i_2}} \qquad (2.I.6)$$

где $i_1 \ge 0$, $i_2 \ge 0$, $i_1 + i_2 \ge 1$ при $k > 0$; $n_1 > 0, \dots, n_{i_1-1} > 0$, $n_{i_1} \ge 0$, $m_1 > 0, \dots, m_{i_2-1} > 0$, $m_{i_2} \ge 0$. Отсюда и из (2.I.5)

$$r(p) \ge r(g) > r(h) \ge r(q) \qquad (2.I.7)$$

причем

$$\begin{cases} r(p) = r(g) \Leftrightarrow p = g \\ r(h) = r(q) \Leftrightarrow h = q \end{cases} \qquad (2.I.8)$$

(Знак $\Leftrightarrow$ обозначает эквивалентность).

Предположим теперь, что допустимые пары (p, q) и (g, h) таковы, что $(p,q) \notin \mathcal{Y}(g,h)$ и $(g,h) \notin \mathcal{Y}(p,q)$. Тогда, очевидно, существует допустимая пара (b, c) такая, что либо $(p,q) \in \mathcal{Y}(b, cb)$, $(g,h) \in \mathcal{Y}(bc, c)$, либо $(p,q) \in \mathcal{Y}(bc, c)$, $(g,h) \in \mathcal{Y}(b, cb)$. Отсюда в силу (2.I.7), (2.I.8) получаем

$$r(q) < r(p) \le r(h) < r(g)$$

либо (2.I.9)

$$r(h) < r(g) \le r(q) < r(p)$$

причем

$$\begin{cases} r(p) = r(h) \Leftrightarrow p = bc,\ h = cb \\ r(q) = r(g) \Leftrightarrow q = cb,\ g = bc \end{cases} \qquad (2.I.10)$$

Пусть s - некоторое допустимое слово, отличное от p и q . Пусть E - произвольная допустимая пара, содержащая s . Из (2.I.7), (2.I.8), если $E \in \mathcal{Y}(p,q)$, то $r(p) > r(s) > r(q)$, а если $(p,q) \in \mathcal{Y}(E)$, то либо $r(s) > r(p)$, либо $r(s) < r(q)$
Если $E \neq \mathcal{Y}(p,q)$ и $(p,q) \notin \mathcal{Y}(E)$, то из (2.I.9) $r(p) \le r(s)$

либо $\tau(s) \le \tau(q)$. Отсюда утверждение пункта б) следует очевидным образом. Пункт в) очевидным образом следует из (2.I.6).

г) Предположим, что пара (p,q) встречается в $\mathcal{G}$ в двух разных местах. В силу (2.I.6) никакая из этих пар не может принадлежать поддереву с вершиной в другой паре. Тогда существует допустимая пара (b, c) такая, что одна из пар $(p,q) \in \mathcal{G}(b, cb)$, а а другая $(p,q) \in \mathcal{G}(bc, c)$. Но тогда в силу (2.I.6) $p = b$ или $p = bcb\ldots$, и, одновременно, $p = bc$ или $p = bcc\ldots$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает пункт г).

д) Пусть s - некоторое конечное допустимое слово, отличное от $\{1\}$ и $\{-1\}$. Предположим, что s начинается с единицы По определению $\mathcal{G}$ существует допустимая пара (p, q) такая, что $s = pq$. Покажем, что такая пара единственна. Действительно, предположим, что существует другая допустимая пара (p', q') такая, что $s = p'q'$. В силу (2.I.5) $\tau(p) > \tau(s) > \tau(q)$ и $\tau(p') > \tau(s) > \tau(q')$, то есть не может быть, чтобы $\tau(q) \geq \tau(p')$ или $\tau(q') \geq \tau(p)$. Отсюда в силу (2.I.9) либо $(p,q) \in \mathcal{G}(p',q')$, либо $(p',q') \in \mathcal{G}(p,q)$. В любом случае из (2.I.6) получаем $l(p') + l(q') \neq l(p) + l(q)$, что противоречит равенству $p'q' = pq$.

Положим $p^+(s) = p$, $q^-(s) = q$. Поскольку $\tau(p) > \tau(s) > \tau(q)$, из пункта б) получаем $s \in \mathcal{G}(p^+(s), q^-(s))$. С другой стороны, поскольку $\tau(s) = \tau(q^-(s)\, p^+(s))$, из пункта б) получаем, что $s \notin \mathcal{G}(p^+(s), q^-(s)p^+(s))$. Таким образом $s \in \mathcal{G}(s, q^-(s))$. Равенство (2.I.2) следует из (2.I.6).

В случае, если s начинается с минус единицы доказательство проводится аналогично. Утверждение пункта е) следует из (2.I.7)-(2.I.I0).

ж) Пусть $(p,q) = (\{p^{(i)}\}_{i=0}^{+\infty}, \{q^{(i)}\}_{i=0}^{-\infty})$ - допустимая пара бесконечных слов. По определению, можно выбрать последовательность допустимых пар $(p_1, q_0), (p_1, q_1), \dots, (p_{k+1}, q_k), (p_{k+1}, q_{k+1}), \dots$, такую, что $\ell(p_k) \to \infty$, $\ell(q_k) \to \infty$, все p_k служат префиксами p , все q_k - префиксами q и

$$\begin{cases} q_0 = -1, \ p_1 = 1(-1)^{i_0-1} \\ p_{k+1} = p_k (q_k)^{i_k} \\ q_{k+1} = q_k (p_{k+1})^{m_k} \end{cases} \qquad (2.I.II)$$

где $i_k \geq 1, m_k \geq 1$. (Очевидно, $(p_{k+1}, q_k) \in \mathcal{G}(p_k, q_k)$, $(p_{k+1}, q_{k+1}) \in \mathcal{G}(p_{k+1}, q_k)$) . Из (2.I.II) следует, что можно положить $p_k = 1\text{-}1\, g_k$ при $k \geq 2$, где $g_2 = (-1)^{i_0-1}(1(-1)^{i_0-1})^{m_0} \times (-1(1(-1)^{i_0-1})^{m_0})^{i_1-1}$. Легко видеть, что $q_2\, 1\text{-}1\, g_2 = -11\, g_2\, q_2$
Покажем, что при всех $k \geq 2$

$$q_k\, 1\text{-}1\, g_k = -11\, g_k\, q_k \qquad (2.I.I2)$$

Действительно, предположим, что (2.I.I2) выполнено при некотором $k \geq 2$. Тогда в силу (2.I.II), (2.I.I2) $q_{k+1}\, 1\text{-}1\, g_{k+1} = q_k (1\text{-}1\, g_{k+1})^{m_k} 1\text{-}1\, g_{k+1} = q_k (1\text{-}1\, g_k\, q_k^{i_k})^{m_k} 1\text{-}1\, g_k\, q_k^{i_k} = (q_k\, 1\text{-}1\, g_k) q_k^{i_k-1} (q_k (1\text{-}1\, g_k\, q_k^{i_k})^{m_k}) = -11\, g_k\, q_k^{i_k} (q_k (1\text{-}1\, g_k\, q_k^{i_k})^{m_k})$.
Отсюда в силу (2.I.II) получаем, что $q_{k+1}\, 1\text{-}1\, g_{k+1} = -11\, g_{k+1}\, q_{k+1}$.
Теперь по индукции получаем (2.I.I2).

Из (2.I.I2) получаем, что слова $\{-11\, g_k\}$ служат префиксами q . В то же время слова $\{1\text{-}1\, g_k\}$ служат префиксами p. Отсюда, поскольку $\ell(g_k) \to \infty$ с ростом k , и g_k служат префиксами g_{k+1} при любом k , то $p = 1\text{-}1 g$, $q = -11 g$ для некоторого бесконечного слова g .

Покажем, что существует $\tau(p)$ и $\tau(q)$. Заметим, во-первых, что, как легко следует из (2.I.2I), последовательность чисел $\tau(q_0), \tau(p_1), \tau(q_1), \dots, \tau(p_k), \tau(q_k), \dots$ образует последовательность подходящих дробей для цепной др[обн] $[i_0 m_0 i_1 m_1 \dots$
Таким образом существуют пределы $\lim_{k\to\infty} \tau(p_k) = \lim_{k\to\infty} \tau(q_k) = [i_0 m_0 i_1 m_1 \dots$
Заметим, что по построению, для любого k слова p и q составлены из блоков p_k и q_k . Отсюда для любого n найдется $j(n) \in [n - \max(\ell(p_k), \ell(q_k)), n]$ такое, что слово $\{p^{(j)}\}_{j=0}^{j=j(n)}$

составлено из блоков p_k и q_k. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\tau(\{p^{(j)}\}_{j=0}^{j=j(n)}) - \tau(\{p^{(j)}\}_{j=0}^{j=n}))=0$, кроме того, в силу (2.I.5) $\tau(p_k)\geqslant \tau(\{p^{(j)}\}_{j=0}^{j=j(n)})\geqslant \tau(q_k)$. Отсюда $\tau(p_k)\geqslant \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \tau(\{p^{(j)}\}_{j=0}^{j=n}) \geqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \tau(\{p^{(j)}\}_{j=0}^{j=n})\geqslant \tau(q_k)$. Устремляя в этом неравенстве k к бесконечности, получаем, что $\tau(p)$ существует и равно $\lim \tau(p_k) = \lim \tau(q_k)$. Аналогично $\tau(q) = \lim \tau(p_k) = \lim \tau(q_k)$. Таким образом существуют $\tau(p) = \tau(q) = \tau(p,q)$, причем

$$\tau(p,q) = [i_0 m_0 i_1 m_1 \ldots] \qquad (2.I.13)$$

Из (2.I.13) следует иррациональность $\tau(p,q)$. Кроме того, поскольку числа i_k, m_k однозначно определяется из (2.I.13), получаем, что пара (p,q) однозначно определяется по $\tau(p,q)$. Пункт ж) доказан.

з) Пусть (p,q) - допустимая пара бесконечных слов. Из иррациональности $\tau(p,q)$ следует, что ни p, ни q не становятся периодическими ни с какого места. Рассмотрим отвечающие (p,q) последовательности p_k и q_k, удовлетворяющие (2.I.II). Поскольку все p_k являются префиксами p, все q_k - префиксами q, то из (2.I.II) следует, что в p на расстоянии $\ell(p_k)$ от начала встречается префикс слова q длины $\ell(q_k)$, а в q на расстоянии $\ell(q_k)$ от начала - префикс слова p длины $\ell(p_k)$. Отсюда, так как $\ell(p_k)\to\infty$ и $\ell(q_k)\to\infty$, то в p сколь угодно далеко от начала встречаются сколь угодно длинные префиксы q, а в q - сколь угодно далеко от начала сколь угодно длинные префиксы p. Отсюда утверждение пункта з) следует очевидным образом.

Для доказательства пункта и) разложим τ^* в цепную дробь $[i_0 m_0 i_1 m_1 \ldots]$ и найдем из нее по правилу (2.I.II) требуемое p или q. Лемма доказана.

Теорема 2.I.I. При достаточно малом δ^μ ω - предельное множество любой траектории, лежащей в M^+_μ, содержится в множестве Ω_μ - замыкании траекторий $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$. Ω_μ состоит из точки O и : либо I) двух устойчивых на M^+_μ периодических траекторий и траекторий $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$, которые стремятся каждая к своей периодической траектории, либо 2) одной устойчивой на M^+_μ периодической траектории со стремящимися к ней $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$, либо 3) гомоклинической к O траектории $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_{-1}(\mu)$ и устойчивой на M^+_μ периодической траектории, к которой стремится оставшаяся траектория $\Gamma_i(\mu)$, либо 4) двух гомоклинических к O траекторий, либо 5) гомоклинической к O траектории $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_{-1}(\mu)$ со стремящейся к ней оставшейся траекторией $\Gamma_i(\mu)$, либо 6) континуума незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий, устойчивых по Пуассону при $t \to +\infty$ (P^+ - устойчивых) траекторий $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ и одной устойчивой по Пуассону при $t \to -\infty$ (P^- - устойчивой) траектории из W^s_μ. В последнем случае Ω_μ является замыканием любой своей траектории, кроме O *).

Периодические и гомоклинические к O траектории могут иметь только допустимые типы. В случае наличия пары периодических или гомоклинических к O траекторий их типы образуют допустимую пару. В случае, когда $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ P^+ - устойчивы, пара бесконечных слов $(s_1(\mu), s_{-1}(\mu))$ допустима.

Доказательство. Заметим, что при достаточно малых δ и δ^μ определены отображения Пуанкаре $\tau^{\{1\}}_\mu = T_{1\mu}|_{M^+_\mu}$ и $\tau^{\{-1\}}_\mu = T_{-1\mu}|_{M^+_\mu}$, $\tau^{\{1\}}_\mu : \Sigma_1 \cup \Sigma_0 \to \Sigma$, $\tau^{\{-1\}}_\mu : \Sigma_{-1} \cup \Sigma_0 \to \Sigma$ (см. теорему I.3.I). При этом

$$\tau^{\{i\}}_\mu(\Sigma_0) = P_{i0}(\mu) \qquad (2.I.I4)$$

---

*) Мы будем называть Ω_μ в этом случае квазиминимальным множеством

Кроме того

$$\tau_\mu^{\{1\}}(\Sigma_1 \cup \Sigma_0) \cap \tau_\mu^{\{-1\}}(\Sigma_{-1} \cup \Sigma_0) = \emptyset \qquad (2.I.I5)$$

Из (I.3.I2), (I.3.I3) $\left\| \frac{\partial(\psi_i^4, \psi_i^2)}{\partial(u, z)} \right\| \to 0$ при $|u| \to 0$, откуда $\tau_\mu^{\{i\}}$ - сжимающие отображения, то есть, если $P^{(1)} \in \Sigma_i \cup \Sigma_0$ и $P^{(2)} \in \Sigma_i \cup \Sigma_0$, то

$$dist(\tau_\mu^{\{i\}}(P^{(1)}), \tau_\mu^{\{i\}}(P^{(2)})) \le K\, dist(P^{(1)}, P^{(2)}) \qquad (2.I.I6)$$

(где $dist$ - некоторое расстояние на Σ), причем K за счет малости δ и δ^μ может быть сделана сколь угодно малой. Будем полагать

$$K < 1/2 \qquad (2.I.I7)$$

Возьмем произвольную точку $P \in \Sigma \setminus \Sigma_0$. Пусть для определенности $P \in \Sigma_1$. Возьмем произвольную $P_{ij}(\mu)$. Если $P_{ij}(\mu) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, то из (2.I.I6) $dist(P_{i,j+1}(\mu), \tau_\mu^{\{-1\}}(P)) \le$ $\le K\, dist(P_{ij}(\mu), P)$. Если $P_{ij}(\mu) \in \Sigma_{-1}$, то $dist(\Sigma_0, P) <$ $< dist(P_{ij}(\mu), P)$, откуда и из (2.I.I6) $dist(P_{10}(\mu), \tau_\mu^{\{1\}}(P)) \le$ $\le K\, dist(\Sigma_0, P) < K\, dist(P_{ij}(\mu), P)$. В любом случае получаем, что

$$dist(\{P_{1j}\}_{j=0}^{j_1'} \cup \{P_{-1j}\}_{j=0}^{j=j_1'}, \tau_\mu^{\{1\}}(P)) \le K\, dist(\{P_{1j}\}_{j=0}^{j=j_1'} \cup \{P_{-1j}\}_{j=0}^{j=j_{-1}'}, P).$$

Отсюда, если P_n - последовательные точки пересечения с Σ

траектории, выходящей из P, то

$$dist\left(\{P_{1j}\}_{j=0}^{j=j_1''} \cup \{P_{-1j}\}_{j=0}^{j=j_{-1}'},\ P_n\right) \le K^n \delta \qquad (2.I.18)$$

Отсюда, очевидно, ω - предельное множество любой траектории содержится в $\Omega_\mu = cl\,(\Gamma_1(\mu) \cup \Gamma_{-1}(\mu))$.

Прежде, чем переходить дальше, заметим, что наличие у системы X_μ в V предельного цикла или гомоклинической траектории типа $s = \{S_0 \dots S_j\}$ эквивалентно существованию на Σ неподвижной точки отображения $\tau_\mu^{\{s\}} = \tau_\mu^{\{S_j\}} \circ \tau_\mu^{\{S_{j-1}\}} \circ \dots \circ \tau_\mu^{\{S_0\}}$. Отсюда, поскольку $\tau_\mu^{\{i\}}$ - сжимающие отображения, то периодические траектории системы X_μ устойчивы на M_μ^+.

Известно [1], что если $P_{10}(\mu) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_0$ (то есть $u^{01}(\mu) = \mu_1 > 0$), то $\tau_\mu^{\{1\}}$ имеет единственную неподвижную точку на $\Sigma_1 \cup \Sigma_0$, ей соответствует либо гомоклиническая траектория типа $\{1\}$, либо цикл типа $\{1\}$, который является ω - предельным множеством для $\Gamma_1(\mu)$ (в последнем случае $s_1(\mu) = 1^\infty$). Аналогично, если $P_{-10}(\mu) \in \Sigma_{-1} \cup \Sigma_0$, то $\tau_\mu^{\{-1\}}$ имеет на $\Sigma_{-1} \cup \Sigma_0$ неподвижную точку, которой отвечает гомоклиническая траектория или цикл типа $\{-1\}$ ($s_{-1}(\mu) = (-1)^\infty$). Отсюда, если $\mu_1 \ge 0$ и $\mu_{-1} \le 0$, то X_μ содержит либо два цикла, либо две гомоклинические к 0 траектории, либо цикл и гомоклиническую к 0 траекторию типов $\{1\}$ и $\{-1\}$. Таким образом в этом случае утверждение теоремы выполнено.

Множество всех остальных значений μ разбивается на две области: $\{\mu_1 < 0,\ \mu_{-1} \le -\mu_1\}$ и $\{\mu_{-1} > 0,\ \mu_1 > -\mu_{-1}\}$.
Рассмотрим первую область. Выберем константы $\delta_1 \in \left(-\frac{\mu_1}{1-K}, -\frac{\mu_1}{K}\right)$ и $\delta_{-1} > 0$ такую, что $\delta_{-1} > -\frac{\mu_{-1}}{1-K}$, $\delta_{-1} > K\delta_1 - \mu_1$, $\delta_{-1} < \frac{\delta_1 - \mu_{-1}}{K}$ (поскольку $K < \frac{1}{2}$, эти неравенства совместны).
Рассмотрим множества $\Sigma_1' = \Sigma_1 \cap \{u \le \delta_1\}$ и $\Sigma_{-1}' = \Sigma_{-1} \cap \{u \ge -\delta_{-1}\}$.
Легко видеть, что $\mu_1 + K\delta_1 < 0$, $\mu_{-1} - K\delta_1 > -\delta_{-1}$, $\mu_{-1} + K\delta_{-1} < \delta_1$, $\mu_{-1} - K\delta_{-1} > -\delta_{-1}$. Отсюда и из (2.I.16), (2.I.14) получаем, что $T_\mu^{\{1\}}(\Sigma_1' \cup \Sigma_0) \subset \Sigma_{-1}'$ и $T_\mu^{\{-1\}}(\Sigma_{-1}' \cup \Sigma_0) \subset \Sigma_{-1}' \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_1'$.
Отсюда следует, что на $\Sigma' = \Sigma_1' \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_{-1}'$ определены удовлетворяющие (2.I.14)-(2.I.17) отображения $T_\mu^{\{1\}}: \Sigma_1' \cup \Sigma_0 \to \Sigma'$ и $T_\mu^{\{-1\}}: \Sigma_{-1}' \cup \Sigma_0 \to \Sigma'$. Аналогично, для области $\{\mu_{-1} > 0,\ \mu_1 > -\mu_{-1}\}$ существуют δ_1 и δ_{-1} такие, что $T_\mu^{\{1\}}: \Sigma_1' \cup \Sigma_0 \to \Sigma'$ и $T_\mu^{\{-1\}}: \Sigma_{-1}' \cup \Sigma_0 \to \Sigma'$.
К новым отображениям применимы те же рассуждения, что и к $T_\mu^{\{1\}}$ и $T_\mu^{\{-1\}}$. Отсюда получаем, что существуют следующие последовательности: чисел $\delta_1^{(n)} > 0$ и $\delta_{-1}^{(n)} > 0$, множеств $\Sigma_1^{(n)} = \Sigma_1^{(n-1)} \cap \{u < \delta_1^{(n)}\}$, $\Sigma_{-1}^{(n)} = \Sigma_{-1}^{(n-1)} \cap \{u > -\delta_{-1}^{(n)}\}$, $\Sigma^{(n)} = \Sigma_1^{(n)} \cup \Sigma_{-1}^{(n)} \cup \Sigma_0$, и пар слов (p_n, q_n) алфавита $\{-1, 1\}$: $(p_n, q_n) = (p_{n-1}, q_{n-1}p_{n-1})$ либо $(p_n, q_n) = (p_{n-1}q_{n-1}, q_{n-1})$, $(p_0, q_0) = (1, -1)$ (очевидно, (p_n, q_n) - допустимая пара и $(p_n, q_n) \in \mathcal{Y}(p_{n-1}, q_{n-1})$) - таких, что $T_\mu^{p_n}: \Sigma_1^{(n)} \to \Sigma^{(n)}$, $T_\mu^{q_n}: \Sigma_{-1}^{(n)} \to \Sigma^{(n)}$.
Заметим, что слова p_n и q_n служат префиксами $S_1(\mu)$ и $S_{-1}(\mu)$ соответственно.

Эти последовательности будут конечными длины n только в том случае, если $T_\mu^{p_n}(\Sigma_0) \in \Sigma_1^{(n)} \cup \Sigma_0$ и $T_\mu^{q_n}(\Sigma_0) \in \Sigma_{-1}^{(n)} \cup \Sigma_0$.
При этом $T_\mu^{p_n}$ будет иметь неподвижную точку $P_{1,\infty} \in \Sigma_1^{(n)} \cup \Sigma_0$, которой соответствует либо гомоклиническая кривая седла типа p_n, либо предельный цикл типа p_n, который служит ω - предельным множеством для $\Gamma_1(\mu)$ (в последнем случае $S_1(\mu) = p_n^{\infty}$).
Точно так же $T_\mu^{q_n}$ имеет неподвижную точку $P_{-1,\infty} \in \Sigma_{-1}^{(n)} \cup \Sigma_0$, которой соответствует гомоклиническая кривая седла или цикл типа

q_n. Поскольку (p_n, q_n) - допустимая пара, то в этом случае утверждение теоремы выполнено.

Предположим теперь, что последовательность (p_n, q_n) бесконечна. Предположим, что $l(p_n)$ остается ограниченной с ростом n. Тогда в силу (2.I.2) найдется k такое, что $p_n = p_k$, $q_n = q_k (p_k)^{n-k}$ для всех $n \geq k$. Отсюда, поскольку q_n служат префиксами $\Delta_{-1}(\mu)$, то $\Delta_1(\mu) = q_k (p_k)^{\infty}$. Отсюда, в частности, следует, что для любого $j \geq 0$ $P_{-1, l(q_k) + j l(p_k)}(\mu) \in \Sigma_1^{(k)}$. Отсюда $T_\mu^{p_k}$ переводит замыкание $cl \{P_{-1, l(q_k) + j l(p_k)}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}$ само в себя, и значит, $T_\mu^{p_k}$ имеет на нем неподвижную точку $P_{-1,\infty}(\mu) \in \Sigma_1^{(k)} \cup \Sigma_0$. Заметим, что

$$\lim_{j \to \infty} P_{-1, l(q_k) + j l(p_k)}(\mu) = P_{-1,\infty}(\mu) \qquad (2.I.19)$$

Точке $P_{-1,\infty}(\mu)$ соответствует либо гомоклиническая траектория $\Gamma_1(\mu)$ типа p_k (если $P_{-1,\infty}(\mu) \in \Sigma_0$), либо предельный цикл типа p_k (если $P_{-1,\infty} \in \Sigma_1^{(k)}$), которые в силу (2.I.19) служат ω - предельными множествами для $\Gamma_{-1}(\mu)$.

Покажем, что если $P_{-1,\infty}(\mu) \in \Sigma_1^{(k)}$, то $\lim_{j \to \infty} P_{1, j l(p_k)}(\mu) = P_{-1,\infty}(\mu)$, то есть предельный цикл типа p_k служит ω - предельным множеством для $\Gamma_1(\mu)$. Действительно, в силу (2.I.16) $dist(P_{1, l(p_k)}(\mu), P_{-1,\infty}(\mu)) = dist(T_\mu^{p_k}(\Sigma_0), T_\mu^{p_k}(P_{-1,\infty}(\mu))) \leq K^{l(p_k)} dist(\Sigma_0, P_{-1,\infty}(\mu))$. Отсюда $P_{1, l(p_k)} \in \Sigma_1^{(k)}$. Предположим теперь, что при некотором $m > 1$ для всех $j = 1, \ldots, m-1$ выполнено $P_{1, j l(p_k)} \in \Sigma_1^{(k)}$. Тогда $P_{1, m l(p_k)}(\mu) = (T_\mu^{p_k})^m (\Sigma_0)$. Отсюда и из (2.I.16)

$$dist(P_{1, m l(p_k)}(\mu), P_{-1,\infty}(\mu)) \leq K^{m l(p_k)} dist(\Sigma_0, P_{-1,\infty}(\mu)) \qquad (2.I.20)$$

Отсюда $P_{1, m l(p_k)}(\mu) \in \Sigma_1^{(k)}$, и по индукции $\{P_{1, j l(p_k)}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty} \in \Sigma_1^{(k)}$. Теперь из (2.I.20) следует требуемое утверждение.

Получаем, что в рассматриваемом случае Ω_μ состоит из точки O и либо гомоклинической кривой $\Gamma_1(\mu)$ допустимого типа p_k, к которой стремится $\Gamma_{-1}(\mu)$, либо цикла типа p_k, к которому стремятся $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$. Таким образом, в рассматриваемом случае утверждение теоремы выполнено. Точно так же утверждение теоремы выполнено и в случае, когда $\ell(q_n)$ остается ограниченной с ростом n. Предположим теперь, что $\ell(q_n)$ и $\ell(p_n)$ стремятся к бесконечности с ростом n. Тогда, поскольку p_n и q_n служат префиксами слов $s_1(\mu)$ и $s_{-1}(\mu)$ соответственно, то пара $(s_1(\mu), s_{-1}(\mu))$ допустима. В силу пункта з) леммы 2.I.I в $s_1(\mu)$ сколь угодно далеко от начала встречаются сколь угодно длинные префикся $s_1(\mu)$. Отсюда найдутся последовательности $k_n \to \infty$ и $m_n \to \infty$ такие, что

$$\{S_{j1}(\mu)\}_{j=1}^{j=k_n-1} = \{S_{j1}(\mu)\}_{j=m_n}^{j=m_n+k_n-1} \tag{2.I.2I}$$

и

$$S_{k_n,1}(\mu) \neq S_{m_n+k_n,1}(\mu) \tag{2.I.22}$$

Заметим, что $k_n \neq \infty$ ни при каком n, так как иначе $s_1(\mu)$ было бы периодично, что противоречит пункту з) леммы 2.I. Из (2.I.2I) следует, что $P_{1,k_n}(\mu)$ и $P_{1,m_n+k_n}(\mu)$ лежат по разные стороны от Σ_0. Положим $j_n = k_n$, если $P_{1,k_n}(\mu) \in \Sigma_1$, $j_n = k_n + m_n$, если $P_{1,k_n}(\mu) \in \Sigma_{-1}$. Очевидно $P_{1j_n}(\mu) \in \Sigma_1$ и $dist(P_{1,j_n}(\mu), \Sigma_0) \leq$ $\leq dist(P_{1,k_n}(\mu), P_{1,k_n+m_n}(\mu))$. Но в силу (2.I.I6) и (2.I.2I) $dist(P_{1,k_n}(\mu), P_{1,k_n+m_n}(\mu)) \leq \delta K^{k_n}$ и, так как $k_n \to \infty$, то $P_{1,j_n} \to \Sigma_0$ при $n \to \infty$. Отсюда $\Gamma_1(\mu)$ P^+ - устойчива по Пуассону. Точно так же и $\Gamma_{-1}(\mu)$ P^+ - устойчива по Пуассону. Очевидно, что при этом Ω_μ является неблуждающим множеством и содержит континуум незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий. Более подробно структура множества Ω_μ для этого случая будет изучена в следующем параграфе, что позволит завершить доказательство теоремы.

Замечание. Пусть s - произвольное допустимое слово, отличное от $\{1\}$ и $\{-1\}$. В силу пункта е) леммы 2.I.I существует ровно два допустимых слова, полученных из s циклической перестановкой символов: $p^+(s)\,q^-(s)$ и $q^-(s)\,p^+(s)$. Как следует из доказательства теоремы, для того, чтобы $\Gamma_1(\mu)$ стремилась к предельному циклу или гомоклинической траектории типа s необходимо и достаточно, чтобы либо $s_1(\mu)=[p^+(s)\,q^-(s)]^\infty$, либо $s_1(\mu)=g\,[q^-(s)\,p^+(s)]^\infty$, где g - некоторое слово, образующее с $q^-(s)\,p^+(s)$ допустимую пару. В силу (2.I.3) $g=p^+(s)[q^-(s)p^+(s)]^n$ для некоторого $n\geq 0$. Отсюда получаем, что в любом случае $s_1(\mu)=[p^+(s)\,q^-(s)]^\infty$. (Если $s=\{1\}$, то $s_1(\mu)=1^\infty$, а если $s=\{-1\}$, то $s_1(\mu)=-1\,1^\infty$). Аналогично получаем, что для того чтобы $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремилась к предельному циклу или гомоклинической траектории типа s, необходимо и достаточно, чтобы $s_{-1}(\mu)=[q^-(s)\,p^+(s)]^\infty$. (Если $s=\{-1\}$, то $s_{-1}(\mu)=(-1)^\infty$, а если $s=1$, то $s_{-1}(\mu)=-1\,1^\infty$).

§ 2. Структура квазиминимальных множеств.

Выберем произвольное $b\in(0,\tfrac{1}{2})$ и рассмотрим однопараметрическое семейство кусочно-линейных отображений интервала: $\varphi_c:[c-1,c]\to[c-1,c]$, задаваемых формулой [29]

$$\bar{\xi}=\varphi_c(\xi)=\begin{cases}\varphi_c^{\{1\}}(\xi)=c+b\,\xi-1, & \text{если } \xi\geq 0\\ \varphi_c^{\{-1\}}(\xi)=c+b\,\xi, & \text{если } \xi\leq 0\end{cases}\qquad(2.2.I)$$

(Здесь $c\in[0,1]$ - параметр; при $\xi=0$ отображение определено неоднозначно). Отображение φ_c удовлетворяет условиям (2.I.I4)-(2.I.I7), поэтому для него выполнена теорема 2.I.I.* В частности, пусть $\{\xi_{1j}(c)\}$ - траектория точки c, $\{\xi_{-1j}(c)\}$ -траектория точки $(c-1)$. Определим для $\{\xi_{1j}(c)\}$ и $\{\xi_{-1j}(c)\}$ последовательности $s_1(c)$ и $s_{-1}(c)$ так же, как это было сделано в § I для $P_{1j}(\mu)$ и $P_{-1j}(\mu)$. Тогда, для любого иррационального τ^*, числа вращения $\tau(s_1(c))$ или $\tau(s_{-1}(c))$ тогда и только тогда равны τ^*, когда пара $(s_1(c), s_{-1}(c))$

*) В том объёме, в котором мы её доказали.

допустима, траектории $\xi_1(c)$ и $\xi_{-1}(c)$ P^+ - устойчивы по Пуассону, и их замыкание совпадает с неблуждающим множеством.

Отождествим точки c и $(c-1)$. Тогда формула (2.2.I) задает разрывное инъективное отображение окружности $\widetilde{\varphi}_c$. Для таких отображений стандартным образом (так же, как и для гомеоморфизмов окружности) определяется число вращения Пуанкаре $\tau(\widetilde{\varphi}_c)$ (см., например, [30]). Несложно показать, что $\tau(\widetilde{\varphi}_c) = \tau(\xi_1(c)) = \tau(\xi_{-1}(c))$. Как следует из [30], при изменении c от нуля до единицы $\tau(\widetilde{\varphi}_c)$ пробегает все вещественные числа от нуля до единицы. Таким образом, для любого иррационального $\tau^* \in [0,1]$ существует $c \in [0,1]$ такое, что $\tau(\xi_1(c), \xi_{-1}(c)) = \tau^*$. Несложно убедиться, что отображение $\widetilde{\varphi}_c$ есть отображение Пуанкаре некоторой секущей для т.н. "специального потока Черри" [23,31]. Это (рис поток на торе, имеющий седловое состояние равновесия, обе выходящие сепаратрисы которого в случае иррационального $\tau(\widetilde{\varphi}_c)$ P^+-устойчивы по Пуассону. Их замыкание Ω_c состоит, кроме выходящих сепаратрис, из седла, одной P^- - устойчивой по Пуассону входящей сепаратрисы и континуума незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий. Множество Ω_c получается, если удалить из тора т.н. "черную ячейку" - область, ограниченную выходящими сепаратрисами, (ту, которая не содержит P^- - устойчивой входящей сепаратрисы). Если склеить выходящие сепаратрисы друг с другом, то, очевидно, из Ω_c получится квазипериодическая обмотка тора со вклеенной проходимой крошкой - точкой O. Отсюда очевидно, что замыкание любой траектории из $\Omega_c \setminus O$ доставляет все множество Ω_c. Очевидно также, что число вращения $\tau(\widetilde{\varphi}_c)$, определяемое с точностью до преобразования $\tau \mapsto \frac{k_1\tau + k_2}{k_3\tau + k_4}$ (где k_1, k_2, k_3, k_4 - целые числа, $k_1 k_4 - k_2 k_3 = 1$), является полным инвариантом топологической эквивалентности специальных потоков Черри [30,31].

Теорема 2.2.I. Пусть для системы X_μ $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ P^+ - устойчивы по Пуассону и $\tau(s_1(\mu), s_{-1}(\mu)) = \tau^*$. Тогда $X_\mu|_{\Omega_\mu}$ топологически эквивалентно ограничению на квазиминимальное множество специального потока Черри с числом вращения τ^*.

Доказательство. Выберем такое c, чтобы $\tau(\bar{\varphi}_c) = \tau^*$. Обозначим через Ω_c' неблуждающее множество отображения φ_c. Обозначим через τ_μ отображение $\Sigma \to \Sigma$, равное $\tau_\mu^{\{1\}}$ при $u \geq 0$ и $\tau_\mu^{\{-1\}}$ при $u \leq 0$. Через Ω_μ' обозначим неблуждающее множество отображения τ_μ. Очевидно, для доказательства теоремы достаточно показать, что $\varphi_c|_{\Omega_c'}$ топологически сопряжено с $\tau_\mu|_{\Omega_\mu'}$, в том смысле, что существует гомеоморфизм $\chi: \Omega_c' \to \Omega_\mu'$ такой, что $\chi(\Omega_c' \cap \{\xi \geq 0\}) = \Omega_\mu' \cap (\Sigma_1 \cup \Sigma_0)$, $\chi(\Omega_c' \cap \{\xi \leq 0\}) = \Omega_\mu' \cap (\Sigma_{-1} \cup \Sigma_0)$, и $\chi \circ \varphi_c^{\{1\}} = \tau_\mu^{\{1\}} \circ \chi$ при $\xi \geq 0$, и $\chi \circ \varphi_c^{\{-1\}} = \tau_\mu^{\{-1\}} \circ \chi$ при $\xi \leq 0$. Докажем это утверждение. Пусть ξ - неблуждающая точка отображения φ_c. Очевидно, что существует последовательность $\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{j=+\infty}$ такая, что $\xi_0 = \xi$, $\xi_{j+1} = \varphi_c \xi_j$. Заметим, что отрезок последовательности $\{\xi_j\}_{j=-\infty}^{j=i}$ определяется однозначно, если $i \leq 0$, или если $i > 0$ и $\xi_j \neq 0$ при всех $j = 0, \ldots, i-1$. Рассмотрим последовательность $\eta(\xi) = \{\eta_j(\xi)\}_{j=-\infty}^{j=+\infty}$: если $j < 0$, то $\eta_j(\xi) = \operatorname{sign} \xi_j$ при $\xi_j \neq 0$ и $\eta_j(\xi) = -\operatorname{sign} \xi_{j+1}$ при $\xi_j = 0$, если же $j \geq 0$ и $\xi_n \neq 0$ при всех $n = 0, \ldots, j$, то $\eta_j(\xi) = \operatorname{sign} \xi_j$, иначе $\eta_j(\xi) = 0$. Очевидно, что если $j < 0$ или $\xi_n \neq 0$ при всех $n = 0, \ldots, j$, то $\xi_{j+1} = \varphi_c^{\{\eta_j(\xi)\}} \xi_j$. По построению η однозначно определяется по ξ. Заметим, что $\{\eta_j(\xi)\}_{j=0}^{j=+\infty} \neq s_1(c)$ и $\{\eta_j(\xi)\}_{j=0}^{j=+\infty} \neq s_{-1}(c)$ ни для какого ξ. Действительно, пусть для определенности $\xi^0 > 0$ и $\{\eta_j(\xi^0)\}_{j=0}^{+\infty} = s_1(c)$. Тогда в силу монотонности функций $\varphi_c^{\{1\}}$ и $\varphi_c^{\{-1\}}$, очевидно $\{\eta_j(\xi)\}_{j=0}^{+\infty} = s_1(c)$ для всех $\xi \in (0, \xi^0]$. Но, тогда, поскольку точка $c-1 = \varphi_c^{\{1\}}(0)$ P^+ - устойчива по Пуассону, то найдется i такое, что $\xi_{1i}(c) \in (0, \xi^0]$ и, следовательно, $\{\eta_j(\xi_{1i})\}_{j=i}^{j=+\infty} = s_1(c)$. Отсюда поскольку $\{\eta_j(\xi_{1i}(c))\}_{j=0}^{j=+\infty} = \{S_{1j}(c)\}_{j=i}^{j=+\infty}$, получаем противоречие с пунктом з) леммы 2.I.I.

Покажем, что для каждого $\xi \in \Omega_c'$ существует точка $P \in \Sigma$ такая, что существует последовательность $\{P_j\}_{j=-\infty}^{j=0}$ такая, что

$$P_0 = P, \ P_{j+1} = \tau_\mu^{\eta_j(\xi)}(P_j) \qquad j<0 \qquad (2.2.2)$$

Действительно, как следует из теоремы 2.I.I $\Omega_c' = cl(\Omega_c'' = (\{\xi_{1n}(c)\}_{n=0}^{+\infty} \cup \{\xi_{-1n}(c)\}_{n=0}^{n=+\infty}))$. Отсюда, поскольку все $\xi_j \in \Omega_c'$, то сколь угодно близко к ξ_j есть точки из Ω_c''. Заметим, что если $\xi=0$, то точки из Ω_c'' есть сколь угодно близко к ξ_j как справа, так и слева от ξ_j, это следует из устойчивости по Пуассону обеих точек $c = \varphi_c^{\{-1\}}(0)$ и $c-1 = \varphi_c^{\{1\}}(0)$, и монотонного возрастания функций $\varphi_c^{\{1\}}$ и $\varphi_c^{\{-1\}}$. Отсюда по определению $s_1(c)$ и $s_{-1}(c)$ получим, что если $\xi \neq 0$, то для любого $k \geq 0$ существуют целое j и $i \in \{-1, 1\}$ такие, что

$$\{S_{n_i}(c)\}_{n=j}^{n=j+k} = \{\eta_n(\xi)\}_{n=-k}^{n=0} \qquad (2.2.3)$$

Если же $\xi = 0$, то для любого $k \geq 0$ существуют целые j^+, j^- и символы $i^+, i^- \in \{-1, 1\}$ такие, что

$$\begin{cases} \{S_{n_{i^+}}(c)\}_{n=j^+}^{n=j^++k} = \{\{\eta_n(0)\}_{n=-k}^{n=-1}\{1\}\} \\ \{S_{n_{i^-}}(c)\}_{n=j^-}^{n=j^-+k} = \{\{\eta_n(0)\}_{n=-k}^{n=-1}\{-1\}\} \end{cases} \qquad (2.2.4)$$

Обозначим при $\xi \neq 0$ через $A_k(\xi)$ замыкание множества точек $\{P_{i,j-1}(\mu)\}$ таких, что $\{S_{n_i}(\mu)\}_{n=j}^{n=j+k} = \{\eta_n(\xi)\}_{n=-k}^{n=0}$. При $\xi=0$ рассмотрим множества A_k^+ и A_k^- – замыкания множеств точек $\{P_{i^+, j^+-1}(\mu)\}$ и $\{P_{i^-, j^--1}(\mu)\}$ соответственно таких, что $\{S_{n_{i^+}}(\mu)\}_{n=j^+}^{n=j^++k} = \{\{\eta_n(0)\}_{n=-k}^{n=-1}\{1\}\}$ и $\{S_{n_{i^-}}(\mu)\}_{n=j^-}^{n=j^-+k} = \{\{\eta_n(0)\}_{n=-k}^{n=-1}\{-1\}\}$. Поскольку $s_1(c) = s_1(\mu)$ и $s_{-1}(c) = s_{-1}(\mu)$, то в силу (2.2.3), (2.2.4) множества $A_k(\xi), A_k^{\pm}$ непусты, $A_k(\xi) \subseteq \Sigma_{\eta_k(\xi)} \cup \Sigma_0$ при всех $k \geq 0$, $A_k^+ \cup A_k^- \subseteq \Sigma_{\eta_k(0)} \cup \Sigma_0$ при $k \geq 1$, $A_0^+ \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, $A_0^- \subseteq \Sigma_{-1} \cup \Sigma_0$. Кроме того, очевидно,

$\tau_\mu^{\{\eta_k(0)\}}(A_k^\pm) \le A_{k-1}^\pm$, $\tau_\mu^{\{\eta_k(\xi)\}}(A_k(\xi)) \le A_{k-1}(\xi)$ (при $k \ge 1$). Отсюда получаем, что непусты множества

$$A(\xi) = A_0(\xi) \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \tau_\mu^{\{\eta_j(\xi)\}_{j=-k}^{j=-1}} (A_k(\xi)) \right],$$

$$A^\pm = A_0^\pm \cap \left[\bigcap_{k=1}^{\infty} \tau_\mu^{\{\eta_j(0)\}_{j=-k}^{j=-1}} (A_k^\pm) \right].$$

По построению, любая точка из $A(\xi)$ (при $\xi = 0$ - из $A^+ \cup A^-$) удовлетворяет (2.2.2).

Покажем, что для каждого ξ существует не более одной точки P , удовлетворяющей (2.2.2). Действительно, если существуют две точки, то из (2.2.2) и (2.I.I6) $dist(P^1, P^2) = dist(\tau_\mu^{\{\eta_n(\xi)\}_{n=-j}^{n=-1}}(P_{-j}^1), \tau_\mu^{\{\eta_n(\xi)\}_{n=-j}^{n=-1}}(P_{-j}^2)) \le$

$\le K^j dist(P_{-j}^1, P_{-j}^2) \le \delta K^j \to 0$ при $j \to +\infty$, откуда $P^1 = P^2$.

Получаем, что множества $A(\xi)$, A^+, A^- состоят ровно из одной точки, причем $A^+ = A^- = A(0)$. Положим $\chi(\xi)$ равным единственному элементу множества $A(\xi)$. По построению $A(\xi) \subseteq \Sigma_{\eta_0(\xi)} \cup \Sigma_0$ при $\xi \ne 0$, $A^+ \subseteq \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, $A^- \subseteq \Sigma_{-1} \cup \Sigma_0$. Отсюда, поскольку $A^+ = A^- = A(0)$, получаем $A(\xi) \subseteq \Sigma_{\eta_0(\xi)} \cup \Sigma_0$. Таким образом, $\chi(\xi) \in \Sigma_{\eta_0(\xi)} \cup \Sigma_0$ Покажем, что $\chi(\xi) \notin \Sigma_0$ при $\xi \ne 0$. Действительно, очевидно, что при любом $j \geqslant 1$ точка $(\tau_\mu^{\{\eta_n(\xi_j)\}_{n=-j}^{n=-1}})^{-1} \chi(\xi_j)$ удовлетворяет (2.2.2) Отсюда получаем, что $\chi(\xi) = (\tau_\mu^{\{\eta_n(\xi_j)\}_{n=-j}^{n=-1}})^{-1} \chi(\xi_j)$, откуда $\chi(\xi_j) = \tau_\mu^{\{\eta_n(\xi_j)\}_{n=-j}^{n=-1}} \chi(\xi)$. Пусть, например, $\xi > 0$ и $\chi(\xi) \in \Sigma_0$. Тогда $\chi(\xi_j) = \tau_\mu^{\{\eta_n(\xi_j)\}_{n=-j}^{n=-1}}(\Sigma_0) = P_{1,j-1}(\mu)$ $\{\eta_n(\xi_j)\}_{n=-j}^{n=-1} = \{S_{n1}(\mu)\}_{n=0}^{n=j-1}$. Отсюда получаем, во-первых, что ξ_j однозначно определяются по ξ при $j \geqslant 0$: $\xi_{j+1} = \varphi_c^{\{S_{j1}(\mu)\}}(\xi_j)$, откуда получаем, что $\{\eta_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty} = S_1(\mu) = s_1(c)$, что невозможно. Таким образом $\chi(\xi) \in \Sigma_{sign\,\xi}$. Из (2.2.2) очевидно, следует, что $\chi \circ \varphi_c^{\{1\}} = \tau_\mu^{\{1\}} \circ \chi$ и $\chi \circ \varphi_c^{\{-1\}} = \tau_\mu^{\{-1\}} \circ \chi$. Легко проверяется непрерывность χ : если ξ^1 близко к ξ^2 , то $\{\eta_n(\xi^1)\}_{n=-j}^{n=-1} = \{\eta_n(\xi^2)\}_{n=-j}^{n=-1}$ для достаточно большого j , и тогда $dist(\chi(\xi^1), \chi(\xi^2)) \le \delta K^j$, то есть $\chi(\xi^1) \to \chi(\xi^2)$ при $\xi^1 \to \xi^2$. Из (2.2.2) и (2.I.I8) следует, что $dist(\chi(\xi), \{P_{1j}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty} \cup \{P_{-1j}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}) \le \delta K^j$, где j может быть сделано сколь угодно большим. Отсюда $\chi(\xi)\in\Omega'_\mu$. С другой стороны, из того, что $\chi(0)\in\Sigma_0$ получаем, что $\chi(c)=P_{-10}(\mu)$, $\chi(c-1)=$ $=P_{10}(\mu)$, откуда $\chi(\Omega'_c)\supseteq\{P_{1j}(\mu)\}_{j=0}^{+\infty}\cup\{P_{1j}(\mu)\}_{j=0}^{-\infty}$ и значит, $\chi(\Omega'_c)=\Omega'_\mu$. Таким образом, χ осуществляет полусопряженность отображения $\varphi_c|_{\Omega'_c}$ отображению $\tau_\mu|_{\Omega'_\mu}$. Для завершения доказательства теоремы осталось показать инъективность χ. Предположим, что $\chi(\xi^1)=\chi(\xi^2)=P$. Заметим, что если точкам ξ^1 и ξ^2 отвечает одна и та же последовательность $\{P_j\}_{j=-\infty}^{j=0}$, то из (2.2.2) $\{\eta_n(\xi^1)\}_{n=-\infty}^{n=-1}=\{\eta_n(\xi^2)\}_{n=-\infty}^{n=-1}$. Отсюда, очевидно, $dist\,(\xi^1,\xi^2)=0$. Если же точкам ξ^1 и ξ^2 отвечают разные последовательности $\{P_j^1\}_{j=-\infty}^{j=0}$ и $\{P_j^2\}_{j=-\infty}^{j=0}$, то это, очевидно, возможно, только, если $P_i^1\neq P_i^2$, $P_i^1\in\Sigma_0$, $P_i^2\in\Sigma_0$ для некоторого $i\leq 0$ и $P_j^1=P_j^2$ для всех $j=i+1,\dots,0$. Но очевидно, что точки P_i^1 и P_i^2 удовлетворяют (2.2.2) для ξ_i^1 и ξ_i^2 соответственно. Отсюда, $\chi(\xi_i^1)=P_i^1\in\Sigma_0$ и $\chi(\xi_i^2)=P_i^2\in\Sigma_0$, откуда $\xi_i^1=\xi_i^2=0$. Теперь поскольку $P_j^1=P_j^2$ и, значит, $\eta_j(\xi^1)=\eta_j(\xi^2)$ для всех $j>i$, то получаем $\xi^1=\xi^2$. Теорема доказана.

§ 3. Некоторые свойства бифуркационных диаграмм семейств X_μ.

Как следует из (I.3.I2)- (I.3.I4) отображения $\tau_\mu^{\{i\}}$ представляются в виде

$$\begin{cases}\bar u = \mu_i + \tilde\varphi_i^u(\mu,u,z)\\ \bar z = \varphi_i^z(\mu,u,z)\end{cases}\qquad (2.3.I)$$

где $\tilde\varphi_i^u(\mu,0,z)=0$,

$$\left\|\frac{\partial(\tilde\varphi_i^u,\varphi_i^z)}{\partial(u,z)}\right\|\leq K,\quad \left\|\frac{\partial\varphi_i^z}{\partial\mu}\right\|\leq L,\quad \left\|\frac{\partial\tilde\varphi_i^u}{\partial\mu}\right\|\leq N \qquad (2.3.2)$$

где K и N могут быть сделаны сколь угодно малыми за счет малости δ и δ^μ. Будем считать, что

$$N+\frac{(L+1)K}{1-K}<\frac{1}{2} \qquad (2.3.3)$$

Лемма 2.3.I.

а) Если $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_2(\mu)$ является гомоклинической типа $s=\{S_0\dots S_n\}$, то при изменении параметра μ_{S_n} гомоклиническая траектория расщепляется. При увеличении μ_{S_n} траектория $\Gamma_1(\mu)$, а при уменьшении μ_{S_n} – $\Gamma_{-1}(\mu)$, расщепляются вовнутрь, при этом рождается периодическое движение типа $\mathfrak{s}$.

б) Если траектория $\Gamma_1(\mu)$ P^+ – устойчива по Пуассону, то сколь угодно малым изменением любого из параметров μ_1 или μ_{-1} ее можно сделать гомоклинической к седлу.

Доказательство. Поскольку $(u^{j+1,i}(\mu), z^{j+1,i}(\mu)) = T_\mu(u^{ji}(\mu), z^{ji}(\mu))$, то из (2.3.I) и (2.3.2) следует, что $\left\| \frac{\partial(u^{j+1,i}, z^{j+1,i})}{\partial\mu} \right\| \le 1 + \left\| \frac{\partial(\tilde\varphi^u, \psi^z)}{\partial(u,z)} \right\| \left\| \frac{\partial(u^{ji}, z^{ji})}{\partial\mu} \right\| + \left\| \frac{\partial(\tilde\varphi^u, \psi^z)}{\partial\mu} \right\| \le 1 + L + K \left\| \frac{\partial(u^{ji}, z^{ji})}{\partial\mu} \right\|$

Из этого соотношения, полагая $\left\| \frac{\partial(u^{-1,i}, z^{-1,i})}{\partial\mu} \right\| = 0$, по индукции получаем $\left\| \frac{\partial(u^{ji}, z^{ji})}{\partial\mu} \right\| \le \frac{1+L}{1-K}$ для всех $j = \overline{0, +\infty}$. Отсюда и из (2.3.3) имеем

$$\left\| \frac{d}{d\mu} \tilde\varphi^u(u^{ji}(\mu), z^{ji}(\mu), \mu) \right\| \le \left\| \frac{\partial\tilde\varphi^u}{\partial\mu} \right\| + \left\| \frac{\partial\tilde\varphi^u}{\partial(u,z)} \right\| \left\| \frac{\partial(u^{ji}, z^{ji})}{\partial\mu} \right\| \le \frac{1}{2} \quad (2.3.5)$$

Предположим теперь, что при некотором μ° $\Gamma_1(\mu)$ является гомоклинической типа $\mathfrak{s} = \{S_0 \dots S_n\}$. Это означает, что $P_{1,n+1}(\mu^\circ) \in \Sigma_0$ или $u^{n+1,1}(\mu^\circ) = 0$. Заметим, что $P_{1j}(\mu^\circ) \notin \Sigma_0$ при $j = 0, \dots, n$. Это свойство, очевидно, сохраняется и при μ близких к μ°. По определению типа гомоклинической кривой $P_{1n}(\mu^\circ) \in \Sigma_{S_n}$. Тогда, как следует из (2.3.5), $u^{n+1,1}$ – монотонно возрастающая функция μ_{S_n}. Отсюда, с изменением μ_{S_n} гомоклиническая петля $\Gamma_1(\mu)$ расщепляется, причем при увеличении μ_{S_n} петля расщепляется вовнутрь. В последнем случае, как следует из [1], из нее рождается цикл типа $\mathfrak{s}$. Аналогичные рассуждения для петли $\Gamma_{-1}(\mu)$ доказывают пункт а) леммы.

б) Предположим, что при некотором μ° траектория $\Gamma_i(\mu)$ P^+- устойчива по Пуассону. Тогда для любого $k \in \{-1, 1\}$ и $\Delta\mu > 0$ найдется j такое, что $P_{j-1,i}(\mu^\circ) \in \Sigma_k$

$$|u^{ji}(\mu^\circ)| < \Delta\mu/2 \quad (2.3.6)$$

Тогда, как следует из (2.3.5), если при изменении μ_k в интервале $(\mu_k^0-\Delta\mu,\ \mu_k^0+\Delta\mu)$ ни одна из точек $P_{in}\ (n=1,\dots,j-1)$ не выходит на Σ_0, то $u^{ji}(\mu)$ будет пробегать все значения в интервале $(u^{ji}(\mu^0)-\frac{\Delta\mu}{2},\ u^{ji}(\mu^0)+\frac{\Delta\mu}{2})$.Отсюда и из (2.3.6) найдётся такое $n\in\{1,\dots,j\}$, что при некотором $\mu_k\in(\mu_k^0-\Delta\mu,\ \mu_k^0+\Delta\mu)$ точка $P_{in}\in\Sigma_0$, то есть $\Gamma_i(\mu)$ становится гомоклинической к седлу.Лемма доказана.

Из леммы 2.3.I и теоремы 2.I.I следует,что бифуркационное множество системы X_μ в окрестности начала координат на плоскости $(\mu_1,\ \mu_{-1})$ отвечает существованию гомоклинических кривых и квазиминимальных множеств (если последние существуют).

Обозначим через $\mathcal{M}_s$ бифуркационное множество в плоскости (μ_1,μ_{-1}), отвечающее гомоклинической кривой типа $s=\{s_0\dots s_n\}$

Лемма 2.3.2. $\mathcal{M}_s$ задаётся уравнением вида $\mu_{s_n}=h_s(\mu_{-s_n})$, где h_s - функция с константой Липшица,меньшей единицы, определённая на открытом множестве $\mathcal{D}_s$.Концам интервалов,составляющих $\mathcal{D}_s$, отвечают точки существования пары гомоклинических траекторий типов p и q таких, что $s\neq p$, $s\neq q$ и $s\in\mathcal{G}(p,q)$.

Доказательство. Пусть при некотором μ^0 траектория $\Gamma_{s_0}(\mu)$ является гомоклинической траекторией типа s . При этом $u^{n+1,s_0}=0$,или из(2.3.I) $\mu_{s_n}+\tilde\varphi^n_{s_n}(u^{n,s_0}(\mu),z^{n,s_0}(\mu),\mu)=0$ Отсюда и из (2.3.4) на основании теоремы о неявной функции получаем $\mu_{s_n}=h_s(\mu_{-s_n})$, где h_s - функция с константой Липшица,меньшей единицы, определённая на некотором открытом множестве $\mathcal{D}_s$. Множество $\mathcal{D}_s$ представляется в виде не более счётного числа непересекающихся интервалов. Из соображений непрерывности следует, что концевым точкам такого интервала могут отвечать только точки существования либо гомоклинической траектории типа p такого, что $s = p^n$, где $n \geq 2$, либо пары гомоклинических траекторий типов p и q таких, что $s \neq p$, $s \neq q$ и s составлено из слов p и q. Первый случай невозможен, поскольку получалось бы, что гомоклинической траектории типа s отвечает периодическая точка отображения $\tau_\mu^{\{p\}}$, что противоречит тому, что $\tau_\mu^{\{p\}}$ сжимающее отображение. Во втором случае $\tau(p) > \tau(s) > \tau(q)$ что означает, что $s \in \mathcal{G}(p,q)$ в силу пункта б) леммы 2.I.I. Лемма доказана.

Заметим, что бифуркационное множество $\mathcal{M}_{(s_1, s_{-1})}$, отвечающее существованию P^+ - устойчивых сепаратрис, кодируемых парой (s_1, s_{-1}), служит пределом для линий существования гомоклинических кривых седла, и, следовательно, ложится на липшицеву кривую.

Зададим на множестве бесконечных вправо слов алфавита $\{-1, 0, 1\}$ тихоновскую топологию и отношение лексикографического порядка.

Лемма 2.3.3.

а) $s_i(\mu)$ $(i \in \{-1, 1\})$ при фиксированном $\mu_{-1} > 0$ в области $\mu_1 \geq -\mu_{-1}$ является неубывающей функцией μ_1, строго монотонной в точках, где $\Gamma_i(\mu)$ P^+-устойчива, либо стремится к гомоклинической к седлу траектории; постоянной на интервале, где $\Gamma_i(\mu)$ стремится к предельному циклу; разрывной в точках, где $\Gamma_i(\mu)$ является гомоклинической к седлу, и непрерывной в остальных точках. б) Если при некотором μ_1^0 траектория $\Gamma_1(\mu)$ является гомоклинической траекторией типа s, то

$$\lim_{\mu_1\to\mu_1^0+0} s_1(\mu) = s^\infty, \lim_{\mu_1\to\mu_1^0-0} s_1(\mu) = s \lim_{\mu_1\to\mu_1^0-0} s_{-1}(\mu).$$

Если $\Gamma_{-1}(\mu^0)$ является гомоклинической типа p, то

$$\lim_{\mu_1\to\mu_1^0+0} s_{-1}(\mu) = p \lim_{\mu_1\to\mu_1^0+0} s_1(\mu), \lim_{\mu_1\to\mu_1^0-0} s_{-1}(\mu) = p^\infty.$$

(Для функций $s_i(\mu_{-1})$ при фиксированном $\mu_1<0$ в области $\mu_{-1}\le-\mu_1$ справедливы аналогичные утверждения).

Доказательство. Как следует из доказательства теоремы 2.I.I $s_i(\mu)$ при $\mu_{-1}>0$, $\mu_1\geq-\mu_{-1}$ составлено из блоков $\{0\}$, $\{1\}$ и $\{-1\}$. Значит, если $S_{ji}(\mu)=-1$, то $S_{j+1,i}(\mu)=1$. Если же $S_{ji}(\mu)=1$, то $u^{j+1,i}(\mu)=\mu_1+\widehat{\varphi}_1^u(u^{ji}(\mu), z^{ji}(\mu))$, откуда в силу (2.3.5) $u^{j+1,i}(\mu)$ (а вместе с ней – $S_{j+1,i}(\mu)$) – неубывающая функция от μ_1. В любом случае получаем, что пока $S_{ji}(\mu)$ неизменно, $S_{j+1,i}(\mu)$ не убывает с ростом μ_1. Отсюда $s_i(\mu)$ – неубывающая функция μ_1. Остальные утверждения леммы очевидным образом следует из леммы 2.3.I и замечания к теореме 2.I.I.

Лемма 2.3.4 а) При $\mu_1>0$, $\mu_{-1}<0$ множество Ω_μ содержит два цикла типов $\{1\}$ и $\{-1\}$, $s_1(\mu)=1^\infty$, $s_{-1}(\mu)=(-1)^\infty$.

б) При $\mu_{-1}\le\mu_1<0$ Ω_μ содержит единственный цикл типа $\{-1\}$, $s_1(\mu)=1(-1)^\infty$, $s_{-1}(\mu)=(-1)^\infty$.

в) При $\mu_1\geqslant\mu_{-1}>0$ Ω_μ содержит единственный цикл типа $\{1\}$, $s_1(\mu)=1^\infty$, $s_{-1}(\mu)=-1\,1^\infty$.

г) При $\mu_1=-\mu_{-1}<0$ Ω_μ содержит единственный цикл типа $\{1-1\}$, $s_1(\mu)=(1-1)^\infty$, $s_{-1}(\mu)=(-1\,1)^\infty$.

Доказательство. Утверждение пункта а) следует из [1].

б) При $0>\mu_1\geqslant\mu_{-1}$ в силу [1] $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремится к циклу типа $\{-1\}$ и $s_{-1}(\mu)=(-1)^{\infty}$.

Покажем, что $s_1(\mu)=1(-1)^{\infty}$. Действительно, рассмотрим последовательность точек $P_{1j}(\mu)$. Поскольку $\mu_1<0$, то $P_{10}(\mu)\in\Sigma_{-1}$. Кроме того, поскольку $\mu_1\le\mu_1$, то $\mu_1=dist(P_{10}(\mu),\Sigma_0)<$ $<\frac{1}{K}\,dist(P_{-10}(\mu),\Sigma_0)$ где K - константа сжатия из (2.I.I6). Предположим, что для некоторого j выполнено $P_{1j}(\mu)\in\Sigma_{-1}$ и $dist(P_{1j}(\mu),\Sigma_0)<\frac{1}{K}\,dist(P_{-10}(\mu),\Sigma_0)$. Тогда
$dist(P_{1,j+1}(\mu),\Sigma_0)<dist(P_{1,j+1}(\mu),P_{-10}(\mu))+dist(P_{-10}(\mu),\Sigma_0)\le$
$\le K\,dist(P_{1j}(\mu),\Sigma_0)+dist(P_{-10}(\mu),\Sigma_0)<2\,dist(P_{-10}(\mu),\Sigma_0)<\frac{1}{K}\,dist(P_{-10}(\mu),$ (поскольку $K<\frac{1}{2}$) и $dist(P_{1,j+1}(\mu),P_{-10}(\mu))\le K dist(P_{1j}(\mu),\Sigma_0)$ $<dist(P_{-10}(\mu),\Sigma_0)$, откуда $P_{1,j+1}(\mu)\in\Sigma_{-1}$. Отсюда по индукции $P_{1j}(\mu)\in\Sigma_{-1}$ для всех $j\ge 0$, значит $s_1(\mu)=1(-1)^{\infty}$ и $\Gamma_1(\mu)$ стремится к циклу типа $\{-1\}$. Пункт б) доказан, доказательство пункта в) аналогично.

Для доказательства пункта г) заметим, что как следует из доказательства теоремы 2.I.I при $\mu_{-1}>0$ и $\mu_1\ge-\mu_{-1}$ слова $s_1(\mu)$ и $s_{-1}(\mu)$ составлены из блоков $\{1\}$, $\{-11\}$ и $\{0\}$; а при $\mu_1\le 0$, $\mu_1\le-\mu_{-1}$ слова $s_1(\mu)$ и $s_{-1}(\mu)$ составлены из блоков $\{-1\}$, $\{1-1\}$, $\{0\}$. Отсюда, при $0>\mu_1=-\mu_{-1}$ имеет место $s_1(\mu)=(1-1)^{\infty}$ и $s_{-1}(\mu)=(-11)^{\infty}$, откуда $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремятся к предельному циклу типа $\{1-1\}$ Лемма доказана.

§4. Бифуркации контура типа "восьмёрка".

Предположим, что $\lambda_1(\mu)$ вещественно и $\lambda_1(\mu)>Re\,\lambda_2(\mu)$. Предположим, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в W_0^{ss} и входят в O с противоположных направлений. Предположим также, что сепаратрисные величины A_1 и A_{-1} отличны от нуля.

Теорема 2.4.I. В рассматриваемом случае Ω_μ не может быть квазиминимальным множеством и при $\mu\ne 0$ не может состоять из двух гомоклинических кривых седла. В случае $A_1>0,\ A_{-1}>0$ могут быть циклы только типов $\{1\},\{-1\}$ и $\{1\ -1\}$ (бифуркационная диаграмма приведена на рис. 9). В случае $A_1<0,\ A_{-1}>0$ – циклы только типов $\{1\},\{-1\},\{1-1\},\{1-1 1\}$(рис. 10). В случае $A_1<0,\ A_{-1}<0$ –циклы только типов $\{1\},\{-1\},\{1-1\},\{(1-1)^n 1\},\{(-11)^n -1\}\ (1\le n<\infty)$; плоскость параметров (рис. 11) разбивается на счетное число областей кривыми $\mathcal{M}_{1-1},\mathcal{M}_{-11},\mathcal{M}_{-1(1-1)^n},\mathcal{M}_{1-1-1(1-1)^n},\mathcal{M}_{1(-11)^n},\mathcal{M}_{-11(1-1)^n}\ (n\ge 0)$.

На кривых $\mathcal{M}_{1-1}$ и $\mathcal{M}_{-11}$ при $A_1<0,\ A_{-1}<0$, множество Ω_μ содержит одну гомоклиническую к O траекторию $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_{-1}(\mu)$ соответственно, к которой стремится другая траектория $\Gamma_i(\mu)$; для всех других бифуркационных кривых при любых комбинациях знаков A_i Ω_μ содержит гомоклиническую к O траекторию и периодическую траекторию, общую для областей, разделяемых бифуркационной кривой.

Доказательство. В силу замечания 3 к теореме I.3.I в рассматриваемом случае $\Gamma_1(\mu)$ и $\Gamma_{-1}(\mu)$, а следовательно Ω_μ, содержатся в двумерном инвариантном многообразии M°_μ. $M^\circ_\mu\cap\Sigma$ состоит из двух кривых: a_1 и a_{-1}. Положим $a_{ij}=a_i\cap\{ju\ge 0\}\ (j\in\{-1,1\})$. Положим $\Psi_{ij}=T_{j\mu}|_{a_{ij}}:a_{ij}\to a_j$. Очевидно циклу типа $\{S_0\ \dots\ S_m\}$ отвечает неподвижная точка отображения $\Psi_{S_mS_0}\circ\Psi_{S_{m-1}S_m}\circ\dots\circ\Psi_{S_0S_1}$.

Из (I.3.I5), (I.3.I6) вытекают следующие свойства отображений Ψ_{ij}: 1) $\Psi_{11}(0)=\Psi_{-11}(0)=\mu_1,\ \Psi_{1-1}(0)=\Psi_{-1-1}(0)=\mu_{-1}$;2) все Ψ_{ij} непрерывны и монотонны: в случае $A_1>0,\ A_{-1}>0$ Ψ_{11} и Ψ_{-1-1} – возрастающие функции u, Ψ_{1-1} и Ψ_{-11} – убывающие, в случае $A_1<0$, $A_{-1}>0$ Ψ_{11} и Ψ_{1-1} – убывающие, Ψ_{-1-1} и Ψ_{-11} – возрастающие, в случае $A_1<0,\ A_{-1}<0$ Ψ_{11} и Ψ_{-1-1} – убывающие, Ψ_{1-1} и Ψ_{-11} – возрастающие; 3) все Ψ_{ij} – сжимающие отображения.

Рассмотрим случай, когда $A_1>0,\ A_{-1}>0$. В силу леммы 2.3.4 и симметрии задачи относительно замены Γ_1 на Γ_{-1} достаточно рассмотреть область $\mu_1<0$. В этой области у отображения

Ψ_{11} нет неподвижных точек (если существует u^* такое, что $\Psi_{11}(u^*)=u^*$, то $(0,u^*) \xrightarrow{\Psi_{11}} (\mu_1, u^*)$, а так как $\mu_1<0$, то это противоречит тому, что Ψ_{11} - сжимающее отображение). Отсюда все траектории из a_{11} попадают в a_{1-1}, откуда в a_{-1}. Если $u \in a_{-1-1}$, то траектория точки u возвращается на a_{-1} в точку $\bar{u}=\Psi_{-1-1}(u)$. Если $u \in a_{-11}$, то траектория точки u пересекается с a_1 в точке $u'=\Psi_{-11}(u) \le \Psi_{-11}(0)=\mu_1<0$. Отсюда $u' \in a_{1-1}$, так что затем траектория точки u пересекает a_{-1} в точке $\bar{u}=\Psi_{1-1}\circ\Psi_{-11}(u) \geq$ $\geq \Psi_{1-1}\circ\Psi_{-11}(0)=\Psi_{1-1}(\mu_1)>\Psi_{1-1}(0)=\mu_{-1}$. График отображения $\bar{u}$ приведен на рис. 22.1 - 22.3. Видно, что при $\Psi_{1-1}(\mu_1)<0$ все траектории стремятся к неподвижной точке u^* отображения Ψ_{-1-1} - ей соответствует цикл типа $\{-1\}$ системы X_μ. При $\mu_{-1}<0<\Psi_{1-1}(\mu_1)$ все траектории из a_{-1-1} стремятся к u^*, а все траектории из a_{-11} - к u^{**} - неподвижной точке отображения $\Psi_{1-1}\circ\Psi_{-11}$ - ей соответствует цикл типа $\{1-1\}$. При $0<\mu_{-1}$ все траектории стремятся к u^{**}.

Таким образом область $\mu_1<0$ разбивается на три области: W_1: $\Psi_{1-1}(\mu_1)<0$ (здесь Ω_μ содержит один цикл типа $\{-1\}$), W_2: $\mu_{-1}<0<\Psi_{1-1}(\mu_1)$ (здесь Ω_μ содержит два цикла: $\{-1\}$ и $\{1-1\}$), W_3: $\mu_{-1}>0$ (здесь Ω_μ содержит один цикл типа $\{1-1\}$). Бифуркационными кривыми служат M_{-1}: $\mu_{-1}=0$ и M_{1-1}: $\Psi_{1-1}(\mu_1)=0$. В силу леммы 2.3.2 M_{1-1} задается уравнением $\mu_{-1}=h_{1-1}(\mu_1)$, причем, поскольку $\Psi_{1-1}(\mu_1)<0$ на луче $\{\mu_{-1}<0, \mu_1=0\}$ и $\Psi_{1-1}(\mu_1)>0$ на луче $\{\mu_{-1}=0, \mu_1<0\}$, то h_{1-1} определена при всех $\mu_1<0$ (естественно $|\mu_1|\le\delta^\mu$)*. Таким образом в случае $A_1>0$, $A_{-1}>0$ утверждение теоремы выполнено. Рассмотрим случай $A_1<0$, $A_{-1}>0$. Пусть $\mu_1<0$ тогда у отображения Ψ_{11} нет неподвижных точек, и все траектории, выходящие из a_1, попадают на a_{-1}. Траектория, выходящая из точки $u \in a_{-11}$, попадает на a_1 в точку $u' \in \Psi_{-11}(u)$.

* Области определения бифуркационных кривых для других комбинаций знаков A_i устанавливаются аналогично и мы не будем на этом больше останавливаться.

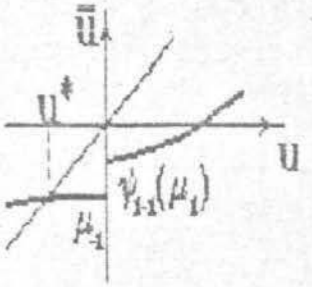


рис. 22.1

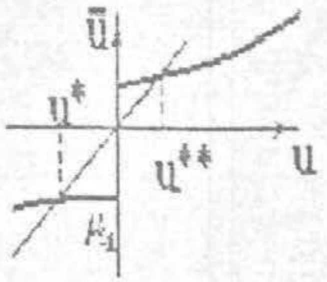


рис. 22.2

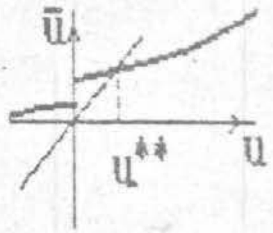


рис. 22.3

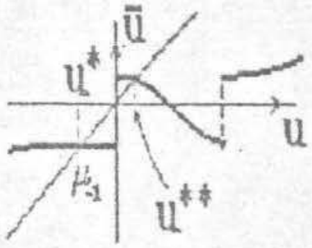


рис. 22.5

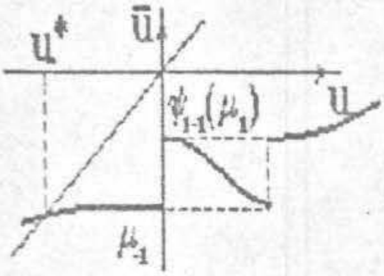


рис. 22.4.

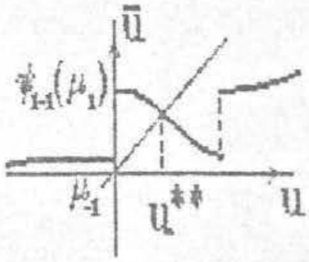


рис. 22.6.

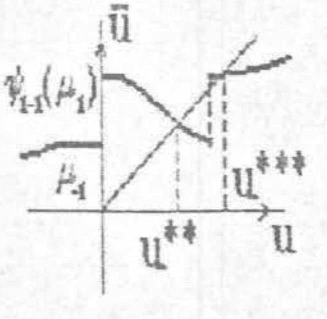


рис. 22.7.

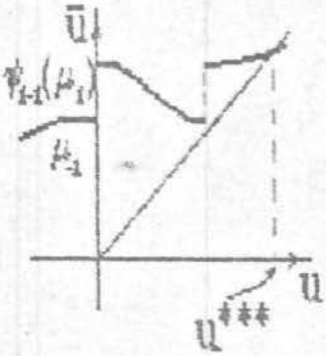


рис. 22.8

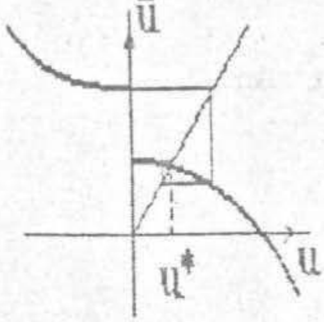


рис. 22.9

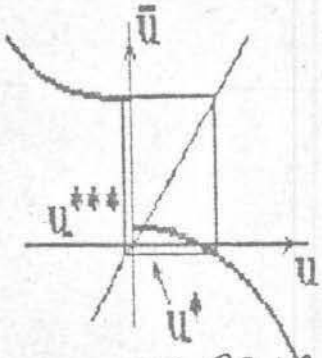


рис. 22.10

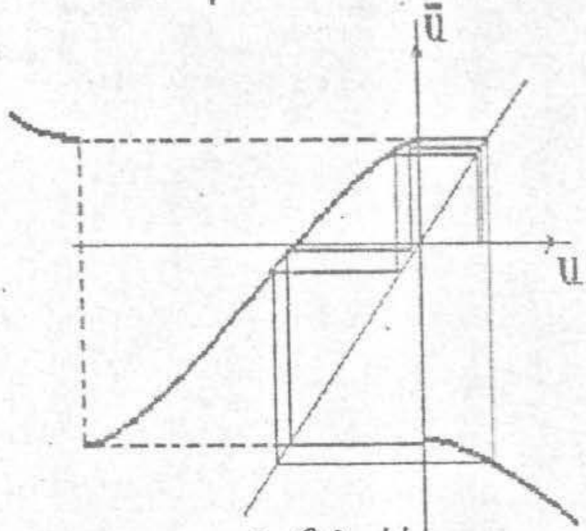


рис. 22.11.

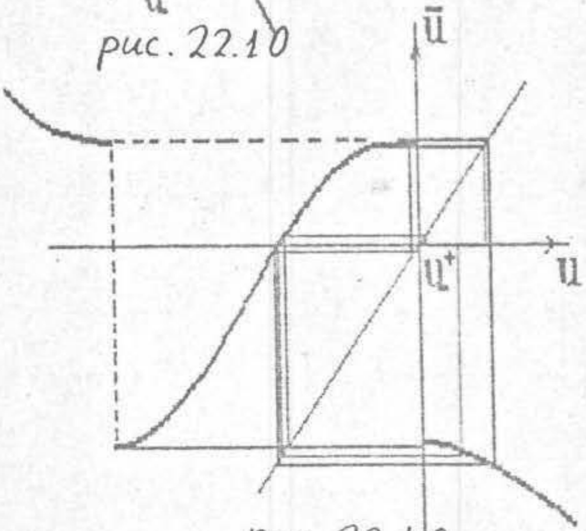


рис. 22.12

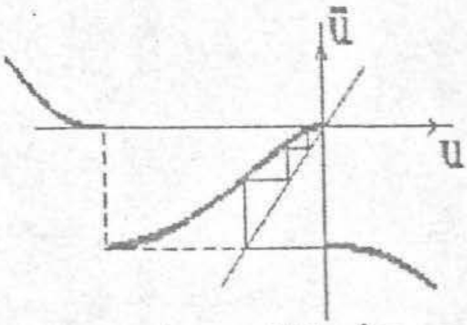


рис. 22.13.

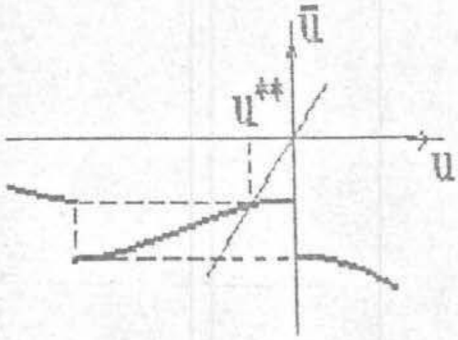


рис. 22.14

Если $u < \Psi_{-11}^{-1}(0)$, то $u' < 0$ и траектория точки u возвращается на a_{-1} в точку $\bar{u} = \Psi_{1-1} \circ \Psi_{-11}(u)$. Если же $u > \Psi_{-11}^{-1}(0)$, то $u' > 0$. Траектория точки u' вновь попадает на a_1 в точку $u'' = \Psi_{11}(u') \le \mu_1 < 0$, откуда попадает на a_{-1} в точку $\bar{u} = \Psi_{1-1} \circ \Psi_{11} \circ \Psi_{-11}(u)$. Таким образом при $\mu_1 < 0$ задача сводится к изучению отображения

$$\bar{u} = \begin{cases} \Psi_{-1-1}(u) & \text{при} \quad u < 0 \\ \Psi_{1-1} \circ \Psi_{-11}(u) & \text{при} \quad 0 < u < \Psi_{-11}^{-1}(0) \\ \Psi_{1-1} \circ \Psi_{11} \circ \Psi_{-11}(u) & \text{при} \quad u > \Psi_{-11}^{-1}(0) \end{cases}$$

График $\bar{u}$ приведен на рис. 22.4 - 22.8. $\bar{u}$ возрастает при $u < 0$ и $u > \Psi_{-11}^{-1}(0)$, убывает при $0 < u < \Psi_{-11}^{-1}(0)$. $\lim\limits_{u \to -0} \bar{u} = \lim\limits_{u \to \Psi_{-11}^{-1}(0)-0} \bar{u} = \mu_{-1}$,

$$\lim_{u \to +0} \bar{u} = \lim_{u \to \Psi_{-11}^{-1}(0)+0} \bar{u} = \Psi_{1-1}(\mu_1) > \mu_{-1}.$$

При $\mu_{-1} < \Psi_{1-1}(\mu_1) < 0$ (область W_2 на рис. 10) все траектории стремятся к неподвижной точке u^* отображения Ψ_{1-1} (см. рис. 22.4). При $\mu_{-1} < 0 < \Psi_{1-1}(\mu_1)$ (область W_3) все траектории при $u < 0$ стремятся к u^*. Отрезок $[0, \Psi_{-11}^{-1} \circ \Psi_{1-1}^{-1}(0)] \xrightarrow{\Psi_{1-1} \circ \Psi_{-11}} [0, \Psi_{1-1}(\mu_1)]$ (см. рис. 22.5), и поскольку $\Psi_{1-1} \circ \Psi_{-11}$ - сжимающее отображение, все траектории из этого отрезка стремятся к неподвижной точке u^{**} отображения $\Psi_{1-1} \circ \Psi_{-11}$ - ей отвечает цикл $\{1-1\}$. Кроме того, поскольку $\Psi_{1-1} \circ \Psi_{-11}$ - сжимающее отображение, то $\Psi_{1-1}(\mu_1) < \Psi_{-11}^{-1} \circ \Psi_{1-1}^{-1}(0)$, откуда в силу монотонности $\Psi_{1-1}(\mu_1) < \Psi_{-11}^{-1}(0)$.
Отсюда, очевидно, в области W_3 все траектории из $u > \Psi_{-11}^{-1}(0)$

попадают в область $u < \Psi_{-11}^{-1}(0)$ и стремятся либо к u^*, либо к u^{**}.

При $\mu_{-1} > 0$, $\Psi_{-11}(\mu_1) < \Psi_{-11}^{-1}(0)$ (область W_4) все траектории стремятся к u^{**} (рис.22.6). При $\mu_{-1} < \Psi_{-11}^{-1}(0)$ (область W_5) все траектории при $u < \Psi_{-11}^{-1}(0)$ стремятся к неподвижной точке u^{***} отображения $\Psi_{1-1} \circ \Psi_{11} \circ \Psi_{-11}$ – ей отвечает цикл типа $\{1\ {-1}\ 1\}$ (рис.22.7). При $\mu_{-1} > \Psi_{-11}^{-1}(0)$ (область W_6) u^{**} исчезает и все траектории стремятся к u^{***} (рис.22.8).

Пусть теперь $\mu_1 > 0$, $\mu_{-1} > 0$. У отображения Ψ_{-1-1} нет неподвижных точек, и все траектории попадают на α_1, где определено отображение

$$\bar{u} = \begin{cases} \Psi_{11}(u) & \text{при } u > 0 \\ \Psi_{-11} \circ \Psi_{1-1}(u) & \text{при } u < 0 \end{cases}.$$

$\bar{u}$ – убывающая функция, терпящая разрыв в нуле:

$$\lim_{u \to -0} \bar{u} = \Psi_{-11}(\mu_{-1}) > \Psi_{-11}(0) = \mu_1 = \Psi_{11}(0) = \lim_{u \to +0} \bar{u}.$$

При $\Psi_{-11}(\mu_{-1}) < \Psi_{11}^{-1}(0)$ (область W_8) график таков, как на рис.22.9. У Ψ_{11} есть неподвижная точка u^* – цикл $\{1\}$. Траектория точки $\Psi_{-11}(\mu_1)$ стремится к u^*, а вместе с ней и все остальные траектории, так что u^* – единственная периодическая точка. Если $\Psi_{-11}(\mu_{-1}) > \Psi_{11}^{-1}(0)$ (область W_7), то график $\bar{u}$ таков, как на рис. 22.10. Видно, что луч $(-\infty, 0)$ отображением $\Psi_{11} \circ \Psi_{-11} \circ \Psi_{1-1}$ переводится в себя. $\Psi_{11} \circ \Psi_{-11} \circ \Psi_{1-1}$ – сжимающее отображение, так что у него есть единственная неподвижная точка u^{***} – цикл $\{1\ {-1}\ 1\}$. Таким образом в случае $A_1 < 0$, $A_{-1} > 0$ утверждение теоремы выполнено.

Рассмотрим случай $A_1 < 0$, $A_{-1} < 0$. В силу леммы 2.3.5 и симметрии задачи достаточно рассмотреть область $\mu_{-1} > 0$,

$|\mu_1| < \mu_{-1}$. При этом у ψ_{-1-1} нет неподвижных точек, и все траектории из a_{-1} попадают на a_1, где определено отображение

$$\bar{u} = \begin{cases} \psi_{11}(u) & \text{при } u > 0 \\ \psi_{-11} \circ \psi_{1-1}(u) & \text{при } \psi_{1-1}^{-1}(0) < u < 0 \\ \psi_{-11} \circ \psi_{-1-1} \circ \psi_{1-1}(u) & \text{при } u < \psi_{1-1}^{-1}(0) \end{cases}.$$

$\bar{u}$ возрастает на $(\psi_{1-1}^{-1}(0), 0)$ и убывает при остальных значениях u,

$$\lim_{u \to +0} \bar{u} = \lim_{u \to \psi_{1-1}^{-1}(0)+0} \bar{u} = \mu_1, \quad \lim_{u \to -0} \bar{u} = \lim_{u \to \psi_{1-1}^{-1}(0)-0} \bar{u} = \psi_{-11}(\mu_1).$$

Поскольку $\mu_{-1} > 0$, то $\psi_{-11}(\mu_{-1}) > \psi_{-11}(0) > \mu_1$.

В области $\mu_1 > 0$ рассуждения такие же, как и в случае $A_1 < 0$, $A_{-1} > 0$, поэтому ограничимся только случаем $-\mu_{-1} \leq \mu_1 \leq 0$. Пусть $\mu_1 < 0$, $\psi_{-11}(\mu_{-1}) > 0$ (область W_6). График $\bar{u}$ приведен на рис. 22.11-22.12. Точка μ_1 сделав несколько итераций (число их обозначим через n), попадает в область $u > 0$. Покажем, что $\psi_{1-1}^{-1}(0) < \psi_{11} \circ \psi_{-11}(\mu_{-1})$. Действительно, в противном случае, так как $(0, \psi_{-11}(\mu_{-1})) \xrightarrow{\psi_{11}} (\psi_{11} \circ \psi_{-11}(\mu_{-1}), \mu_1)$, а ψ_{11} - сжимающее, то $\psi_{-11}(\mu_1) > \mu_1 - \psi_{11} \circ \psi_{-11}(\mu_{-1}) \geq \mu_1$
$-\psi_{1-1}^{-1}$ Поэтому $\psi_{-11}(\mu_{-1}) - \mu_1 > 0 - \psi_{1-1}^{-1}(0)$. Но, с другой стороны, $(\psi_{1-1}^{-1}(0), 0) \xrightarrow{\psi_{-11} \circ \psi_{1-1}} (\mu_1, \psi_{11}(\mu_{-1})$ и, так как $\psi_{-11} \circ \psi_{1-1}$ - сжимающее отображение, получаем противоречие.

Таким образом $\psi_{1-1}^{-1}(0) < \psi_{11} \circ \psi_{-11}(\mu_{-1})$, то есть траектория точки $\psi_{-11}(\mu_{-1})$ попадает в область $(\psi_{-11}^{-1}(0), 0)$, и, сделав несколько итераций (их число обозначим через m), попадает в область $u > 0$. Поскольку $\mu_1 = \psi_{-11} \circ \psi_{1-1}(\psi_{1-1}^{-1}(0)$, то если траектория точки μ_1 попадает в область $u > 0$, сделав n итераций, то траектория точки $\Psi_{1-1}^{-1}(0)$ попадает в область $u>0$, сделав $(n+1)$ итерацию. Заметим, что $\Psi_{1-1}^{-1}(0)<\Psi_{11}\circ\Psi_{-11}(\mu_{-1})<\mu_1$, поэтому $n\le m<n+1$.

Если $m=n$ (область $W_{6,n,1}: (\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n-1}(\mu_1)<0$, $(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}\circ\Psi_{11}\circ\Psi_{-11}(\mu_{-1})>0$), то (см.рис.22.11)
$[0,\Psi_{-11}(\mu_{-1})] \xrightarrow{(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}\circ\Psi_{11}} (0,\Psi_{-11}(\mu_1))$, значит на отрезке $(0,\Psi_{-11}(\mu_1))$ есть неподвижная точка отображения $(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}\circ\Psi_{11}$ – цикл типа $\{(1-1)^n 1\}$, и других периодических точек нет.

Если $m=n+1$ (область $W_{6,n,2}: (\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}(\mu_1)>0$, $(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}\circ\Psi_{11}\circ\Psi_{-11}(\mu_{-1})<0$), то (см.рис. 22.12) отрезок $[0,u^+] \xrightarrow{(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}\circ\Psi_{11}} [0,u^+)$, а отрезок $[u^+,\Psi_{-11}(\mu_{-1})] \xrightarrow{(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n+1}\circ\Psi_{11}} (u^+,\Psi_{-11}(\mu_{-1})]$, (где $u^+=\Psi_{11}^{-1}\circ[(\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1})^{n}]^{-1}(0)$), так что на каждом из этих отрезков имеется по неподвижной точке соответствующего отображения – это циклы $\{(1-1)^n 1\}$ и $\{(1-1)^{n+1} 1\}$.

Очевидно, что $m=n=1$ при $\mu_1=0$, и $n\to\infty$ при $\Psi_{-11}(\mu_{-1})\to 0$. На кривой $\mathcal{M}_{-11}: \Psi_{-11}(\mu_1)=0$ (см.рис.22.13) все траектории стремятся к неподвижной точке 0 отображения $\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1}$ – ей отвечает гомоклиническая траектория типа $\{1-1\}$. При $\Psi_{-11}(\mu_{-1})<0$ и $\Psi_{1-1}(\mu_1)>0$ (область W_5) график $\bar{u}$ таков, как на рис. 22.14. Все траектории стремятся к ненулевой неподвижной точке отображения $\Psi_{-11}\circ\Psi_{1-1}$, которой отвечает цикл типа $\{-11\}$.

Рассмотрев все возможные варианты убеждаемся в справедливости теоремы.

§ 5. Бифуркации устойчивого контура типа "бабочка".

Предположим, что $\lambda_1(\mu)$ вещественно и $\lambda_1(\mu) > Re\,\lambda_2(\mu)$. Предположим, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в W_0^{ss} и входят в O, касаясь друг друга, образуя "бабочку". Предположим также, что величины A_1 и A_{-1} отличны от нуля.

Теорема 2.5.I. В случае $A_1 > 0$, $A_{-1} > 0$ (см. рис. 12) в области $\mu_1 > 0, \mu_{-1} < 0$ $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_1(\mu) \cup \Gamma_{-1}(\mu))$ состоит из двух циклов типов $\{1\}$ и $\{-1\}$, в области $\mu_1 > 0, \mu_{-1} > 0$ – из одного цикла типа $\{1\}$, в области $\mu_1 < 0, \mu_{-1} < 0$ – из одного цикла типа $\{-1\}$. В области $\mu_1 < 0, \mu_{-1} > 0$ бифуркационное множество представляет собой канторовский пучок кривых, состоящий из счетного числа линий, на которых $\Omega_\mu \setminus \{O\}$ состоит из одной гомоклинической к O траектории $\Gamma_1(\mu)$ или $\Gamma_{-1}(\mu)$ со стремящейся к ней другой траекторией, и континуума линий, отвечающих существованию квазиминимальных множеств. Область устроена следующим образом: I) для любой допустимой пары конечных слов p и q существуют линии $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$; 2) в секторе, ограниченном этими линиями лежат линии $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$, причем $\mathcal{M}_{pq}$ лежит между $\mathcal{M}_q$ и $\mathcal{M}_{qp}$, а $\mathcal{M}_{qp}$ – между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_{pq}$ 3) в секторе, ограниченном линиями $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$, множество $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_1(\mu) \cup \Gamma_{-1}(\mu))$ состоит из одного цикла типа $\{pq\}$, 4) для произвольной допустимой пары бесконечных слов (p, q) существует линия $\mathcal{M}_{(p,q)}$, отвечающая существованию квазиминимального множества: $s_1(\mu) = p$ и $s_{-1}(\mu) = q$ при $\mu \in \mathcal{M}_{(p,q)}$. $\mathcal{M}_{(p,q)}$ может быть построена как $\lim \mathcal{M}_{p_n} = \lim \mathcal{M}_{q_n}$ где (p_n, q_n) – последовательность допустимых пар, аппроксимирующих (p, q).

В случае $A_1 > 0$, $A_{-1} < 0$ (см. рис. 13) существуют циклы только типов $\{1\}$, $\{-1\}$ и $\{-1\,1^n\}$ $(1 \le n < \infty)$. Плоскость параметров разбивается на счетное число областей линиями

$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_{-1}, \mathcal{M}_{1-1}, \mathcal{M}_{-11^n}$ и $\mathcal{M}_{1-11^n}$ $(1\le n<\infty)$. $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_i(\mu))$ на $\mathcal{M}_1$ состоит из одной гомоклинической кривой типа $[1\text{-}1]$, а на остальных линиях Ω_μ кроме гомоклинической кривой содержит цикл, общий для секторов, разделяемых линией.

В случае $A_1<0$, $A_{-1}<0$ существуют циклы только типов $\{1\}, \{-1\}$ и $\{1\text{-}1\}$. Плоскость параметров приведена на рис. 14.

Доказательство. Введем на множестве бесконечных вправо слов алфавита $\{-1,0,1\}$ следующее отношение порядка (аналогично [36]): $p=\{p_j\}_{j=0}^{j=+\infty} \succ q=\{q_j\}_{j=0}^{+\infty}$ тогда и только тогда, когда либо $q_0<p_0$, либо для некоторого $n\ge 1$ $\{p_j\}_{j=0}^{j=n-1}=\{q_j\}_{j=0}^{j=n-1}$ и $(\prod_{j=0}^{n-1} A_{p_j})p_n > (\prod_{j=0}^{n-1} A_{p_j})q_n$ (где полагается $A_0=1$). Заметим, что введенное отношение порядка существенно зависит от знаков величин A_1 и A_{-1} , причем при $A_1>0$, $A_{-1}>0$ оно совпадает с отношением лексикографического порядка $>$, а в остальных случаях отлично от него.

Лемма 2.5.I. Для любых $n\ge 1$ и $i\in\{-1,1\}$ либо $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty}=0^\infty$, либо $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty} \succcurlyeq \Delta_1(\mu)$, либо $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty} \preccurlyeq \Delta_1(\mu)$, причем равенство $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty} = \Delta_k(\mu)$ возможно, только если $\Delta_k(\mu)\ne p0^\infty$.

Доказательство. В силу Замечания 3 к теореме I.2.I достаточно ограничить рассмотрение секущей $\hat\Sigma=\Sigma\cap\{\|y\|\le\frac{\delta}{2}\}$, причем, как следует из (I.2.28) и (I.3.I2), (I.3.I3) при достаточно малых δ и δ^μ существует $L>0$ такое, что для $P(w,u)\in\hat\Sigma_i\cup\hat\Sigma_0$

$$\left\|\frac{\partial\bar u}{\partial u}\right| \ge \left\|\frac{\partial\bar w}{\partial w}\right\| + L\left\|\frac{\partial\bar u}{\partial w}\right\| + \frac{1}{L}\left\|\frac{\partial\bar w}{\partial u}\right\|,$$

$$\operatorname{sign}\frac{\partial\bar u}{\partial u}=A_i .$$

Отсюда легко вытекает, что если $P^1(w^1,u^1)\in\hat\Sigma_i\cup\hat\Sigma_0$, $P^2(w^2,u^2)\in\hat\Sigma_i\cup\hat\Sigma_0$ и

$$\|w^2-w^1\|\le L|u^2-u^1| , \qquad (2.5.I)$$

то

$$\|\bar{w}^2-\bar{w}^1\| \le L\,|\bar{u}^2-\bar{u}^1| \qquad (2.5.2)$$

и

$$A_i(\bar{u}^2-\bar{u}^1)(u^2-u^1)>0 \qquad (2.5.3)$$

Возьмем точку $P_{in}(\mu)=(u^{ni}(\mu), w^{ni}(\mu))$ для некоторых $i\in\{-1,1\}$ и $n\ge 1$. Если $P_{in}(\mu)\in\Sigma_0$, то $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty}=0^\infty$. Если $P_{in}(\mu)\in\hat{\Sigma}\setminus\Sigma_0$, то положим для определенности $P_{in}(\mu)\in\hat{\Sigma}_1$, то есть $u^{ni}(\mu)>0$. Выберем точку $P=(0, w^{ni}(\mu))$. Поскольку точки $P_{in}(\mu)$ и P удовлетворяют (2.5.I) и $\tau_\mu^{\{1\}}(P_{in}(\mu))=P_{i,n+1}(\mu)$, $\tau_\mu^{\{1\}}P=P_{10}(\mu)$, то в силу (2.5.2), (2.5.3)

$$\|w^{n+1,i}(\mu)-w^{01}(\mu)\|\le L\,|u^{n+1,i}(\mu)-u^{01}(\mu)|$$

$$A_1u^{n+1,i}(\mu)>A_1u^{01}(\mu)$$

Отсюда и из (2.5.I) – (2.5.3) по индукции получаем, что если $\{S_{ji}(\mu)\}_{j=n}^{j=n+l}=\{S_{j1}(\mu)\}_{j=0}^{j=l}$ для некоторого l, то

$$\Big(\prod_{j=0}^{l}A_{S_{j1}(\mu)}\Big)\big(u^{l+n+1,i}(\mu)-u^{l+1,1}(\mu)\big)>0.$$

Отсюда $\Big(\prod_{j=0}^{l}A_{S_{j1}(\mu)}\Big)\big(S_{n+l+1,i}(\mu)-S_{l+1,1}(\mu)\big)\ge 0$, причем равенство возможно, только если $S_{l+1,1}(\mu)\ne 0$. Лемма доказана.

Пусть $A_1>0$, $A_{-1}>0$. Рассмотрим область $\{\mu_{-1}\ge 0, |\mu_1|\le\mu_{-1}\}$ (область $\{\mu_1<0, |\mu_{-1}|<-\mu_1\}$ симметрична рассматриваемой, а остальное описывается леммой 2.3.4).

Пусть $s_1(\mu)=s0^\infty$, то есть $\Gamma_1(\mu)$ является гомоклинической траекторией типа s. Из теоремы 2.I.I, замечания к ней и пункта д) леммы 2.I.I следует, что либо $s_{-1}(\mu)=q^-(s)0^\infty$, либо $s_{-1}(\mu)=(q^-(s))^\infty$,

либо $s_{-1}(\mu) = q^-(s) s^k 0^\infty$, либо $s_{-1}(\mu) = (q^-(s) s^k)^\infty$ $(1 \le k < \infty)$, либо $s_{-1}(\mu) = q^-(s) s^\infty$ (здесь при $s = \{1\}$ полагается $q^-(s) = \{-1\}$).
Случаи $s_{-1}(\mu) = q^-(s) s^k 0^\infty$ и $s_{-1}(\mu) = (q^-(s) s^k)^\infty$ противоречат лемме 2.5.I, так как при этом $\{S_{j,-1}(\mu)\}_{j=\ell(q^-(s))}^{j=+\infty} = s0^\infty = s_1(\mu)$ или $\{S_{j,-1}(\mu)\}_{j=\ell(q^-(s))+(k-1)\ell(s)}^{j=+\infty} = s(q^-(s)s^k)^\infty < s_1(\mu)$.
Если $s = \{1\}$, то $q^-(s) = \{-1\}$, и так как при $\mu_{-1} > 0$, $\mu_1 \ge -\mu_{-1}$ слово $s_{-1}(\mu)$ составлено из блоков $\{1\}$, $\{0\}$ и $\{-1 1\}$, то не может быть $s_{-1}(\mu) = q^-(s) 0^\infty$ и $s_{-1}(\mu) = (q^-(s))^\infty$. Если $s \ne \{1\}$, то в силу пункта д) леммы 2.I.I $s = p^+(s)\, q^-(s)$. Отсюда $\{S_{j,1}(\mu)\}_{j=\ell(p^+(s))}^{j=+\infty} = q^-(s) 0^\infty$, и значит в силу леммы 2.5.I не может быть $s_{-1}(\mu) = q^-(s) 0^\infty$ и $s_{-1}(\mu) = (q^-(s))^\infty$. Получаем, что если $s_1(\mu) = s0^\infty$, то $s_{-1}(\mu) = q^-(s) s^\infty$, то есть $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремится при $t \to +\infty$ к $\Gamma_1(\mu) \cup O$.
Аналогично, если $s_{-1}(\mu) = s0^\infty$, то $s_1(\mu) = p^+(s) s^\infty$ ($\Gamma_1(\mu)$ стремится при $t \to +\infty$ к $\Gamma_{-1}(\mu) \cup O$).

Пусть $p \le q$ - бесконечные вправо слова алфавита $\{-1, 0, 1\}$ Обозначим через $I(p, q)$ множество бесконечных вправо слов s алфавита $\{-1, 0, 1\}$, удовлетворяющих неравенству $p \le s \le q$. Из вышеприведенных рассуждений и лемм 2.3.3 и 2.3.4 следует, что при каждом фиксированном $\mu_{-1} > 0$ множество значений $s_1(\mu)$ при $|\mu_1| \le \mu_{-1}$ равно

$$I(\{1-1\}^\infty, 1^\infty) \setminus \bigcup_s \left(I(s q^-(s) s^\infty, s^\infty) \setminus (\{s0^\infty\} \cup \{s^\infty\}) \right) \quad (2.5.4)$$

где объединение берется по всем допустимым s таким, что $s_1(\mu) = s0^\infty$ при некотором $\mu_1 \in [-\mu_{-1}, \mu_{-1}]$. Покажем, что для любого начинающегося с единицы $p \in \mathcal{Y}(1, -1 1)$

найдется $\mu_1 \in [-\mu_{-1}, \mu_{-1}]$ такое, что $s_1(\mu) = po^\infty$. Действительно, в противном случае в силу (2.5.4) нашлось бы начинающееся с единицы допустимое $s \neq p$ такое, что

$$sq^-(s)s^\infty < po^\infty < s^\infty \qquad (2.5.5)$$

Заметим, что если $p \in \mathcal{G}(s, q^-(s))$, то в силу (2.I.6) поскольку $p \neq 1$, то $po^\infty \leq s(q^-(s))^{n_1}s^{n_2}o^\infty$ $(n_1 \geq 1, n_2 \geq 0)$, что противоречит (2.5.5). Поэтому $p \notin \mathcal{G}(s, q^-(s))$ и, следовательно, найдется $(g, h) \in \mathcal{G}$ такая, что либо $(s, q^-(s)) \in \mathcal{G}(g, hg)$, а $p \in \mathcal{G}(gh, h)$, либо $(s, q^-(s)) \in \mathcal{G}(gh, h)$, $p \in \mathcal{G}(g, hg)$.

В первом случае в силу (2.I.I) $po^\infty < (gh)^\infty = g(hg)^\infty \leq s(q^-(s))^\infty < sq^-(s)s^\infty$, что противоречит (2.5.5). Во втором случае, в силу (2.I.I) $po^\infty > g(hg)^\infty = (gh)^\infty \geq s^\infty$, что вновь противоречит (2.5.5).

Таким образом при каждом фиксированном μ_{-1} для любого начинающегося с единицы конечного допустимого слова $p \in \mathcal{G}(1, -11)$ существует $\mu_1 \in [-\mu_{-1}, \mu_{-1}]$ такое, что $s_1(\mu) = po^\infty$, то есть $\Gamma_1(\mu)$ является гомоклинической типа p. Аналогичное утверждение верно и для $s_{-1}(\mu)$. Получаем, что для любой допустимой пары конечных слов $(p, q) \in \in \mathcal{G}(1, -11)$ существуют кривые $\mathcal{M}_p : \mu_1 = h_p(\mu_{-1})$ и $\mathcal{M}_q : \mu_1 = h_q(\mu_{-1})$. Заметим, что $s_1(\mu) = po^\infty$ на кривой $\mathcal{M}_p$ и $s_1(\mu) = pq^\infty$ на $\mathcal{M}_q$. Поскольку $po^\infty > pq^\infty$, то в силу леммы 2.3.3 $h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})$. Рассмотрим кривые $\mathcal{M}_{pq} : \mu_1 = h_{pq}(\mu_{-1})$ и $\mathcal{M}_{qp} : \mu_1 = h_{qp}(\mu_{-1})$. $s_1(\mu) = pqo^\infty$ на $\mathcal{M}_{pq}$ и $s_1(\mu) = p(qp)^\infty$ на $\mathcal{M}_{qp}$. Отсюда, поскольку $po^\infty > p(qp)^\infty > pqo^\infty > pq^\infty$, получаем $h_p(\mu_{-1}) > h_{qp}(\mu_{-1}) > h_{pq}(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})$, то есть $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$ лежат между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, причем $\mathcal{M}_{qp}$ – между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_{pq}$, $\mathcal{M}_{pq}$ – между $\mathcal{M}_{qp}$

и $\mathcal{M}_q$.

В области W_{pq} ограниченной $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$ в силу пункта а) леммы 2.3.3

$$\lim_{\mu_1 \to h_{pq}(\mu_{-1})+0} s_1(\mu_{-1}, \mu_1) \le s_1(\mu_{-1}, \mu_1) \le s_1(\mu_{-1}, h_{qp}(\mu_1)),$$

откуда в силу пункта б) леммы 2.3.3

$$(pq)^\infty \le s_1(\mu) \le p(qp)^\infty,$$

то есть $s_1(\mu) = (pq)^\infty$. Аналогично $s_{-1}(\mu) = (qp)^\infty$. Отсюда в силу замечания к теореме 2.I.I $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_1(\mu) \cup \Gamma_{-1}(\mu))$ при $\mu \in W_{pq}$ состоит из одного цикла $\{pq\}$.

Для завершения доказательства осталось установить существование линий $\mathcal{M}_{(p,q)}$, отвечающих допустимым парам бесконечных слов $(p, q) \in \mathcal{G}(1,-11)$. Пусть $\{(p_n, q_n)\}_{n=0}^{\infty}$ - последовательность допустимых пар, отвечающих (p, q) :

$$p_n 0^\infty \to p, \quad q_n 0^\infty \to q, \quad (p_{n+1}, q_{n+1}) \in \mathcal{G}(p_n, q_n).$$

Рассмотрим кривые $\mathcal{M}_{p_n}: \mu_1 = h_{p_n}(\mu_{-1})$ и $\mathcal{M}_{q_n}: \mu_1 = h_{q_n}(\mu_{-1})$. По доказанному выше $\ldots < h_{q_n}(\mu_{-1}) < h_{q_{n+1}}(\mu_{-1}) < \ldots < h_{p_{n+1}}(\mu_{-1}) < h_{p_n}(\mu_{-1}) < \ldots$ Поскольку все кривые $\mathcal{M}_{p_n}$ - липшицевы, то существует $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}_{p_n} = \mathcal{M}^*: \mu_1 = \lim_{n\to\infty} h_{p_n}(\mu_1)$. Поскольку $s_1(\mu) = p_n 0^\infty$ на кривых $\mathcal{M}_{p_n}$, то в силу леммы 2.3.3 $s_1(\mu) = \lim_{n\to\infty} p_n 0^\infty = p$ на $\mathcal{M}^*$, то есть $\mathcal{M}^* = \mathcal{M}_{(p,q)}$. В случае $A_1 > 0, A_{-1} > 0$ теорема доказана.

Рассмотрим случай $A_1 > 0$, $A_{-1} < 0$. Пусть $\mu_{-1} > 0$, $|\mu_1| < \mu_{-1}$. Пусть $s_1(\mu) = s0^\infty$, где s - некоторое допустимое слово, начинающееся с единицы. Как следует из доказательства теоремы 2.I.I слово s составлено из блоков $\{-11\}$ и $\{1\}$, поэтому $s = 1$, $s = 1\,-1\,1^n$ $(n \ge 1)$, или $s = 1\,-1\,1^n\,-1\ldots$

Покажем, что последний случай невозможен. Действительно, если $\{1\,-1\,1^n\,-1\}$ служит префиксом s , то очевидно, $s \in \mathcal{G}(1\text{-}11^n, -11^n)$, значит s составлено из блоков $\{1\text{-}11^n\}$ и $\{-11^n\}$ и, значит, s кончается на $\{1\text{-}11^n\}$. Отсюда, найдется n такое, что $\{S_{j1}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty} = 1\text{-}11^n 0^\infty < 1\text{-}11^n\text{-}1\ldots = s_1(\mu)$, что противоречит лемме 2.5.I (заметим, что в рассматриваемом случае отношение порядка отлично от лексикографического).

Таким образом, $\Gamma_1(\mu)$ может быть гомоклинической траекторией типов $\{1\}$ или $\{1\text{-}11^n\}\ (n \geq 1)$. Если $s_1(\mu) = 10^\infty$ (то есть $\mu_1 = 0$), то так как $s_{-1}(\mu)$ в области $\mu_{-1} > 0$, $|\mu_1| \leq \mu_{-1}$ составлено из блоков $\{1\}$, $\{0\}$ и $\{-11\}$, то $s_{-1}(\mu) = -11\ldots$. Но в силу леммы 2.5.I, если $S_{n,-1}(\mu) = 1$ для некоторого $n \geq 1$, то $\{S_{j,-1}\}_{j=n}^{+\infty} > s_1(\mu) = 10^\infty$, откуда $S_{n+1,-1}(\mu) = 1$. Таким образом $s_{-1}(\mu) = -11^\infty$. Получаем, что при $\mu_1 = 0$, $\mu_{-1} > 0$ $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремится к гомоклинической траектории $\Gamma_1(\mu)$ типа $\{1\}$. В силу лемм 2.3.3 и 2.3.4 получаем отсюда, что $s_{-1}(\mu) = -11^\infty$, $s_1(\mu) = 1^\infty$ при всех $\mu_{-1} > 0$, $\mu_1 > 0$, то есть в этой области $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_1(\mu) \cup \Gamma_{-1}(\mu))$ состоит из цикла типа $\{1\}$.

Заметим, что в силу леммы 2.3.2 линия $\mathcal{M}_{1\text{-}11^n}$ может заканчиваться только в точках на линии $\mu_1 = 0$, $\mu_{-1} \geq 0$ в которых $\Gamma_{-1}(\mu)$ также, наряду с $\Gamma_1(\mu)$, является гомоклинической к O. Поскольку такая точка единственна: $\mu_1 = 0$, $\mu_{-1} = 0$, то $\mathcal{M}_{1\text{-}11^n}$, если существует, заканчивается в точке $(0,0)$, и $h_{1\text{-}11^n}$ определена при всех $\mu_{-1} > 0$. В силу пункта б) леммы 2.3.3 $\lim\limits_{\mu_1 \to -0} s_1(\mu) = 1\text{-}11^\infty$. Отсюда, поскольку $s_1(\mu) = (1\text{-}1)^\infty \neq 1\text{-}11^\infty$ при $\mu_1 = -\mu_{-1}$, то в области $-\mu_{-1} \leq \mu_1 < 0$ существует по крайней мере одна линия $\mathcal{M}_{1\text{-}11^n}$. Заметим, что $\lim\limits_{\mu_1 \to h_{1\text{-}11^n}(\mu_{-1})+0} s_1(\mu) = (1\text{-}11^n)^\infty \neq$ $\neq 1\text{-}11^\infty$, откуда следует, что между $\mathcal{M}_{1\text{-}11^n}$ и $\mathcal{M}_1$ лежит по крайней мере одна линия $\mathcal{M}_{1-11^m}$, $m \neq n$. Отсюда получаем, что существуют линии $\mathcal{M}_{1-11^n}$ со сколь угодно большим n.

Пусть $\mu \in \mathcal{M}_{1-11^n}$. При этом $s_1(\mu) = 1-11^n 0^\infty$. В силу теоремы 2.I.I, замечания к ней и пункта д) леммы 2.I.I $s_{-1}(\mu) = -11^n 0^\infty$, либо $s_{-1}(\mu) = -1\,1^{n+1}\ldots$, либо $s_{-1}(\mu) = (-11^n)^\infty$. Заметим, что в первом случае $\{S_{j1}(\mu)\}_{j=2}^{+\infty} = s_{-1}(\mu)$, а во втором $\{S_{j1}(\mu)\}_{j=2}^{+\infty} > s_{-1}(\mu)$, что противоречит лемме 2.5.I. Получаем, что на линии $\mathcal{M}_{1-11^n}$ $s_{-1}(\mu) = (-11^n)^\infty$, то есть $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремится к циклу типа $\{-11^n\}$. Область существования цикла $\{-11^n\}$ ограничена линиями $\mathcal{M}_{1-11^{n-1}}$ и $\mathcal{M}_{-11^n}$. Получаем, что существование линии $\mathcal{M}_{1-11^n}$ влечет существование линий $\mathcal{M}_{1-11^{n-1}}$ и $\mathcal{M}_{-11^n}$, откуда, так как n может быть взято сколь угодно большим, получаем, что для каждого $n \geq 1$ существуют линии $\mathcal{M}_{1-11^n}$ и $\mathcal{M}_{-11^n}$. Поскольку $1-11^n 0^\infty > 1-11^{n-1} 0^\infty$ *), то в силу монотонной зависимости s_1 от μ_1 линия $\mathcal{M}_{1-11^n}$ лежит выше линии $\mathcal{M}_{1-11^{n-1}}$. Аналогично $\mathcal{M}_{-11^n}$ лежит выше $\mathcal{M}_{-11^{n-1}}$. Поскольку на $\mathcal{M}_{1-11^n}$ $s_{-1}(\mu) = (-11^n)^\infty$, на $\mathcal{M}_{1-11^{n-1}}$ – $s_{-1}(\mu) = (-11^{n-1})^\infty$, на $\mathcal{M}_{-11^{n-1}}$ $s_{-1}(\mu) = -11^{n-1}0^\infty$, то из $(-11^{n-1})^\infty < -11^{n-1}0^\infty < (-11^n)^\infty$ получаем, что $\mathcal{M}_{-11^{n-1}}$ лежит в области, ограниченной линиями $\mathcal{M}_{1-11^{n-1}}$ и $\mathcal{M}_{1-11^n}$.

В силу пункта б) леммы 2.3.3

$$\lim_{\mu_1 \to h_{1-11^n}(\mu_{-1})-0} s_1(\mu) = 1(-11^n)^\infty = (1-11^{n-1})^\infty$$

$$\lim_{\mu_1 \to h_{1-11^n}(\mu_{-1})+0} s_1(\mu) = (1-11^n)^\infty,$$

откуда получаем, что всюду в области между линиями $\mathcal{M}_{1-11^{n-1}}$ и $\mathcal{M}_{1-11^n}$ $s_1(\mu) = (1-11^{n-1})^\infty$, то есть $\Gamma_1(\mu)$ стремится

*) здесь имеется в виду лексикографический порядок

к циклу типа $\{1-11^{n-1}\}$.

Отсюда, поскольку в этой области лежит линия $\mathcal{M}_{-11^{n-1}}$, то в силу пункта б) леммы 2.3.3 $\lim\limits_{\mu_1\to h_{-11^{n-1}}(\mu_{-1})-0} S_{-1}(\mu)=(-11^{n-1})$,

$$\lim_{\mu_1\to h_{-11^{n-1}}(\mu_{-1})+0} = -11^{n-1}(1-11^{n-1})=(-11^n)^\infty.$$

Таким образом, всюду в области между линиями $\mathcal{M}_{-11^{n-1}}$ и $\mathcal{M}_{-11^n}$ $S_{-1}(\mu)=(-11^n)^\infty$, то есть $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремится к циклу типа $\{-11^n\}$. Получаем для рассматриваемой области полное соответствие с утверждением теоремы.

Рассмотрим область $\mu_1<0,\ \mu_1<\mu_{-1}<-\mu_1$. Для дальнейшего безразлично, какой из случае имеет место: $A_1>0,\ A_{-1}<0$ или $A_1<0,\ A_{-1}<0$. В рассматриваемой области слова $S_{-1}(\mu)$ и $S_1(\mu)$ составлены из блоков $\{-1\},\{0\}$ и $\{1-1\}$. Предположим $S_{-1}(\mu)=\rho 0^\infty$. Тогда $\rho=\{-1\}$, либо $\rho=\{-11\ldots-1\}$. В последнем случае для некоторого n $\{S_{j,-1}(\mu)\}_{j=n}^{j=+\infty}=-10^\infty$ и, поскольку $-10^\infty>-11\ldots$, получаем противоречие с леммой 2.5.I. Таким образом, в рассматриваемой области $\Gamma_{-1}(\mu)$ может быть гомоклинической траекторией только типа $\{-1\}$ (при $\mu_{-1}=0$). Отсюда в силу леммы 2.3.4 всюду в области $0<\mu_{-1}<-\mu_1$ $\Gamma_{-1}(\mu)$ стремится к циклу $\{1-1\}$, а в области $\mu_1<0<\mu_{-1}$ – к циклу $\{-1\}$.

Область существования цикла $\{1-1\}$ ограничена линиями $\mathcal{M}_{1-1}$ и $\mathcal{M}_{-11}$. Линия $\mathcal{M}_{-11}$ не лежит в области $|\mu_{-1}|<-\mu_1$, поэтому здесь лежит линия $\mathcal{M}_{1-1}$: цикл $\{1-1\}$ существует здесь при $-\mu_1>\mu_{-1}>h_{1-1}(\mu_1)$. Поскольку при $\mu_{-1}=0$ цикл $\{1-1\}$ существует, то $\mathcal{M}_{1-1}$ лежит в области $\mu_1<\mu_{-1}<0$. В силу пункта б) леммы 2.3.3 $\lim\limits_{\mu_{-1}\to h_{1-1}(\mu_1)+0} S_1(\mu)=(1-1)^\infty$, $\lim\limits_{\mu_{-1}\to h_{1-1}(\mu_1)-0} S_1(\mu)=1(-1)^\infty$, откуда, поскольку ξ_1 монотонно зависит от μ_{-1}, получаем, что всюду справа от линии $\mathcal{M}_{1-1}$ $\Gamma_1(\mu)$ стремится к циклу $\{1-1\}$, а всюду слева от $\mathcal{M}_{1-1}$ $\Gamma_1(\mu)$ стремится к циклу $\{-1\}$.

Теорема доказана (в случае $A_1<0$, $A_{-1}<0$ область $\mu_{-1}>0$, $|\mu_1|<\mu_{-1}$ симметрична рассмотренной).

§ 6. Случай комплексного $\lambda_1(\mu)$.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_1(\mu)$ комплексно, $Re\,\lambda_1(\mu) = Re\,\lambda_2(\mu) > Re\,\lambda_3(\mu)$. Будем предполагать, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в W_0^{ss}, а также, что слои многообразий W_0^{++} и W_0^{-} трансверсально пересекаются в каждой точке Γ_1 и Γ_{-1}.

Теорема 2.6.I. В рассматриваемом случае для семейства X_μ реализуются все возможности, разрешенные теоремой 2.I.I. Линии существования гомоклинических кривых седла расположены здесь следующим образом (см.рис.15): $\mu_1=0$ – линия $\mathcal{M}_1$; $\mu_{-1}=0$ – линия $\mathcal{M}_{-1}$; из точки $(\mu_1=0,\ \mu_{-1}=0)$ выходят еще линии $\mathcal{M}_{1-1}$ и $\mathcal{M}_{-11}$ которые в бесконечном множестве точек пересекаются соответственно с $\mathcal{M}_{-1}$ и $\mathcal{M}_1$, и далее по правилу: пусть $(p,q)\neq(1,-1)$ – допустимая пара конечных слов, тогда

А) Существуют линии $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, которые пересекаются друг с другом в бесконечном множестве точек, причем на любом связном куске пересечения $\mathcal{D}_p\cap\mathcal{D}_q$ ($\mathcal{D}_p$ и $\mathcal{D}_q$ – области определения функций h_p и h_q) в бесконечном количестве имеются соседние точки пересечения $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$ на отрезке между которыми $h_p(\mu_\ell) > h_q(\mu_\ell)$ (и, аналогично, точки, между которыми $h_p(\mu_l) < h_q(\mu_l)$) (Здесь $l=1$, если $(p,q) \in \mathcal{G}(1-1,-1)$ и $l=-1$, если $(p,q) \in \mathcal{G}(1,-11)$).

Б) Соседние точки пересечения $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, на отрезке между которыми $h_p > h_q$, соединяются дополнительно линиями $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$: $\mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_{qp} = \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_l \mid h_p(\mu_l) > h_q(\mu_l)\}$.

В) Всюду в области между $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, где $h_p(\mu_l) < h_q(\mu_l)$, множество $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_{-1})$ состоит из пары циклов типов p и q.

Г) Всюду в области между $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$ существует цикл типа pq.

Доказательство. Будем различать допустимые пары по длине d пути по ребрам дерева $\mathcal{G}$ до начальной вершины. Доказательство пунктов А) – Г) проведем индукцией по d. Не уменьшая общности ограничимся областью $\mu_{-1} > 0$, $|\mu_1| < \mu_{-1}$ (ей соответствует поддерево $\mathcal{G}(1,-11)$). Рассмотрим единственную в $\mathcal{G}(1,-11)$ пару с $d=1$: $(1,-11)$. Существование линии $\mathcal{M}_1$ очевидно: это $\mu_1 = 0$, существование линии $\mathcal{M}_{-11}$ следует из леммы 2.3.4 ($\mathcal{M}_{-11}$ служит границей области существования цикла $\{-11\}$). Поскольку в силу леммы 2.3.2 $\mathcal{M}_{-11}$ может кончаться только в точках пересечения $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_{-1}$ то $\mathcal{D}_{-11} = \{\mu_{-1} \mid \mu_{-1} > 0\}$.

В силу Замечания 3 к теореме I.2.I, дальнейшее рассмотрение можно ограничить секущей $\hat{\Sigma} = \Sigma \cap \{\|y\| < \frac{\|x\|}{2}\}$. Из (I.3.2), (I.3.3) и (I.2.26) отображение $\tau_\mu^{\{i\}}$ на $\hat{\Sigma}$ имеет вид

$$\begin{cases} \bar{u} = \mu_i + i\,(A_i + \hat{A}_i^u(z,w,\mu))\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\lambda(\mu)} \cos(\omega(\mu)\ln\left|\frac{u}{\delta}\right| + \theta_i^u(z,w,\mu))\,\delta + \hat{u}_i(u,z,w,\mu) \\ \bar{z} = z^{0i}(\mu) + (A_i^z + \hat{A}_i^z(z,w,\mu))\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\lambda(\mu)} \cos(\omega(\mu)\ln\left|\frac{u}{\delta}\right| + \theta_i^z(z,w,\mu))\,\delta + \hat{z}_i(u,z,w,\mu) \\ \bar{w} = w^{0i}(\mu) + \hat{A}_i^w(z,w,\mu)\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\lambda(\mu)} \cos(\omega(\mu)\ln\left|\frac{u}{\delta}\right| + \theta_i^w(z,w,\mu))\,\delta + \hat{w}_i(u,z,w,\mu) \end{cases} \tag{2.6.I}$$

где Z^{0i}, W^{0i}, $\hat{A}_i^u$, $\hat{A}_i^z$, $\hat{A}_i^w$, θ_i^u, θ_i^z, θ_i^w, $\hat{u}_i$, $\hat{z}_i$, $\hat{w}_i$ – гладкие функции, $\nu(\mu) = -\mathrm{Re}\,\frac{\lambda_1(\mu)}{\gamma_1(\mu)} > 1$, $\omega(\mu) = \mathrm{Im}\,(\frac{\lambda_1(\mu)}{\gamma_1(\mu)})$,

$$A_i \neq 0,\ A_i^z \neq 0,\ \theta_i^u - \theta_i^z \neq k\pi \qquad (2.6.2)$$

ни при каком целом k,

$$\|\hat{u}_i\| + \|\hat{z}_i\| + \|\hat{w}_i\| + \left\|\frac{\partial(\hat{u}_i, \hat{z}_i, \hat{w}_i)}{\partial(z, w, \mu)}\right\| \leq K\delta\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\alpha(\mu)}$$

$$\left\|\frac{\partial(\hat{u}_i, \hat{z}_i, \hat{w}_i)}{\partial u}\right\| \leq K\left|\frac{u}{\delta}\right|^{\alpha(\mu)-1} \qquad (2.6.3)$$

где $\alpha(\mu) > \nu(\mu)$ ((2.6.2) эквивалентно условиям $x_0(z, \delta) \neq 0$ и условию (I.2.29)). Из (2.6.I) получаем, что при $\mu_{-1} > 0$ координата $u^{1,-1}(\mu)$ точки $P_{11} = T_\mu^{\{1\}}(P_{-10} = (\mu_{-1}, z^{0,-1}(\mu), w^{0,-1}(\mu))$ задается формулой $u^{1,-1}(\mu) = \mu_1 + A'\mu_{-1}^{\nu'}\cos(\omega'\ln(\mu_{-1}) + \theta') + o(\mu_{-1}^{\nu'})$ для некоторых θ', $A' \neq 0$, $\nu' > 1$, $\omega' \neq 0$. Отсюда, поскольку линия $\mathcal{M}_{11}$ задается уравнением $u^{1,-1}(\mu) = 0$, получаем, что $\mathcal{M}_{-11}$ в бесконечном числе точек пересекает линию $\mathcal{M}_1$: $\mu_1 = 0$, переходя из области $\mu_1 > 0$ в область $\mu_1 < 0$. Заметим, что всюду в области $\mu_1 > 0$ существует цикл типа $\{1\}$, а всюду ниже линии $\mathcal{M}_{-11}$ существует цикл типа $\{-11\}$. Таким образом, если $0 \leq h_1(\mu_{-1}) < \mu_1 < h_{-11}(\mu_{-1})$, то $\Omega_\mu \setminus (O \cup \Gamma_1(\mu) \cup \Gamma_{-1}(\mu))$ состоит из пары циклов типов $\{1\}$ и $\{-11\}$.

Получаем, что при $d = 1$ выполнены утверждения Б) и В). Предположим, теперь, что утверждения Б) и В) выполнены при всех $1 \leq d \leq d_0$ для некоторого $d_0 \geqslant 1$ и, если $d_0 > 1$, то при всех $1 \leq d \leq d_0 - 1$ выполнено А). Возьмем произвольную допустимую пару $(p, q) \in \mathcal{G}(1, -11)$ с $d = d_0$. Пусть $Q_1(\mu_1^1, \mu_{-1}^1)$ и $Q_2(\mu_1^2, \mu_{-1}^2)$ – соседние точки пересечения $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_q$, $\mu_{-1}^2 > \mu_{-1}^1$

и при $\mu_{-1}^1 < \mu_{-1} < \mu_{-1}^2$ имеет место $h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})$. Точка Q_1 отвечает существованию пары гомоклинических к O траекторий Γ_p и Γ_q типов p и q. Поскольку $\tau_\mu^p(\Sigma_0) < \hat{\Sigma}$ и $\tau_\mu^q(\Sigma_0) < \hat{\Sigma}$, то Γ_p и Γ_q не лежат в W_μ^{ss}.

Покажем, что слои W_μ^{++} и W_μ^- трансверсально пересекаются в точках кривых Γ_p и Γ_q. Заметим, что из (2.6.I)-(2.6.3) существует $L > 0$ такое, что $\left\| \frac{\partial(\bar u, \bar z)}{\partial(u, z)} \right\| \geq \left\| \frac{\partial \bar w}{\partial w} \right\| + L \left\| \frac{\partial(\bar u, \bar z)}{\partial w} \right\| + \frac{1}{L} \left\| \frac{\partial \bar w}{\partial(u, z)} \right\|$. Отсюда несложно вывести, что если $\|\Delta w\| \leq L \|(\Delta u, \Delta z)\|$, то $\|\Delta \bar w\| \leq L \|(\Delta \bar u, \Delta \bar z)\|$, то есть липщицева с константой L поверхность вида $w = w(z, u)$ под действием отображения $\tau_\mu^{\{i\}}$ также переходит в липщицеву с константой L поверхность вида $\bar w = \bar w(\bar z, \bar u)$. Заметим, что такие поверхности трансверсальны слоям $\{dz = 0\}$, откуда, так как W_μ^- получается из касательной к $\{w = 0\}$ поверхности итерациями отображений $\tau_\mu^{\{i\}}$, получаем, что W_μ^- трансверсально слоям W_μ^{++} при любом μ. Таким образом при $\mu = \mu^1$ система X_μ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.6.I, откуда, так же как это было сделано для линий $\mathcal{M}_1$ $\mathcal{M}_{-11}$ получаем, что $\mathcal{D}_{pq} \cap (\mu_{-1}^1, \mu_{-1}^2) \neq \emptyset$, $\mathcal{D}_{qp} \cap (\mu_{-1}^1, \mu_{-1}^2) \neq \emptyset$ и, что линии $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_q$ (и, аналогично, линии $\mathcal{M}_{qp}$ и $\mathcal{M}_p$) пересекаются при $\mu_{-1} \in (\mu_{-1}^1, \mu_{-1}^2)$ на бесконечном множестве точек, среди которых есть такие, что на отрезке между ними $h_p > h_{qp}$ $(h_{pq} > h_q)$, и такие, что на отрезке между ними $h_p < h_{qp}$ $(h_{pq} < h_q)$.

Заметим, что при $\mu_{-1} \in (\mu_{-1}^1, \mu_{-1}^2)$ не существует точек пересечения линий $\mathcal{M}_a$ и $\mathcal{M}_b$ таких, что $(p, q) \in \mathcal{Y}(a, b)$ (при $d_0 = 1$ это очевидно, а при $d_0 > 1$

следует из предположения индукции А)). Отсюда, так как в силу леммы 2.3.2 концам интервалов, составляющих $\mathcal{D}_{pq}$ и $\mathcal{D}_{qp}$ отвечают только такие точки пересечения, получаем, что $(\mu_{-1}^1, \mu_{-1}^2) \subseteq \mathcal{D}_{pq}$ и $(\mu_{-1}^1, \mu_{-1}^2) \subseteq \mathcal{D}_{qp}$. Отсюда

$$\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-1} \mid h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})\} \subseteq \mathcal{D}_{pq}$$
$$\mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-1} \mid h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})\} \subseteq \mathcal{D}_{qp} \qquad (2.6.4)$$

Предположим, что некоторое $\mu_{-1}' \in \mathcal{D}_{qp}$ и $\mu_{-1}' \notin \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-1} \mid h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})\}$. Это означает, в силу предположения индукции А), что существуют μ_1', μ_1'', μ_1''', $\mu_1' \neq \mu_1''$, $\mu_1'' \leq \mu_1'''$, такие, что $(\mu_{-1}', \mu_1') \in \mathcal{M}_{pq}$, $(\mu_{-1}', \mu_1'') \in \mathcal{M}_a$, $(\mu_{-1}', \mu_1''') \in \mathcal{M}_b$, где (a, b) - такая допустимая пара, что $(p, q) \in \mathcal{G}(a, b)$.
Заметим, что $S_1(\mu_{-1}', \mu_1'') = a0^\infty$, $S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1''') = b0^\infty$. Если $\mu_1'' = \mu_1'''$, то $S_1(\mu_{-1}', \mu_1''') = a0^\infty$. Если $\mu_1'' < \mu_1'''$, то в силу предположения индукции В) при $\mu_1 \in (\mu_1'', \mu_1''')$ существуют циклы типов a и b, откуда $S_1(\mu_{-1}', \mu_1''') = a^\infty$. В любом случае, в силу пункта б) леммы 2.3.3 получаем, что $\lim\limits_{\mu_1 \to \mu_1'''-0} S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1) = b^\infty$,
$\lim\limits_{\mu_1 \to \mu_1''+0} S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1) = ba^\infty$. Отсюда, так как $\mu_1 \neq \mu_1'''$, то в силу монотонной зависимости S_{-1} от μ_1 получаем $S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1') \leq b^\infty$, или $S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1') \geq ba^\infty$.
Но $S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1') = qp0^\infty$, и так как p начинается с единицы, а q - с минус единицы, то $q^\infty < S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1') < qp^\infty$.
Отсюда в силу (2.I.2) $b^\infty < S_{-1}(\mu_{-1}', \mu_1') < ba^\infty$.
Полученное противореч ие показывает, что

$$\mathcal{D}_{qp} \subseteq \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-1} \mid h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})\}.$$

Аналогично $\mathcal{D}_{pq} \subseteq \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-1} \mid h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})\}$.
Отсюда в силу (2.6.4) $\mathcal{D}_{qp} = \mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_p \cap \mathcal{D}_q \cap \{\mu_{-1} \mid h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})\}$.

Получаем, что так как пара (p,q) выбрана произвольно, то А) выполнено при $d=d_0$ и Б) при $d=d_0+1$.

Заметим, что $\mathcal{M}_{pq}$ и $\mathcal{M}_{qp}$ не пересекаются (слова pq и qp не образуют допустимой пары). Отсюда, так как $h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})$ при $\mu_{-1} \in \mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_{qp}$, и $\mathcal{M}_{pq}$ пересекается с $\mathcal{M}_q$, а $\mathcal{M}_{qp}$ – $\mathcal{M}_p$ то $h_{pq}(\mu_{-1}) < h_{qp}(\mu_{-1})$. При уменьшении μ_1 гомоклиническая траектория типа qp расщепляется вовнутрь, значит в области, ограниченной линиями $\mathcal{M}_{qp}$ и $\mathcal{M}_{pq}$ вблизи $\mathcal{M}_{qp}$ есть точки, отвечающие существованию цикла типа $\{qp\}$. Границами области существования цикла типа $\{qp\}$ служат линии существования гомоклинических траекторий допустимых типов, полученных из $\{qp\}$ циклической перестановкой символов. В силу пункта е) леммы 2.I.I таких типов два: $\{qp\}$ и $\{pq\}$, значит всюду в области между $\mathcal{M}_{qp}$ и $\mathcal{M}_{pq}$ существует цикл типа $\{qp\}$, что доказывает утверждение Г) для $d=d_0$.

Пусть $Q_3(\mu_{-1}^3, \mu_1^3)$ и $Q_4(\mu_{-1}^4, \mu_1^4)$ – соседние точки пересечения $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_{qp}$, такие, что $h_{qp}(\mu_{-1}) > h_p(\mu_{-1})$ при $\mu_{-1} \in (\mu_{-1}^3, \mu_{-1}^4)$. Поскольку $h_p(\mu_{-1}) > h_q(\mu_{-1})$ при $\mu_{-1} \in \mathcal{D}_{pq} = \mathcal{D}_{qp}$, $\mathcal{M}_p$ и $\mathcal{M}_{pq}$ не пересекаются, и $\mathcal{M}_q$ пересекается с $\mathcal{M}_{pq}$, то $h_{qp}(\mu_{-1}) > h_p(\mu_{-1}) > h_{pq}(\mu_{-1})$ при $\mu_{-1} \in (\mu_{-1}^3, \mu_{-1}^4)$. Отсюда в силу Г) при всех $\mu_1 \in (h_p(\mu_{-1}), h_{qp}(\mu_{-1}))$ существует цикл типа qp. Кроме того, при $\mu_1 > h_p(\mu_{-1})$ вблизи $\mathcal{M}_p$ существует цикл типа p. Заметим, что допустимое слово, получаемое циклической перестановкой символов из p, не образует ни с pq, ни с qp допустимой пары, значит в рассматриваемой области нет гомоклинических траекторий типов, полученных из p циклической перестановкой символов.

Отсюда при всех $\mu_1 \in (h_p(\mu_{-1}), h_{qp}(\mu_{-1}))$ существует цикл типа p. Аналогичные утверждения верны и для пары (pq, q), откуда следует утверждение В) при $d = d_0 + 1$. Получаем, что для всех допустимых пар справедливы утверждения А) – Г).

Для завершения доказательства осталось показать, что для любой допустимой пары бесконечных слов (p, q) в любой окрестности точки $(0, 0)$ найдутся μ такие, что $S_1(\mu) = p$, $S_{-1}(\mu) = q$. Действительно, рассмотрим последовательность допустимых пар $\{(p_n, q_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ таких, что либо $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (p_n q_n, q_n)$, либо $(p_{n+1}, q_{n+1}) = (p_n, q_n p_n)$ для любого n $\lim\limits_{n\to\infty} p_n 0^\infty = p$, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n 0^\infty = q$. В силу А) и Б), в $\mathcal{D}_{p_n}$
$\mathcal{A}_n = \mathcal{D}_{p_n} \cap \mathcal{D}_{q_n} \cap \{\mu_\ell \mid h_{p_n}(\mu_\ell) > h_{q_n}(\mu_\ell)\}$
найдётся такая связная компонента $\mathcal{A}_n$, что $cl\,\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_n \neq \emptyset$
$\mathcal{A}_n \neq \emptyset$ $cl\,\mathcal{A}_{n+1} \subset \mathcal{A}_n$. Отсюда существует $\mu_\ell^* \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_{p_n}$. Выберем в качестве $\mu_{-\ell}^*$ любую предельную точку для $\{h_{p_n}(\mu_\ell^*)\}_{n=0}^{+\infty}$. Поскольку $S_1(\mu_\ell^*, h_{p_n}(\mu_\ell^*)) = p_n 0^\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_1(\mu_\ell^*, h_{p_n}(\mu_\ell^*)) = p$.
Поскольку p непериодично ни с какого места, то сравнение с возможностями, разрешенными леммой 2.3.3 показывает, что $S_1(\mu_\ell^*, \mu_{-\ell}^*) = p$. Теорема доказана.

Глава 3. БИФУРКАЦИИ НЕУСТОЙЧИВОГО КОНТУРА ТИПА "БАБОЧКА"

Рассмотрим двупараметрическое семейство C^3 - гладких динамических систем X_μ на ($d^s + d^u$) - мерном гладком многообразии, гладко зависящих от $\mu = (\mu_1, \mu_{-1})$. Будем предполагать, что X_μ имеет седловое состояние равновесия O, причем собственные числа $\lambda_i(\mu)$, $\gamma_j(\mu)$ системы, линеаризованной в точке O, удовлетворяют соотношениям $Re\,\lambda_i(\mu) < \lambda_1(\mu) < 0 <$ $< \gamma_1(\mu) < Re\,\gamma_j(\mu)\ (2 \le i \le d^s, 2 \le j \le d^u)$ и $\lambda_1(\mu) + \gamma_1(\mu) > 0$. Предположим, что W_0^s и W_0^u пересекаются по двум гомоклиническим к O траекториям - Γ_1 и Γ_{-1}. Будем предполагать, что Γ_1 и Γ_{-1} не лежат в неведущих подмногообразиях многообразий W_0^s и W_0^u и касаются друг друга при $t \to +\infty$. Предположим также, что сепаратрисные величины A_1 и A_{-1} отличны от нуля. Введем также в рассмотрение величины π_1 и π_{-1} такие, что Γ_i выходит из O в сторону $\pi_i u > 0$. Будем считать, что $\pi_1 = 1$. Будем предполагать, что семейство X_μ трансверсально к пленке коразмерности два, выделенной вышеперечисленными условиями, и что при $\mu_i = 0$ X_μ имеет гомоклиническую к O траекторию, гомотопную Γ_i в малой окрестности V контура $\Gamma_1 \cup \Gamma_{-1} \cup O$.

Зададим на множестве бесконечных вправо последовательностей символов алфавита $\{-1, 0, 1\}$ отношение порядка $\succ$ по правилу: $p = \{p_i\}_{i=0}^{+\infty} \succ q = \{q_i\}_{i=0}^{+\infty}$ тогда и только тогда, когда для некоторого j $(\prod_{i=0}^{j-1} A_i)(p_j - q_j) > 0$ и $p_i = q_i$ для всех $i < j$. Для произвольной бесконечной вправо последовательности $s = \{s_i\}_{i=0}^{+\infty}$, бесконечную вправо (а возможно и в обе стороны) последовательность $p = \{p_i\}$ назовем s - допустимой, если для любого j выполнено следующее требование: если $p_j = 0$, то

$\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} = 0^{\infty}$, если $p_j = s_0 = -1$, то при $\pi_{-1} = 1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \geqslant s$, а при $\pi_{-1} = -1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \leqslant s$, если же $p_j = s_0 = 1$, то при $\pi_{-1} = 1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \leqslant s$, а при $\pi_{-1} = -1$ $\{p_i\}_{i=j}^{+\infty} \geqslant s$. Последовательность s назовем самодопустимой, если она s - допустима. Для произвольной самодопустимой последовательности s рассмотрим нидинг-систему $K_n(s)$: это множество, которое содержит все последовательности p из символов I и (-I) такие, что либо p бесконечна в обе стороны и s -допустима, либо p бесконечна влево и s - допустима последовательность $(p\, s)$, либо p - пустая последовательность, либо, если s не содержит нулей и непериодична, то $p = s_0 s_1 \ldots = s$, либо, если $s = q^{\infty}$, где q - конечна и не периодична, то $p = q$. Мы предполагаем, что элементы последовательностей из $K_n(s)$ занумерованы так, что обязательно имеется элемент с нулевым номером. При этом последовательности, полученные друг из друга сдвигом, считаются различными.

Для произвольного множества E , состоящего из некоторых последовательностей символов I и (-I) (в частности, для $K_n(s)$) для произвольной непустой $p \in E$ определим множество $\widetilde{p}$ бесконечных последовательностей: если p бесконечны в обе стороны, то $\widetilde{p}$ состоит только из p , если p конечна вправо или влево, то $\widetilde{p}$ состоит из всевозможных последовательностей, которые получаются из p приписыванием соответственно справа или слева произвольных конечных влево или вправо последовательностей из E (приписывание повторяется до тех пор, пока не получится бесконечная в обе стороны последовательность, при этом не обязательно приписывать одну и ту же последовательность из E). Может статься, что в E не конечных вправо или влево последовательностей. В этом случае для конечной соответственно влево или вправо $p \in E$ $\widehat{p}$ состоит из единственной последовательности, полученной приписыванием к p бесконечной последовательности нулей слева или справа соответственно.

Введем топологию на $K_n(1)$: p_1 и p_2 будем считать близкими, если какая-либо последовательность из $\widehat{p_1}$ близка в обычном смысле какой-либо последовательности из $\widehat{p_2}$. Пустая последовательность изолирована. Зададим на $K_n(1)$ отображение сдвига $p \mapsto p'$: если $p = \{p_i\}_{i=i_0}^{i=i_1}$ ($i_0 \leq 0$, $i_1 \geq 0$, возможно, что $i_0 = -\infty$ или $i_1 = +\infty$), то при $i_1 > 0$ $p' = \{p'_i = p_{i+1}\}_{i=i_0-1}^{i=i_1-1}$, а при $i_1 = 0$ p' – пустая последовательность. На пустой последовательности сдвиг неоднозначен – ее образами служат любые последовательности из $K_n(1)$ с $i_0 = 0$.

Пусть Ω_μ – множество траекторий X_μ, целиком лежащих в V.

Теорема 3.I. На плоскости параметров ($\mu'_1 = -\pi_1 A_1 \mu_1$, $\mu'_{-1} = -\pi_{-1} A_{-1} \mu_{-1}$) лежат кривые $\mathcal{M}_i^+$ и $\mathcal{M}_i^-$: $\mu'_i = f_i^{\pm}(\mu'_{-i})$ ($i \in \{1, -1\}$), где $f_i^{\pm}$ определены при всех $\mu'_{-i} > 0$, причем $f_i^+ \geq 0 \geq f_i^-$ и при $\mu'_{-i} \to 0$ $f_i^{\pm}$ стремятся к нулю вместе со своими константами Липшица. Всюду в области $\mu'_1 < 0$, $\mu'_{-1} < 0$ $\Omega_\mu = \{0\}$; при $\mu'_1 = \mu'_{-1} = 0$ $\Omega_\mu = \{\Gamma_1, \Gamma_{-1}, 0\}$; при $\mu'_i = 0$, $\mu'_{-i} < 0$ Ω_μ состоит из 0 и гомоклинической к 0 траектории, гомотопной Γ_i в V ; при $\mu'_i > 0$, $\mu'_{-i} < f_{-i}^-(\mu'_i)$ Ω_μ состоит из 0 , седлового предельного цикла, гомотопного Γ_i , и гетероклинической траектории, ω – предельной к 0 и α – предельной к циклу; при $\mu'_i > f_i^+(\mu'_{-i})$, $\mu'_{-i} > f_{-i}^+(\mu'_i)$ Ω_μ состоит из гиперболического множества, поток на котором эквивалентен надстройке над схемой Бернулли из двух символов, точки 0 и траекторий, ω – предельных к 0 и α – предельных к траекториям из гиперболического множества; при $\mu'_{-i} > 0$, $f_i^+(\mu'_{-i}) \geq \mu'_i \geq f_i^-(\mu'_{-i})$ ограничение $X_\mu|_{\Omega_\mu}$

топологически эквивалентно надстройке над $K_n(s_\mu)$ со вклеенным на месте пустой последовательности состоянием равновесия, где s_μ при каждом фиксированном μ'_{-i} при изменении μ'_i от $f_i^-(\mu'_{-i})$ до $f_i^+(\mu'_{-i})$ пробегает, монотонно изменяясь, все самодопустимые значения, начинающиеся с i. Значениям $s_\mu = q0^\infty$ отвечают сектора $\mathcal{U}_q$ ограниченные двумя непересекающимися липшицевыми кривыми. Значения $s_\mu = q$, не содержащие нулей, являются бифуркационными, им отвечают липшицевы кривые $\mathcal{M}_q$.

Доказательство. Из (I.2.28),(I.2.4) очевидно, что существуют такие $N>1$, $0<\nu<1$, $0<\varepsilon<\min(\nu, 1-\nu)$, что

$$\left|\frac{\partial\Phi^u}{\partial u}\right|^{-1} \le |u|^{1-\nu}, \quad \left\|\frac{\partial(\Phi^u, \Phi^w)}{\partial w}\right\| \le |u|^{\nu+\varepsilon}, \quad \left\|\frac{\partial\Phi^v}{\partial u}\right\| \le |u|^{\varepsilon}$$

$$\left\|\frac{\partial\Phi^v}{\partial(v,\mu,w)}\right\| \left|\frac{\partial\Phi^u}{\partial u}\right| \le |u|^{\nu+\varepsilon}, \quad \left\|\frac{\partial\Phi^w}{\partial u}\right\| \left|\frac{\partial\Phi^u}{\partial u}\right|^{-1} \le N, \quad \left\|\frac{\partial(\Phi^u, \Phi^v)}{\partial(\mu, v)}\right\| \le N \qquad (3.I)$$

(Напомним, что здесь $d^{ls}=1$ и координаты Z нет). Обозначим

$$L_1^+(\bar\delta) = 4\bar\delta^{1+\varepsilon}, \quad L_2^+(\bar\delta) = 3N\bar\delta^{1-\nu}, \quad L_3^+(\bar\delta) = 2\bar\delta^{\varepsilon}$$
$$L_1^-(\bar\delta) = 3N^2, \quad L_2^-(\bar\delta) = \tfrac{1}{3}(\bar\delta)^{-\varepsilon}$$
$$K(\bar\delta) = 5N\bar\delta^{\min(\nu, 1-\nu)} \qquad (3.2)$$

где $\bar\delta$ ограничивает область определения отображений $T_{i\mu}: 0 \le \bar\pi_i u \le \bar\pi_i$

Рассмотрим множество $\mathcal{L}^+$ поверхностей l^+ вида $\{u = h_u^+(w), v = h_v^+($

где (h_u^+, h_v^+) определена при всех W *) и имеет константой Липшица L_1^+. Определим на $\mathcal{L}^+$ расстояние $dist(l^{+(1)}, l^{+(2)}) = \sup\limits_w \max(\|h_u^{+(1)}(w) - h_u^{+(2)}(w)\|, \|h_v^{+(1)}(w) - h_v^{+(2)}\|)$. Для точек P_1, P_2 на l^+ определим расстояние $dist(P_1, P_2) = \|W_2 - W_1\|$. Рассмотрим множества: $\mathcal{A}(l^+, L) = \{P(u,v,w) : \|v - h_v^+(w)\| \le L\|u - h_u^+(w)\|\}$ $\mathcal{A}^+(l^+, L) = \mathcal{A}(l^+, L) \cap \{u > h_u^+(w)\}$, $\mathcal{A}^-(l^+ L) = \mathcal{A}(l^+, L) \cap \{u < h_u^+(w)\}$ Введем на $\mathcal{L}^+$ отношения частичного порядка "выше" и "ниже": будем

---

*) Всюду ниже мы будем считать, что $\|W\| < \frac{1}{2}$, $|u| \le \bar\delta$, $\|v\| \le \delta^v$.

говорить, что $\ell^{+(1)}$ выше $\ell^{+(2)}$ и $\ell^{+(2)}$ ниже $\ell^{+(1)}$, если $\ell^{+(1)} \subset \mathcal{A}^{+}(\ell^{+(2)}, L_3^{+})$ или, что то же самое, если $\ell^{+(2)} \subset \mathcal{A}^{-}(\ell^{+(1)}, L_3^{+})$

Рассмотрим множество $\mathcal{L}^{-}$ поверхностей ℓ^{-} вида $\{u = h_u^{-}(v),\ w = h_w^{-}(v)\}$, где (h_u^{-}, h_v^{-}) - функции, определенные при всех v и имеющие константой Липшица L_1^{-}. Определим для произвольного $\ell^{-} \in \mathcal{L}^{-}$ множества $\mathcal{A}(\ell^{-}, L) = \{P(u,v,w) : \|w - h_w^{-}(v)\| \le L\|u - h_u^{-}(v)\|\}$, $\mathcal{A}^{+}(\ell^{-}, L) = \mathcal{A}(\ell^{-}, L) \cap \{u > h_u^{-}(v)\}$, $\mathcal{A}^{-}(\ell^{-}, L) = \mathcal{A}(\ell^{-}, L) \cap \{u < h_u^{-}(v\}$

Введем на $\mathcal{L}^{-}$ отношения частичного порядка "выше" и "ниже": будем говорить, что $\ell^{-(1)}$ выше $\ell^{-(2)}$ ($\ell^{-(2)}$ ниже $\ell^{-(1)}$), если $\ell^{-(1)} \subset \mathcal{A}^{+}(\ell^{-(2)}, L_2^{-})$ и, что то же самое, $\ell^{-(2)} \subset \mathcal{A}^{-}(\ell^{-(1)}, L_2^{-})$. Для точек P_1, P_2 на ℓ^{-} определим $dist(P_1, P_2) = \|v_2 - v_1\|$. Для $\ell^{-(1)}$, $\ell^{-(2)}$ из $\mathcal{L}^{-}$ определим функцию (это не расстояние) $dist(\ell^{-(1)}, \ell^{-(2)}) = \inf_v \|h_u^{-(2)}(v) - h_u^{-(1)}(v)\|$.

Рассмотрим две произвольные поверхности $\ell^{+} \in \mathcal{L}^{+}$ и $\ell^{-} \in \mathcal{L}^{-}$. Пусть $\ell^{+} \cap \ell^{-} = \varnothing$. Очевидно, что $\ell^{+} \cap \mathcal{A}(\ell^{-}, L_2^{-}) \ne \varnothing$ и $\ell^{-} \cap \mathcal{A}(\ell^{+}, L_3^{+}) \ne \varnothing$. При этом, так как $L_3^{+} L_2^{-} < 1$, то либо $\ell^{+} \cap \mathcal{A}^{+}(\ell^{-}, L_2^{-}) \ne \varnothing$, $\ell^{+} \cap \mathcal{A}^{-}(\ell^{-}, L_2^{-}) = \varnothing$, $\ell^{-} \cap \mathcal{A}^{-}(\ell^{+}, L_3^{+}) \ne \varnothing$, $\ell^{-} \cap \mathcal{A}^{+}(\ell^{+}, L_3^{+}) = \varnothing$, либо

$\ell^{+} \cap \mathcal{A}^{+}(\ell^{-}, L_2^{-}) = \varnothing$, $\ell^{+} \cap \mathcal{A}^{-}(\ell^{-}, L_2^{-}) \ne \varnothing$, $\ell^{-} \cap \mathcal{A}^{-}(\ell^{+}, L_3^{+}) = \varnothing$, $\ell^{-} \cap \mathcal{A}^{+}(\ell^{+}, L_3^{+}) \ne \varnothing$. В первом случае будем говорить, что ℓ^{+} выше ℓ^{-}, во втором - что ℓ^{+} ниже ℓ^{-}. Очевидно, что если $\ell^{+(2)}$ выше (ниже) $\ell^{+(1)}$ и $\ell^{-} \in \mathcal{L}^{-}$ выше (соотв. ниже) $\ell^{+(2)}$, то ℓ^{-} выше (соотв. ниже) $\ell^{+(1)}$.

Лемма 3.I. Рассмотрим гладкую поверхность ℓ вида $w = h(u, v, \mu)$, где h определена при всех (u, v) и $\|\frac{\partial h}{\partial(u, v, \mu)}\| \le L_2^{-}$. Тогда a) $\bar{\ell}_i = T_i(\ell_i \cap T_i^{-1}(\Pi))$

есть поверхность вида $\bar{w} = \bar{h}_i(\bar{u}, \bar{v}, \mu)$, где $\bar{h}_i$ определена при всех $(\bar{u}, \bar{v})$ таких, что $\pi_i A_i(\bar{u} - u^{oi}(\bar{v}, \mu)) \ge 0$ для u^{o} из (I.2.28), и $\|\frac{\partial \bar{h}_i}{\partial(\bar{u}, \bar{v}, \mu)}\| \le L_1^{-}$;

б) Если $P_1(u_1, v_1) \in \ell \cap T_i^{-1}(\Pi)$, $P_2(u_2, v_2) \in \ell \cap T_i^{-1}(\Pi)$,

то $\max(\|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|, \|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\|) \le K \max(\|v_2 - v_1\|, \|u_2 - u_1\|)$;

в) Если $\ell^{(1)}$ и $\ell^{(2)}$ – две поверхности указанного вида, то при каждом данном μ $\sup\limits_{(\bar{u},\bar{v}):\pi_i A_i(\bar{u}-u^{0i}(\bar{v},\mu))\ge 0} \|\bar{h}_i^{(1)} - \bar{h}_i^{(2)}\| \le$ $\le K \sup\limits_{(u,v)} \|h_i^{(1)} - h_i^{(2)}\|$.

Лемма 3.2. Рассмотрим гладкую поверхность $\bar{\ell}^+ : (\bar{u} = \bar{h}_u^+(\bar{w},\mu),$ $\bar{v} = \bar{h}_v^+(\bar{w},\mu))$, где $(\bar{h}_u^+, \bar{h}_v^+)$ определена при всех $\bar{w}$, и $\left\|\frac{\partial(\bar{h}_u^+, \bar{h}_v^+)}{\partial \bar{w}}\right\| \le L_1^+$, $\left\|\frac{\partial(\bar{h}_u^+, \bar{h}_v^+)}{\partial \mu}\right\| \le L_2^+$.

а) Для того, чтобы при некотором μ существовал прообраз $T_i^{-1}(\bar{\ell}^+ \cap T_i(\Pi)) = \ell_i^+$, необходимо и достаточно, чтобы при данном μ либо $\bar{\ell}^+ \cap \ell_{i\mu}^0 \ne \varnothing$, либо в случае $\pi_i A_i > 0$ $\bar{\ell}^+$ была выше $\ell_{i\mu}^0$, а в случае $\pi_i A_i < 0$ $\bar{\ell}^+$ была ниже $\ell_{i\mu}^0$.* При этом ℓ_i^+ имеет вид $(u = h_{ui}^+(w,\mu), v = h_{vi}^+(w,\mu))$, где (h_{ui}^+, h_{vi}^+) определена при всех w и $\left\|\frac{\partial(h_{ui}^+, h_{vi}^+)}{\partial w}\right\| \le L_1^+$, $\left\|\frac{\partial(h_{ui}^+, h_{vi}^+)}{\partial \mu}\right\| \le L_2^+$.

б) Для любых P_1, P_2 из $\bar{\ell}^+ \cap T_i(\Pi)$

$$dist(P_1, P_2) \le K\, dist(T_i^{-1}P_1, T_i^{-1}P_2) \tag{3.3}$$

в) Если $\bar{\ell}^{+(1)}$ и $\bar{\ell}^{+(2)}$ – две поверхности указанного вида, то при любом μ

$$dist(\ell_i^{+(1)}, \ell_i^{+(2)}) \le K\, dist(\bar{\ell}^{+(1)}, \bar{\ell}^{+(2)}) \tag{3.4}$$

г) Если при некотором μ $\bar{\ell}^{+(2)}$ выше $\bar{\ell}^{+(1)}$, то при $A_i > 0$ $\ell_i^{+(2)}$ выше $\ell_i^{+(1)}$, а при $A_i < 0$ $\ell_i^{+(2)}$ ниже $\ell_i^{+(1)}$.

Лемма 3.3. Пусть $\ell^- \in \mathcal{L}^-$ и пусть в случае $\pi_i > 0$ ℓ^-

---

* Очевидно, что при достаточно большом L_1^- $\ell_{i\mu}^0 = T_{i\mu}(W_{\ell\alpha}^s \cap \Pi) \in \mathcal{L}^-$.

выше $W^s_{loc} \cap \Pi$, а в случае $\pi_i < 0$ ℓ^- ниже $W^s_{loc} \cap \Pi$.
Тогда

а) $\bar{\ell}_i^- = T_i(\ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi)) \in \mathcal{L}^-$

б) для P_1 и P_2 из $\ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi)$

$$dist\,(P_1, P_2) \le K\, dist\,(T_i P_1, T_i P_2) \tag{3.5}$$

в) если $\ell^{-(1)} \in \mathcal{L}^-$ и $\ell^{-(2)} \in \mathcal{L}^-$, $\ell^{-(2)}$ выше $\ell^{-(1)}$
и $dist(\ell^{-(2)}, \ell^{-(1)}) > K\,\|\Delta\mu\|$, то

$$\begin{aligned} &\text{при } A_i > 0 \quad \bar{\ell}^{-(2)}_{i,\mu+\Delta\mu} = T_{i,\mu+\Delta\mu}(\ell^{-(2)} \cap T^{-1}_{i,\mu+\Delta\mu}(\Pi)) \le \mathcal{A}^+(\bar{\ell}^{-(1)}_{i\mu} = T_{i\mu}(\ell^{-(1)} \cap T^{-1}_{i\mu}(\Pi)), L_1^-) \\ &\text{при } A_i < 0 \quad \bar{\ell}^{-(2)}_{i,\mu+\Delta\mu} \le \mathcal{A}^-(\bar{\ell}^{-(1)}_{i\mu}, L_1^-) \end{aligned} \tag{3.6}$$

и

$$dist(\bar{\ell}^{-(1)}_{i,\mu+\Delta\mu}, \bar{\ell}^{-(1)}_{i\mu}) > \tfrac{1}{K}\, dist(\ell^{-(1)}, \ell^{-(2)}) \tag{3.7}$$

Доказательства этих лемм вынесены в приложение.

Из леммы 3.I. стандартным образом [14] следует, что любая точка на Π, траектория которой не покидает V при $t \to -\infty$ и отделена от O, имеет неустойчивое многообразие вида $w = h(u, v)$, где h - функция с константой Липшица L_1^-. Из леммы 3.2 вытекает, что любая точка на Π, траектория которой не покидает V при $t \to +\infty$, имеет устойчивое многообразие вида $(u, v) = h(w)$, где h - определенная при всех w функция с константой Липшица L_1^+. Таким образом, любое отделенное от O замкнутое инвариантное подмножество множества Ω_μ гиперболично.

Возьмем произвольную точку $P \in \Pi \cap \Omega_\mu$. Рассмотрим последовательность точек P_i пересечения с Π траектории, проходящей через $P = P_0$. Если $P \notin W^s_\mu \cup W^u_\mu$, то последовательность P_i бесконечна в обе стороны, если $P \in W^u_\mu$, то она конечна влево, а если $P \in W^s_\mu$ - конечна вправо. Назовем кодировкой $Code\,(P)$ последовательность символов $c_i\,(P) \in \{-1, 1\}$ таких, что $P_i = T_{c_i}(P_{i-1})$ (если P_{i_0} - крайняя слева точка в последовательности, то $P_{i_0} \in \ell^0_{j\mu} = T_{j\mu}(W^s_{loc} \cap \Pi)$, где $j \in \{-1, 1\}$, и тогда положим $c_{i_0} = j$). Рассмотрим множество $Code\,(\Omega_\mu)$, состоящее из всех последовательностей $Code\,(P)$ и пустой последовательности. Зададим на $Code\,(\Omega_\mu)$ отображение сдвига и введем топологию - так же, как это было сделано при определении $K_n\,(1)$. Очевидно, что отображение $P \mapsto Code\,(P)$ непрерывно.

Лемма 3.4. Ограничение $X_\mu | \Omega_\mu$ топологически эквивалентно надстройке с вклеенным состоянием равновесия над отображением сдвига на $Code\,(\Omega_\mu)$ (равновесие вклеивается на месте пустой последовательности).

Доказательство. Покажем, что если для двух точек P^1 и P^2 из $\Omega_\mu \cap \Pi$ $\widetilde{Code}(P^1) \cap \widetilde{Code}(P^2) \neq \emptyset$, то $P^1 = P^2$. Действительно, пусть $c = \{c_i\}_{i=-\infty}^{+\infty} \in \widetilde{Code}\,(P^1) \cap \widetilde{Code}\,(P^2)$. Рассмотрим сначала случай, когда c не содержит нулей. Тогда, по построению, в Π существуют последовательности P_i^1 и P_i^2 такие, что $P_0^1 = P^1$, $P_0^2 = P^2$, $P_i^1 = T_{c_i} P_{i-1}^1$, $P_i^2 = T_{c_i} P_{i-1}^2$. Рассмотрим пространства $\mathcal{L}_i^{+(1)}$ и $\mathcal{L}_i^{+(2)}$ поверхностей класса $\mathcal{L}^+$, проходящих через P_i^1 и P_i^2. В силу леммы 3.2 отображение $T_{c_i}^{-1}$ переводит $\mathcal{L}_i^{+(1)}$ в $\mathcal{L}_{i-1}^{+(1)}$ и $\mathcal{L}_i^{+(2)}$ в $\mathcal{L}_{i-1}^{+(2)}$ и является сжимающим на этих пространствах. Отсюда в силу леммы о неподвижной точке последовательности сжимающих операторов следует существование поверхностей $\ell_i^{+(1)}$ и $\ell_i^{+(2)}$ класса $\mathcal{L}^+$, проходящих через P_i^1 и P_i^2 соответственно, таких, что $T_{c_i} \ell_{i-1}^{+(1)} = \ell_i^{+(1)}$,

$T_{c_i} \ell_{i-1}^{+(2)} = \ell_i^{+(2)}$. В силу (3.4) $K^i dist(\ell_i^{+(2)}, \ell_i^{+(1)}) \geq$ $\geq dist(\ell_0^{+(2)}, \ell_0^{+(1)})$, и поскольку $dist(\ell_i^{+(2)}, \ell_i^{+(1)})$ ограничено, то отсюда $\ell_0^{+(2)} = \ell_0^{+(1)}$, и $\ell_i^{+(2)} = \ell_i^{+(1)}$. Отсюда в силу (3.3) $dist(P^1, P^2) \leq K^i dist(P_{-i}^1, P_{-i}^2)$. Устремляя в этом неравенстве i к $+\infty$, получаем $P^1 = P^2$, что и требовалось. Если же C содержит нули, то тогда либо $P^1 \in W^u$ и $P^2 \in W^u$, при этом $Code(P^1) = Code(P^2) = \{C_i\}_{i=i_0}^{+\infty}$ ($i_0 \leq 0$, $C_i \neq 0$), либо $P^1 \in W^s$, $P^2 \in W^s$, при этом $Code(P^1) = Code(P^2) = \{C_i\}_{i=-\infty}^{i=i_1}$ ($i_1 \geq 0$, $C_i \neq 0$). Рассмотрим первый случай (во втором случае доказательство аналогично). По построению, существуют последовательности точек P_i^1 и P_i^2 : $P_i^1 = T_{c_i} P_{i-1}^1$, $P_i^2 = T_{c_i} P_{i-1}^2$ ($i \geq i_0 + 1$), причем P_i^1 и P_i^2 лежат на поверхности $T_{c_i} T_{c_{i-1}} \dots T_{c_{i_0+1}} \ell_{i_0\mu}^0$. Эта поверхность в силу леммы 3.3 принадлежит $\mathcal{L}^-$ (поскольку $\ell_{i_0\mu}^0 = T_{c_{i_0}}(W_{\ell\alpha}^s \cap \Pi) \in \mathcal{L}^-$), откуда в силу (3.5) $dist(P^1, P^2) \leq K^i dist(P_i^1, P_i^2)$. Устремляя в этом неравенстве i к $+\infty$, получаем $P^1 = P^2$.

Из доказанного следует, во-первых, взаимнооднозначность отображения $P \mapsto Code(P)$, во-вторых, хаусдорфовость множества $Code(\Omega_\mu)$. Таким образом, отображение $P \mapsto Code(P)$ является гомеоморфизмом. Очевидно, что этот гомеоморфизм переводит траектории в траектории, откуда следует утверждение леммы.

Из леммы 3.4 следует, что для доказательства теоремы нужно установить множество $Code(\Omega_\mu)$ для всех μ. Покажем предварительно, что для любой траектории из Ω_μ для любой точки пересечения этой траектории с Π координата u удовлетворяет условию $|u| \leq \bar{\delta}(\mu) = \|\mu\|$. Действительно, пусть некоторая траектория из Ω_μ пересекает Π в некоторой точке $P_0(u_0, w_0, v_0)$. Существует бесконечная вправо последовательность точек $P_i(u_i, w_i, v_i)$ такая, что $P_{i+1} = T_{c_{i+1}} P_i$.

По лемме 3.3, если провести через P_0 поверхность $\ell_0^- : (u = u_0, w = w_0)$, то через точки P_i пройдут поверхности $\ell_i^- = ((u, v) = h_i^-(v)) \in \mathcal{L}^-$, такие, что $\ell_{i+1} = T_{c_{i+1}}(\ell_i^- \cap T_{c_{i+1}}^{-1}(\Pi))$. Каждой точке P_i можно поставить в соответствие величину $\delta_i = |h_{u_i}^-(0)|$. Построим поверхности $\tilde{\ell}_i^- : (w = h_{w_i}^-(v), u = h_{u_i}^-(v) - h_{u_i}^-(0))$. Очевидно, $\delta_i = dist(\ell_i^-, \tilde{\ell}_i^-)$ и $\tilde{\ell}_i^- \cap W_{loc}^s \neq \emptyset$. Поскольку $T_{c_{i+1}}(\tilde{\ell}_i^{-1} \cap T_{c_{i+1}}^{-1}(\Pi)) = T_{c_{i+1}}(W_{loc}^s \cap \Pi) = \ell_{c_{i+1}}^0$, то в силу (3.6) $dist(\ell_{i+1}^-, \ell_{c_{i+1}}^0) \geqslant \frac{1}{K} dist(\ell_i^-, \tilde{\ell}_i^-) = \frac{\delta_i}{K}$. Но очевидно, что $\delta_{i+1} = |h_{u,i+1}^-(0)| \geqslant |h_{u,i+1}^-(0) - \mu_{c_{i+1}}| - \|\mu\| \geqslant$ $\geqslant dist(\ell_{i+1}^-, \ell_{c_{i+1}}^0) - \|\mu\|$ (см. (I.2.30)), откуда $\delta_{i+1} \geqslant \frac{\delta_i}{K} - \|\mu\|$. Отсюда следует, что если $\|\mu\| \leqslant \delta_i$, то $\delta_{i+1} \geqslant \delta_i(\frac{1}{K} - 1) > \delta_i > \|\mu\|$, что приведет к неограниченному росту δ_i при $i \to +\infty$, что невозможно. Таким образом, по доказанному $\bar{\delta} = \|\mu\|$ в (3.I), (3.2). (Кроме того, поскольку в силу (I.2.3), (I.2.4) для $T^{-1}(\Pi)$ $\|v\| \leq |u|^{1+\varepsilon}$, то и $\delta^v \leq \|\mu\|$.

Отсюда и из единственности траектории с данной кодировкой следует, что при $\mu = 0$ $\Omega_\mu = \{\Gamma_1, \Gamma_{-1}, 0\}$. Покажем, что в области $\pi_1 A_1 \mu_1 > 0$, $\pi_{-1} A_{-1} \mu_{-1} > 0$ множество $\Omega_\mu = \{0\}$. Действительно, предположим, что это не так. Тогда существует $P_0(u_0, v_0, w_0) \in \Omega_\mu \cap \Pi$. Рассмотрим полутраекторию $\{P_i(u_i, v_i, w_i)\}_{i=0}^{+\infty}$ точки P_0 : $P_i = T_{c_i} P_{i-1}$. Проведем через P_0 поверхность $\ell_0 : \{u = u_0, v = v_0\}$. $\ell_0 \in \mathcal{L}^-$, следовательно образы $\ell_i = T_{c_i}(\ell_{i-1} \cap T_{c_i}^{-1}(\Pi))$ тоже принадлежат $\mathcal{L}^-$. Рассмотрим для каждой $\ell_i : \{w = h_{w_i}(v), h_{u_i}(v)\}$ поверхность $\tilde{\ell}_i : \{w = h_{w_i}(v), u = h_{u_i}(v) - h_{u_i}(0)\}$. Очевидно, что $sign\, h_{u_i}(0) = \pi_{c_{i+1}}$, так что, если $\pi_{c_{i+1}} > 0$, то ℓ_i выше $\tilde{\ell}_i$, а если $\pi_{c_{i+1}} < 0$, то ℓ_i ниже $\tilde{\ell}_i$. Отсюда в силу (3.6), если $\pi_{c_{i+1}} A_{c_{i+1}} < 0$, то ℓ_{i+1} ниже $\ell_{c_{i+1}}^0$, а если $\pi_{c_{i+1}} A_{c_{i+1}} > 0$, то ℓ_{i+1} выше $\ell_{c_{i+1}}^0$. Отсюда, поскольку $\pi_{c_{i+1}} A_{c_{i+1}} \mu_{c_{i+1}} > 0$, то

$> \frac{1}{K} dist(\ell^{(0)}_{\mu+\Delta\mu}, \ell^{(0)}_{\mu}) > K\|\Delta\mu\|$. Повторяя ссылку на пункт 2) леммы 3.3 получим, что $dist(\ell^{(i)}_{\mu+\Delta\mu}, \ell^{(i)}_{\mu}) > \frac{1}{K^i} dist(\ell^{(0)}_{\mu+\Delta\mu}, \ell^{(0)}_{\mu})$, что очевидно невозможно. Полученное противоречие показывает, что $|\Delta\mu_{q_0}| < \varkappa |\Delta\mu_{-q_0}|$, причем $\varkappa \to 0$ при $\|\mu\| \to 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь область $\pi_1 A_1 \mu_1 < 0$, $|\mu_{-1}| \leq -\pi_1 A_1 \mu_1$ (оставшаяся область плоскости параметров симметрична рассматриваемой). Заметим, во-первых, что в случае $\pi_1 A_1 > 0$ $W^s_{loc} \cap \Pi$ выше ℓ^0_1, а в случае $\pi_1 A_1 < 0$ - ниже, поэтому в силу леммы 3.2. существует прообраз $\ell^+_{-1} = T_1^{-1}(W^s_{loc} \cap \Pi) \in \mathcal{L}^+$. При этом, поскольку $W^s_{loc} \cap \Pi = T_1^{-1}(\{v=0, u=\mu_1\} \in \mathcal{L}^+)$, то из (3.4) $dist(\ell^+_{-1}, W^s_{loc}) \leq K|\mu_1| < \frac{|\mu_1|}{2}$. Поскольку ℓ^0_1 не пересекается с окрестностью размера $\frac{|\mu_1|}{2}$ многообразия W^s_{loc}, то ℓ^+_{-1} лежит по ту же сторону от ℓ^0_1, что и W^s_{loc}, и, таким образом, существует $\ell^+_{-2} = T_1^{-1}(\ell^+_{-1}) \in \mathcal{L}^+$ из (3.4) $dist(\ell^+_{-2}, \ell^+_{-1}) \leq K\, dist(\ell^+_{-1}, W^s_{loc}) \leq K^2|\mu_1|$, откуда $dist(W^s_{loc}, \ell^+_{-2}) \leq (K+K^2)|\mu_1| < \frac{|\mu_1|}{2}$. Отсюда вновь существует прообраз $\ell^+_{-3} = T_1^{-1}(\ell^+_{-2}) \in \mathcal{L}^+$ и т.д. Получаем, что существует последовательность $\{\ell^+_{-i}\}_{i=0}^{+\infty}$: $\ell^+_{-i} \in \mathcal{L}^+$ и $T_1 \ell^+_{-i} = \ell^+_{-(i-1)}$, $dist(\ell^+_{-i}, \ell^+_{-(i-1)}) \leq K^i|\mu_1|$. Отсюда существует $\lim_{i\to\infty} \ell^+_{-i} = \ell^+_{\infty} \in \mathcal{L}^+$, $T_1 \ell^+_{\infty} = \ell^+_{\infty}$ и

$$dist(\ell^+_{\infty}, W^s_{loc}) \leq \frac{K}{1-K}|\mu_1| \qquad (3.8)$$

Поскольку в силу (3.3) T_1 - сжимающее отображение на ℓ^+_{∞}, то существует на ℓ^+_{∞} неподвижная точка Q_1 отображения T_1, При этом, очевидно, ℓ^+_{∞} - локальное устойчивое многообразие точки Q_1. По построению, $Code(Q_1) = \{\ldots 111 \ldots\}$. Очевидно, что траектория, проходящая через Q_1 - предельный цикл, гомотопный Γ_1 (мы воспроизвели результат [2] о рождении цикла из гомоклинической к седлу траектории). Поскольку отображение $T_1: \ell^+_{-i} \to \ell^+_{-(i-1)}$ сжимающее, то в силу леммы о неподвижной точке последовательности сжимающих операторов , примененной к последовательности $W^S_{loc} \xleftarrow{T_1} \ell^+_{-1} \xleftarrow{T_1} \ldots \xleftarrow{T_1} \ell^+_{-i} \xleftarrow{T_1} \ldots$, получаем, что существует траектория $\{P_{-i}\}_{i=0}^{+\infty}: P_{-i} \in \ell^+_{-i}$, $T_1 P_{-i} = P_{-(i-1)}$. $Code(P_0) = \{\ldots 111\}$, так что траектория H_1, проходящая через P_0 - это гетероклиническая траектория, α - предельная к циклу Q_1 и ω - предельная к O. Мы показали, что всюду в рассматриваемой области существуют траектории Q_1 и H_1.

Сосредоточимся теперь на случае $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = 1$, $A_1 > 0$, $A_{-1} > 0$. В области $\mu_1 < 0$, $\mu_{-1} < 0$, поскольку $W^S_{loc} \cap \Pi$ выше и $\ell^0_{1\mu}$ и $\ell^0_{-1\mu}$, то в силу леммы 3.2 существуют прообразы как $T^{-1}_{1\mu}(W^S_{loc})$, так и $T^{-1}_{-1\mu}(W^S_{loc})$. Оба они лежат выше $W^S_{loc} \cap \Pi = T^{-1}_{i\mu}(\{u=\mu_i, v=0\})$ и следовательно, выше как $\ell^0_{1\mu}$, так и $\ell^0_{-1\mu}$. Отсюда следует, что существуют все прообразы $T^{-1}_{i\mu} T^{-1}_{j\mu}(W^S_{loc})$ $(i, j \in \{-1, 1\})$. Они тоже лежат выше $\ell^0_{1\mu}$ и $\ell^0_{-1\mu}$, так что и у них существуют все прообразы и т.д. Получаем в итоге, что для любой последовательности $c = \{c_0 c_{-1} \ldots c_{-i}\}$ существует прообраз $\ell_c = T^{-1}_{c_{-i}} T^{-1}_{c_{-(i-1)}} \ldots T^{-1}_{c_0}(W^S_{loc}) \in \mathcal{L}^+$

. Очевидно, что в замыкании множества этих прообразов для любой бесконечной в обе стороны последовательности $\{c_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$ существует последовательность $\{\ell^+_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ такая, что $\ell^+_i \in \mathcal{L}^+$ и $T_{c_i} \ell^+_{i-1} = \ell^+_i$. Отсюда, поскольку в силу (3.3) отображение $T_{c_i}: \ell^+_{i-1} \to \ell^+_i$ сжимающее, то ссылкой на лемму о неподвижной точке сжимающих операторов получаем, что в рассматриваемой области множество Ω_μ состоит из O, из отделенного от O гиперболического подмножества $\mathcal{B}$, ограничение X_μ на которое топологически эквивалентно надстройке над схемой Бернулли двух символов, и множества гетероклинических траекторий, соединяющих каждую траекторию из $\mathcal{B}$ с O.

Пусть теперь $\mu_{-1} \geq 0$. Рассмотрим поверхности ℓ^+_{-i} и ℓ^+_{∞}. Обозначим $\ell^{11} = \ell^+_{-1}$, $\ell^{12} = \ell^+_{\infty}$, $\ell^{-11} = W^s_{loc} \cap \Pi$. В силу леммы 3.2 из того, что W^s_{loc} выше $\{u = \mu_1, v = 0\}$, следует, что ℓ^+_{-1} выше $\ell^+_0 = W^s_{loc}$, откуда ℓ^+_{-2} выше ℓ^+_{-1} и, следовательно, выше ℓ^+_0, откуда ℓ^+_{-3} выше ℓ^+_{-2} и т.д. Окончательно получаем, что ℓ^{12} выше ℓ^{11} и ℓ^{11} выше ℓ^{-11}. В силу (3.8)

$$dist(\ell^{12}, \ell^{-11}) \leq \frac{|\mu_1|\, K(\mu)}{1 - K(\mu)} \leq 6N\, |\mu_1|^{1+\min(\nu, 1-\nu)} \tag{3.9}$$

Заметим, что так как ℓ^{12} выше любой поверхности ℓ^+_{-i}, то $dist(\ell^+_{-i}, \ell^{-11}) \leq dist(\ell^{12}, \ell^{-11})$. Отсюда следует, что все поверхности ℓ^+_{-i} лежат в области $0 \leq u \leq dist(\ell^{12}, \ell^{-11})$. Отсюда в силу леммы 3.2 следует, что все они (и, в частности, ℓ^{11} и ℓ^{12}) имеют константу Липшица

$$L^+_1(dist(\ell^{12}, \ell^{-11})) = 4\, (dist(\ell^{12}, \ell^{-11}))^{1+\varepsilon} \tag{3.10}$$

и, кроме того

$$\ell^{11} \cup \ell^{12} \subset \mathcal{A}^+(\ell^{-11}, 2\, [dist(\ell^{12}, \ell^{-11})]^{\varepsilon}) \tag{3.11}$$

Также, поскольку в силу (3.4) $dist(\ell^{11}, \ell^{12}) \leq K\, dist(\ell^{12}, \ell^{-11})$, имеем

$$dist(\ell^{11}, \ell^{12}) \leq 5N\, [dist(\ell^{12}, \ell^{-11})]^{1+\min(\nu, 1-\nu)} \tag{3.12}$$

Из (3.9) - (3.12) следует, что существует функция $d(\mu)$ такая, что

а) $$d(\mu) \leq 6N\, |\mu_1|^{1+\min(\nu, 1-\nu)} \tag{3.13}$$

б) для любой $P(u,v,w) \in \ell^{12}$ или $P(u,v,w) \in \ell^{11}$

$$|u - d(\mu)| \le 2 \quad (d(\mu))^{1+\varepsilon} \qquad (3.14)$$

$$\|v\| \le 2 \quad (d(\mu))^{1+\varepsilon} \qquad (3.15)$$

Возьмем произвольную точку $P_0 \in \Omega_\mu \cap \Pi$ и проведем через нее произвольную поверхность $\ell_0^- \in \mathcal{L}^-$. Покажем, что ℓ_0^- ниже ℓ^{12} (Откуда, в частности, будет следовать, что в (3.2) можно положить $\bar{\delta} = 2d(\mu)$). Действительно, предположим противное: пусть ℓ_0^- выше ℓ^{12}. Очевидно тогда, что существует поверхность $\tilde{\ell}_0^-$ такая, что $\tilde{\ell}_0^- \cap \ell^{12} \neq \emptyset$ и ℓ_0^- выше $\tilde{\ell}_0^-$. Пусть $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ - траектория точки P_0: $P_i = T_{c_i} P_{i-1}$. В силу леммы 3.3 существует бесконечная последовательность ℓ_i^- : $\ell_i^- = T_{c_i} \ell_{i-1}^-$, $P_i \in \ell_i^-$, все $\ell_i^- \in \mathcal{L}^-$. Пусть для некоторого i существует $\tilde{\ell}_i^-$ такая, что $\tilde{\ell}_i^- \cap \ell^{12} \neq \emptyset$ и ℓ_i^- выше $\tilde{\ell}_i^-$. Тогда, если $c_{i+1} = 1$, то ℓ_{i+1}^- выше $\tilde{\ell}_{i+1}^- = T_1 \tilde{\ell}_i^-$, и так как $T_1 \ell^{12} \subset \ell^{12}$, то $\tilde{\ell}_{i+1}^- \cap \ell^{12} \neq \emptyset$ и

$$dist(\tilde{\ell}_{i+1}^-, \ell_{i+1}^-) > \frac{1}{k} dist(\tilde{\ell}_i^-, \ell_i^-) \qquad (3.16)$$

Если $c_{i+1} = -1$, то построим поверхность $\tilde{\tilde{\ell}}_i^- : \{u = \tilde{h}_{ui}(v) - \tilde{h}_{ui}(0),\ w = \tilde{h}_{wi}(v)\}$, где $(u,w) = \tilde{h}_i(v)$ - уравнение $\tilde{\ell}_i^-$. $\tilde{\tilde{\ell}}_i^-$ ниже $\tilde{\ell}_i^-$. Из того, что $\tilde{\ell}_i^- \in \mathcal{L}^-$, а также из неравенств (3.14), (3.15), выполненных для точки пересечения $\tilde{\ell}_i^- \cap \ell^{12}$ следует, что $dist(\tilde{\ell}_i^-, \tilde{\tilde{\ell}}_i^-) > \frac{d(\mu)}{2}$. Отсюда и из того, что $\tilde{\ell}_i^-$ выше $\tilde{\tilde{\ell}}_i^-$ получаем, что $dist(T_{-1}(\tilde{\ell}_i^-), T_{-1}(\tilde{\tilde{\ell}}_i^-)) > \frac{d(\mu)}{2K(\mu)}$

и что $T_{-1}(\tilde{\ell}_i^-)$ выше $\ell_{-1}^0 = T_{-1}(\tilde{\tilde{\ell}}_i^-)$. Так как координата u пересечения $\ell_{-1}^0 \cap \{v=0\}$ равная μ_{-1} положительна, то получаем теперь, что координата u точки пересечения $T_{-1}(\tilde{\ell}_i^-) \cap \{v=0\}$ превосходит $2\,d(\mu)$.

. Отсюда и из (3.14), (3.15)

$T_{-1}\tilde{\ell}_i^-$ выше ℓ^{12}. Отсюда следует, что существует $\tilde{\ell}_{i+1}^- \in \mathcal{L}^-$ такая, что $\tilde{\ell}_{i+1}^- \cap \ell^{12} \neq \emptyset$ и $T_{-1}\tilde{\ell}_i^-$ выше $\tilde{\ell}_{i+1}^-$. Из последнего, так как ℓ_{i+1}^- выше $T_{-1}\tilde{\ell}_i^-$ и $dist(\ell_{i+1}^-, T_{-1}\tilde{\ell}_i^-) > \frac{1}{K} dist(\ell_i^-, \tilde{\ell}_i^-)$ следует, что ℓ_{i+1}^- выше $\tilde{\ell}_{i+1}^-$ и выполнено (3.16). Получаем, в результате, что существует последовательность поверхностей $\tilde{\ell}_i^- \in \mathcal{L}^-$ таких, что $\tilde{\ell}_i^- \cap \ell^{12} \neq \emptyset$ и $dist(\ell_i^-, \tilde{\ell}_i^-) > \frac{1}{K^i} dist(\ell_0^-, \tilde{\ell}_0^-)$, что, очевидно, невозможно. Полученное противоречие показывает, что если $P \in \Omega_\mu \cap \Pi$, то любая поверхность $\ell \in \mathcal{L}^-$, проходящая через P, лежит ниже ℓ^{12} (очевидно, также, что она лежит выше ℓ^{-11}).

Заметим, что при $\mu_{-1} = |\mu_1|$ в силу (3.13) - (3.15) ℓ_{-1}^0 лежит выше ℓ^{12} (поскольку $\inf\limits_{\|v\| \leq 2d(\mu)^{1+\varepsilon}} u^{0,-1}(v,\mu) \geq |\mu_1| - d(\mu)^{1+\varepsilon} > 2d(\mu)$. С другой стороны, при $\mu_{-1} < 0$ ℓ_{-1}^0 ниже W^s_{loc}, и следовательно ℓ_{-1}^0 ниже ℓ^{12}. Отсюда и из леммы 3.5 следует существование определенной при всех $\mu_1 < 0$ липшицевой кривой $\mathcal{M}_{-1}^- : \mu_{-1} = -f_{-1}^-(\mu_1)$, отвечающей наличию пересечения ℓ_{-1}^0 с ℓ^{12}, то есть образованию гетероклинической траектории, α - предельной к O и ω - предельной к Q_1. В области $\mu_{-1} > f_{-1}^-(\mu_1)$ ℓ_{-1}^0 выше ℓ^{12}, и так как для любой поверхности $\ell \in \mathcal{L}^-$ $T_{-1}\ell$ выше ℓ_1^0, то $T_{-1}\ell$ выше ℓ^{12}. Отсюда по доказанному кодировка любой точки $P \in \Omega_\mu \cap \Pi$ не может содержать минус единичек, следовательно, в рассматриваемой области Ω_μ состоит только из O, Q_1 и гетероклинической траектории H_1.

Рассмотрим теперь область $-f_{-1}^+(\mu_1) = 0 \leq \mu_{-1} \leq -f_{-1}^-(\mu_1)$. Поскольку в этой области ℓ_{-1}^0 не выше ℓ^{12}, то существует прообраз $T_{-1}^{-1}(\ell^{12})$. Обозначим $\ell^{-12} = T_{-1}^{-1}(\ell^{12})$. Пусть ℓ^{12} задается уравнением $\{u = h_u^{12}(w), v = h_v^{12}(w)\}$. Проведем через ℓ^{12}

поверхность $\{v = h_v^{12}(w)\}$. Она пересекает ℓ_{-1}^{0} в единственной точке $P^0(u_0, v_0, w_0)$. Проведем через P^0 поверхность $\tilde{\ell}^{12} = \{u = h_u^{12}(w) + u_0 - h_u^{12}(w_0),\ v = h_v^{12}(w)\}$. Так как ℓ_{-1}^{0} ниже ℓ^{12}, то $u_0 < h_u^{12}(w_0)$, откуда $dist(\ell^{12}, \tilde{\ell}^{12}) = h_u^{12}(w_0) - u_0 < h_u^{12}(w_0) \le 2\, d(\mu)$. Отсюда и из (3.4) так как $\ell^{-11} = T_{-1}^{-1}(\tilde{\ell}^{12} \cap T_{-1}(\Pi))$, то

$$dist(\ell^{-12}, \ell^{-11}) \le 2K(d(\mu))d(\mu) \le d(\mu)^{1+\varepsilon} \tag{3.17}$$

Очевидно также, что ℓ^{-12} выше ℓ^{-11}. Из (3.14), (3.15), (3.17) получаем, что при достаточно малой $d(\mu)$ ℓ^{-12} ниже ℓ^{11}. Таким образом, ℓ^{-11} ниже ℓ^{-12} ниже ℓ^{11} ниже ℓ^{12}.

Рассмотрим отображение $\hat{T}_\mu$ в множестве $\mathcal{L}^-$: если ℓ^- не ниже ℓ^{-11} и не выше ℓ^{-12}, то $\hat{T}_\mu = T_{-1\mu}$, а если ℓ^- не ниже ℓ^{11} и не выше ℓ^{12}, то $\hat{T}_\mu = T_{1\mu}$ (для остальных поверхностей из $\mathcal{L}^-$ $\hat{T}_\mu$ не определено). Заметим, что так как ℓ^{-12} ниже ℓ^{11}, то $\hat{T}_\mu$ однозначно. Для каждой поверхности ℓ^- из области определения $\hat{T}_\mu$ построим ее траекторию $\{\ell_i^-\}$ (возможно, конечную) под действием отображения $\hat{T}_\mu$ и вычислим кодировку $Code(\ell^-) = \{c_i(\ell^-)\}_{i=0}^{+\infty}$ по правилу: $c_i(\ell^-) = j \in \{-1, 1\}$, если ℓ_i^- не ниже ℓ^{j1} и не выше ℓ^{j2}, и $c_i(\ell^-) = 0$, если для некоторого $i' \le i$ $\ell_{i'}^-$ лежит вне области определения $\hat{T}_\mu$. Обозначим $s_\mu = -1\, Code(\ell_{-1}^{0})$. По построению, для любой ℓ из $\mathcal{L}^-$, если $\ell \cap \ell^{-11} \ne \emptyset$, то $Code(\ell) = s_\mu$, если $\ell \cap \ell^{-12} \ne \emptyset$, то $Code(\ell) = -1\,1^\infty$, если $\ell \cap \ell^{11} \ne \emptyset$, то $Code(\ell) = 1\, s_\mu$, и если $\ell \cap \ell^{12} \ne \emptyset$, то $Code(\ell) = 1^\infty$. Заметим, что если $\ell^{(1)}$ выше $\ell^{(2)}$, то на основании (3.6) до тех пор, пока $c_i(\ell^{(1)}) = c_i(\ell^{(2)})$, $\ell_{i+1}^{(1)}$ выше $\ell_{i+1}^{(2)}$, откуда, очевидно, $Code(\ell^{(1)}) \succcurlyeq Code(\ell^{(2)})$.

Теперь, поскольку для любой $l \in \mathcal{L}^-$ существуют в $\mathcal{L}^-$ $l^{(1)}, l^{(2)}, l^{(3)}, l^{(4)}$ такие, что $l^{(1)} \cap l^{-11} \neq \emptyset$, $l^{(2)} \cap l^{-12} \neq \emptyset$, $l^{(3)} \cap l^{11} \neq \emptyset$, $l^{(4)} \cap l^{12} \neq \emptyset$ и либо l ниже $l^{(1)}$, либо l не выше $l^{(2)}$ и не ниже $l^{(1)}$, либо l выше $l^{(2)}$ и ниже $l^{(3)}$, либо l не ниже $l^{(3)}$ и не выше $l^{(4)}$, либо l выше $l^{(4)}$, то $Code(l) = 0^{\infty}$, либо $s_\mu = Code(l^{(1)}) \leq Code(l) \leq Code(l^{(2)}) = -11^{\infty}$, либо $1 s_\mu \leq Code(l) \leq 1^{\infty}$. Отсюда получаем, что так как $\{C_i(l)\}_{i=j}^{+\infty} = Code(l_j)$ при $c_j(l) \neq 0$, то либо $\{C_i(l)\}_{i=j}^{+\infty} = 0^{\infty}$, либо $s_\mu \leq \{C_i(l)\}_{i=j}^{+\infty} \leq -11^{\infty}$ либо $1 s_\mu \leq \{C_i(l)\}_{i=j}^{+\infty} \leq 1^{\infty}$. Таким образом, для любого $l \in \mathcal{L}^-$ $Code(l)$ s_μ-допустима.

Пусть $P \in \Omega_\mu \cap \Pi$. Пусть $Code(P) = \{C_i(P)\}_{i=i_0'}^{i=i_1'}$. Проведём через P поверхность $l \in \mathcal{L}^-$. Как уже отмечалось, l не ниже l^{-11} и не выше l^{12}. Если $P \notin W^s_{loc} \cap \Pi$, то $T_{C_1}(P) \in \Omega_\mu \cap \Pi$. Но если l ниже l^{11}, то $T_1 l$ ниже l^{-11}, следовательно, $C_1 = -1$, а если l выше l^{-12} то $T_{-1} l$ выше l^{12}, следовательно $C_1 = 1$. В любом случае получаем, что $T_{C_1} l = \hat{T} l$. Отсюда очевидно, что если $P \notin W^s$, то $\{C_i(P)\}_{i \geq 1} = Code(l)$ и, следовательно $\{C_i(P)\}_{i \geq 1}$ s_μ-допустима. Если $P \in W^s_\mu$, то, так как $T_{C_{i_1'}} \dots T_{C_1} l \cap W^s_{loc} \neq \emptyset$ то $Code(l) = \{C_i(P)\}_{i \geq 1} s_\mu$ и $\{C_i(P)\}_{i \geq 1} s_\mu$ также s_μ-допустима. Если $Code(P)$ конечна влево: $i_0' \neq -\infty$, $i_0' \leq 0$, то по построению $P \in T_{C_0} \dots T_{C_{i_0'}} W^s_{loc}$, откуда $Code(P) = s_\mu$, если $P \notin W^s$ (в этом случае $Code(P)$ бесконечна и, следовательно, s_μ не содержит нулей), и $s_\mu = (\{Code(P)\})^{\infty}$ если $P \in W^s$ ($T_{C_{i_1'}} \dots T_{C_1} P \in W^s_{loc}$), так что s_μ не содержит нулей. Заметим, что если $P \in W^u$, то $Code(P)$ не периодично. Действительно, если n - период, то проведем поверхность $\ell \in \mathcal{L}^-$ такую, что $\ell \cap W^s_{loc} \neq \varnothing$, ℓ ниже $\ell_n = \hat{T}^n \ell$, $dist(\ell, \ell_n)$ равно модулю δ координаты пересечения ℓ_n с $\{v=0\}$. Тогда из периодичности $Code(P)$ с периодом n в силу (3.7) $dist(\hat{T}^{n+m}\ell, \hat{T}^m \ell) \geq \geq \frac{1}{K^m} dist(\ell, \ell_n)$, что в случае бесконечно большого i_1' противоречит тому, что $P \in \Omega_\mu$, а в случае конечного i_1' это означает, что $dist(\ell_n, \hat{T}^{i_1'-i_0'+1}\ell) > dist(\ell, \ell_n)$, что невозможно, так как $\hat{T}^{i_1'-i_0'+1}\ell$ пересекает W^s_{loc} и, значит, пересекает $v=0$ в точке $u=0$, откуда должно быть $dist(\ell_n, \hat{T}^{i_1'-i_0'+1}\ell) \leq \delta$. Таким образом, мы показали, что $Code(\Omega_\mu)$ содержится в $K_u(s_\mu)$.

Для других комбинаций знаков $A_1, A_{-1}, \pi_1, \pi_{-1}$ этот результат получается аналогичными рассуждениями. Мы не будем их здесь воспроизводить. Отметим только, что при $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = 1$, $A_1 > 0$, $A_{-1} < 0$ в области $0 \leq \mu_{-1} \leq f^+_{-1}(\mu_1)$ $\ell^{12} = W^s_{loc}(Q_1)$, $\ell^{11} = T_1^{-1}(W^s_{loc}(0))$, $\ell^{-11} = W^s_{loc}(0)$, $\ell^{-12} = T^{-1}_{-1}(\ell^{-11})$ (здесь $\mu_{-1} = f^+_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $W^s_{loc}(Q_1)$); при $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = 1$, $A_1 < 0$, $A_{-1} > 0$ в области $0 \leq \mu_{-1} \leq -f^-_{-1}(\mu_1)$ (здесь $f^-_{-1}(\mu_1) = -\mu_{-1}$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $T_1^{-1}(W^s_{loc}(0))$, то есть образованию гомоклинической к 0 траектории с кодировкой $\{-1\,1\}$) $\ell^{12} = T_1^{-1}(W^s_{loc}(0))$, $\ell^{11} = T_1^{-1}(\ell^{12})$, $\ell^{-11} = W^s_{loc}(0)$, $\ell^{-12} = T^{-1}_{-1}(\ell^{12})$; при $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = 1$, $A_1 < 0$, $A_{-1} < 0$ в облас[ти] $0 \leq \mu_{-1} \leq f^+_{-1}(\mu_1)$ (здесь $\mu_{-1} = f^+_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $T_1^{-1}(W^s_{loc}(0))$) $\ell^{12} = T_1^{-1}(W^s_{loc}(0))$, $\ell^{11} = T_1^{-1}(\ell^{12})$, $\ell^{-11} = W^s_{loc}(0)$, $\ell^{-12} = T^{-1}_{-1}(\ell^{12})$; при $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = -1$, $A_1 > 0$

$A_{-1}>0$ в области $0\le\mu_{-1}\le f^+_{-1}(\mu_1)$ (здесь $\mu_{-1}=f^+_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $W^s_{loc}(Q_1)$) $\ell^{12}=W^s_{loc}(Q_1)$, $\ell^{11}=T_1^{-1}(\ell^{-11})$, $\ell^{-11}=W^s_{loc}(Q_2)$, $\ell^{-12}=W^s_{loc}(0)$, (где Q_2 - цикл, гомотопный Γ_2) ; при $\pi_1=1$, $\pi_{-1}=-1$, $A_1>0$, $A_{-1}<0$ в области $f^-_{-1}(\mu_1)\le-\mu_{-1}< f^+_{-1}(\mu_1)$ (здесь $\mu_{-1}=-f^-_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $W^s_{loc}(Q_1)$, а $\mu_{-1}=-f^+_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $T_{-1}^{-1}(W^s_{loc}(Q_1))$, или образованию гетероклинической траектории с кодировкой $-1\,-1\,1\,1\,1\ldots$) $\ell^{12}=W^s_{loc}(Q_1)$, $\ell^{-11}=T_{-1}^{-1}(\ell^{12})$, $\ell^{11}=T_1^{-1}(\ell^{-11})$, $\ell^{-12}=W^s_{loc}(0)$; при $\pi_1=1$, $\pi_{-1}=-1$, $A_1<0$, $A_{-1}>0$, в области $0\le\mu_{-1}\le f^+_{-1}(\mu_1)$ (здесь $\mu_{-1}=f^+_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $T_1^{-1}(W^s_{loc}(Q_2))$

или образованию гетероклинической траектории $-1\,1\,-1\,-1\,-1\ldots$) $\ell^{-11}=W^s_{loc}(Q_2)$, $\ell^{-12}=W^s_{loc}(0)$, $\ell^{12}=T_1^{-1}(\ell^{-11})$, $\ell^{11}=T_1^{-1}(\ell^{12})$; при $\pi_1=1$, $\pi_{-1}=-1$, $A_1<0$, $A_{-1}<0$ в области $f^-_{-1}(\mu_1)\le-\mu_{-1}\le f^+_{-1}(\mu_1)$ $\ell^{12}\cup\ell^{-11}=W^s_{loc}(Q_{1-1})$ (ℓ^{-11} ниже ℓ^{12}) , $\ell^{-12}=W^s_{loc}(0)$, $\ell^{11}=T_1^{-1}(\ell^{12})$ (здесь $\mu_{-1}=-f^-_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $T_1^{-1}(W^s_{loc}(0))$, то есть образованию оклинической к O траектории $\{-1\,1\}$, а $\mu_{-1}=-f^+_{-1}(\mu_1)$ отвечает пересечению ℓ^0_{-1} с $W^s_{loc}(Q_{1-1})$, где Q_{1-1} - предельный цикл, гомотопный в V $\{\Gamma_1\,\Gamma_{-1}\}$, соответствующая гетероклиническая траектория имеет кодировку $-1(-1\,1)(-1\,1)(-1\,1)\ldots$).

Покажем теперь, что для любой непустой последовательности $s\in K_u(s_\mu)$ найдется такая точка $P\in\Omega_\mu\cap\Pi$, что $Code(P)=s$. Заметим сначала, что если s_μ не содержит нулей, непериодично и $s=s_\mu$, то существование требуемой P на ℓ^0_{-1} следует из (3.5) в силу леммы о неподвижной точке последовательности сжимающих операторов [ ] , применённой к последовательности $\ell^0_{-1}\xleftarrow{T^{-1}_{s_1}}T_{s_1}(\ell^0_{-1})\xleftarrow{T^{-1}_{s_2}}T_{s_2}T_{s_1}(\ell^0_{-1})\leftarrow\ldots$. Если

s_μ периодична: $s_\mu = q^\infty$, то, как отмечалось выше $T_q W^s_{loc}(0) \cap W^s_{loc}(0) \neq \emptyset$. Очевидно, что соответствующая гомоклиническая траектория имеет кодировку q. Предположим теперь, что s бесконечна влево. Если $s = \{s_i\}_{i=-\infty}^{i=+\infty}$ – бесконечная последовательность в обе стороны, то обозначим $s^{(j)} = \{s_i\}_{i=j}^{+\infty}$. Для конечной вправо последовательности s положим $s' = s\, s_\mu$ и положим $s^{(j)} = \{s'_i\}_{i=j}^{+\infty}$. Обозначим через $\ell^{(j)}$ множество точек P таких, что для любой содержащей P поверхности $\ell \in \mathcal{L}^-$ $Code(\ell) = s^{(j)}$ (в случае, когда s' заканчивается последовательностью нулей, потребуем дополнительно, чтобы $P \in W^s$). Покажем, что $\ell^{(j)} \neq \emptyset$ и принадлежит $\mathcal{L}^+$, а следовательно замкнутое множество. Отсюда, так как $T_{s'_j} \ell^{(j)} \subset \ell^{(j+1)}$, то будет непусто $\bigcap_{j \geq 0} T_{s_{-1}} T_{s_{-2}} \dots T_{s_{-j}} (\ell^{(-j)})$, но по построению любая точка из этого пересечения принадлежит Ω_μ и имеет кодировку s, что доказывало бы требуемое утверждение.

Рассмотрим поверхность $\ell(u_0) : \{w = const, u = u_0\} \in \mathcal{L}^-$ и ее кодировку $Code(\ell(u_0)) = Code(u_0) = \{c_i(u_0)\}_{i=0}^{i=+\infty}$. Так как $\ell(u')$ выше $\ell(u)$ при $u' > u$, и $dist(\ell(u'), \ell(u)) \neq 0$, то из (3.7) $Code(u)$ с ростом u возрастает в смысле отношения порядка $\succ$. При этом если при некотором $u = u_0$ эта последовательность не содержит нулей, то при $u = u_0$ $Code(u)$ строго монотонна. $Code(u)$ всюду непрерывна кроме тех значений u, при которых для некоторого n $T_{c_n} T_{c_{n-1}} \dots T_{c_0} \ell(u) = \ell^{(n)}(u)$ пересекается с ℓ^{-12} или с ℓ^{11}. Эти разрывы легко вычисляются. Пусть для определенности $\ell^n(u_0) \cap \ell^{-12} \neq \emptyset$. Очевидно, что $Code(u_0) = c_0 \dots c_n\, Code(\ell^-)$ для любой $\ell^- \cap \ell^{-11} \neq \emptyset$, и что со стороны $A_{c_0} \dots A_{c_n}(u - u_0) > 0$ $Code(u) = c_0 \dots c_n 00\dots$. В случае, если ℓ^{-12} есть прообраз устойчивого многообразия некоторого цикла, или когда ℓ^{-12} – прообраз $W^s_{loc}(0)$ и s_μ непериодично, то, очевидно, $\lim\limits_{A_{c_0}\dots A_{c_n}(u-u_0)\to 0-0} Code(u) = Code(u_0)$. Если ℓ^{-12} прообраз $W^s_{loc}(0)$ и s_μ периодично, то, очевидно, существует гомоклиническая к O траектория и либо для некоторого n_1 для $q = \{q_0 \dots q_{n_1}\}$ $Code(\ell^{-12}) = q^\infty$, либо для некоторых n_1 и n_2 для $q = \{q_0 \dots q_{n_1}\}$, $p = \{p_0 \dots p_{n_2}\}$ $Code(\ell^{-12}) = q\, Code(\ell^{11}) = q p^\infty$. В первом случае, при $A_{c_0} \dots A_{c_n}(u-u_0)$ отрицательном и близком к нулю $\{C_{n+1}(u) \dots C_{n+n_1+2}(u)\} = q$, причем если $A_{c_{n+1}} \dots A_{c_{n+n_1+2}} > 0$, то $\ell^{(n+n_1+1)}(u)$ вновь близка к ℓ^{-12} и выше ℓ^{-12}, откуда $Code(u) = \{C_0(u_0) \dots C_{n+n_1+2}(u_0) 000\dots$, а если $A_{c_{n+1}} \dots A_{c_{n+n_1+2}} < 0$, то $\ell^{(n+n_1+1)}(u)$ близка к ℓ^{-12} и вновь ниже ℓ^{-12}, следовательно $\{C_{n+n_1+3}(u) \dots C_{n+2n_1+4}\} = q$, и т.д., так что в этом случае $\lim Code(u) = Code(u_0)$. Если $Code(\ell^{-12}) = q\, Code(\ell^{11}) = q p^\infty$, то в случае $A_{q_0} \dots A_{q_{n_1}} < 0$ $Code(u) = C_0 \dots C_n q_0 \dots q_{n_1} 000\dots$, в случае $A_{q_0} \dots A_{q_{n_1}} > 0$, $A_{p_0} \dots A_{p_{n_2}} < 0$ $Code(u) = c_0 \dots c_n q_0 \dots q_{n_1} p_0 \dots p_{n_2} 00\dots$, а в оставшемся случае $\lim Code(u) = Code(u_0)$.

Внимательный анализ показывает, что в любом случае в разрывы не попадают s_μ-допустимые кодировки. Отсюда следует, что при изменении u от $-\bar\delta$ до $\bar\delta$ $Code(u)$ пробегает все допустимые значения между $Code(\ell^{-11})$ и $Code(\ell^{12})$, а поскольку это минимальная и максимальная допустимые последовательности, то $Code(u)$ пробегает все допустимые значения.

Пусть u_0 таково, что $Code(u_0) = s^{(j)}$. Рассмотрим сначала случай, когда $s^{(j)}$ заканчивается бесконечной последовательностью нулей. В этом случае $s^{(j)} = c_0 \dots c_n\, s_\mu$. Построим поверхность $\ell^{(n)}(u_0)=T_{c_n}\dots T_{c_0}\ell(u_0)$. Предположим для определенности, что $\ell^{(n)}(u_0)$ выше $W^s_{loc}(0)$. Будем менять u так, чтобы $\ell^{(n)}(u)$ опускалась. Так как $\ell^{(n)}(u)$ ниже $\ell^{(n)}(u_0)$ и выше некоторой поверхности $\ell\in\mathcal{L}^-$, пересекающейся с $W^s_{loc}(0)$, то $s_\mu=Code(\ell^{(n)}(u_0))\geqslant Code(\ell^{(n)}(u))\geqslant Code(\ell)=s_\mu$, откуда $Code(\ell^{(n)}(u))=s_\mu$. Очевидно отсюда, что до тех пор, пока $\ell^{(n)}(u)\cap W^s_{loc}(0)=\varnothing$, то при всех $i\leq n$ $\ell^{(i)}(u)\cap W^s_{loc}(0)=\varnothing$, поскольку иначе s_μ было бы частью самого себя, что невозможно, так как s_μ заканчивается последовательностью нулей. Точно так же не может $\ell^{(n)}(u)$ пересекаться ни с каким прообразом $W^s_{loc}(0)$. Таким образом, до тех пор, пока $\ell^{(n)}(u)\cap W^s_{loc}(0)=\varnothing$, $Code(u)=Code(u_0)$. Отсюда существует P такое, что $Code(\ell(P))=s^{(i)}$ и $P\in W^s$. Очевидно, что содержащий P кусок W^s принадлежит $\mathcal{L}^+$ как прообраз $W^s_{loc}(0)$.

В случае, если $s^{(j)}$ не содержит нулей, то в силу леммы о неподвижной точке, примененной к последовательности сжимающих операторов $\ell(u)\xleftarrow{T^{-1}_{s_j}}\ell^{(1)}(u)\xleftarrow{T^{-1}_{s_{j+1}}}\ell^{(2)}(u)\leftarrow\dots$ получаем, что на ℓ существует точка $P: Code(P)=s^{(j)}$. Пусть $\{P_i\}_{i=0}^{+\infty}$ – траектория точки P. Пусть $\mathcal{L}^+_i$ – пространство поверхностей класса $\mathcal{L}^+$, проходящих через P_i. Так как $\mathcal{L}^+_{i+1}\xrightarrow{T^{-1}_{c(i)}}\mathcal{L}^+_i$ – сжимающее отображение (см. лемму 3.2), то в силу леммы о неподвижной точке в последовательности пространств, существует последовательность $l^+_i: P_i\in l^+_i$, $l^+_i\in\mathcal{L}^+$ и $T_{c_i}l^+_i\subseteq l^+_{i+1}$. Пусть P' некоторая точка такая, что $Code(P')=Code(P)=s^{(j)}$. Проведем через P' кривую $\ell^-(P')\in\mathcal{L}^-$. Если $\ell^-(P')$ выше $l^+_0(P)$, то, очевидно $Code(\ell^-(P'))>Code(\ell^-)$ для любой ℓ^-, пересекающейся с $l^+_0(P)$ и лежащей ниже $\ell^-(P')$, откуда $Code(P')>Code(P)$, что невозможно. Также невозможно, чтобы $\ell^-(P')$ ниже $\ell_0^+(P)$. Отсюда $\ell^-(P') \cap \ell_0^+(P) \neq \varnothing$. Но если $P' \neq \ell^-(P') \cap \ell_0^+(P)$, то, очевидно, можно пошевелить $\ell^-(P')$, так чтобы $\ell^-(P')$ была выше $\ell_0^+(P)$. Отсюда $P' \in \ell_0^+(P)$, то есть, окончательно множество точек P' таких, что $Code(P') = s^{(j)}$ непусто и является поверхностью класса $\mathcal{L}^+$.

Итак, мы показали, что для любого μ $K_n(s_\mu) = Code(\Omega_\mu)$. Отсюда из леммы 3.4 следует, что $X_\mu|_{\Omega_\mu}$ топологически эквивалентно надстройке над сдвигом в $K_n(s_\mu)$.

Для завершения доказательства теоремы осталось исследовать зависимость s_μ от μ. Из пункта 2) леммы 3.3 следует, что при каждом фиксированном μ_{-1} при изменении μ_1 s_μ монотонно возрастает, причем строго монотонно при тех μ_1, при которых s_μ не содержит нулей, и непрерывно при тех μ_1, при которых $W^u(0)$ не ложится на ℓ^{-12} и ℓ^{11}. Аналогично предыдущему несложно вычислить разрывы s_μ и убедиться, что в них не попадают самодопустимые последовательности.

Замечание. Заметим, что периодическим траекториям в $K_n(s_\mu)$ отвечают предельные циклы системы X_μ; траекториям из $K_n(s_\mu)$, которые начиная с некоторого места становятся периодическими вправо или влево отвечают траектории X_μ, соответственно ω- или α-предельные к периодическим; конечным вправо или влево траекториям из $K_n(s_\mu)$ отвечают ω- или α-предельные к O; конечным в обе стороны - гомоклинические к O. Непосредственно из определения и теоремы 3.I подсчитывается, что в случае $A_1 > 0$, $A_{-1} > 0$, $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = -1$ в области $|\mu_1'| \leq |\mu_{-1}'|$ и для любого самодопустимого $(p0^\infty)$ граница $\partial U_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{p^\infty} \cup \mathcal{M}_{p\text{-}11^\infty}$[*], а в области

[*] Очевидно, что $\mathcal{M}_{p^\infty}$ отвечает существованию гомоклинической кривой типа p (то есть гомотопной в V произведению $\Gamma_{p_0} \dots \Gamma_{p_n}$ где $p = \{p_0 \dots p_n\}$), а $\mathcal{M}_{p\text{-}11^\infty}$ - существованию траектории, α-предельной к O и ω-предельной к циклу типа $\{1\}$.

$|\mu_1'| \geq |\mu_{-1}'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{p\infty} \cup \mathcal{M}_{p1(-1)^\infty}$ (рис.16); в случае $A_1 > 0,\ A_{-1} > 0,\ \pi_1 = 1, \pi_{-1} = 1$, в области $|\mu_1'| \leq |\mu_{-1}'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{(p-1)\infty} \cup \mathcal{M}_{p1(-1)^\infty}$, а в области $|\mu_1'| \geq |\mu_{-1}'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{(p1)\infty} \cup \mathcal{M}_{p-11\infty}$ (рис.19). В этих случаях бифуркационное множество имеет канторовскую структуру.

При других комбинациях знаков $A_1,\ A_{-1}$ бифуркационное множество наряду с канторовским пучком кривых содержит ещё счётное множество изолированных бифуркационных кривых. Назовём произвольное слово p алфавита $\{-1, 1\}$ ориентируемым, если при $A_1 > 0,\ A_{-1} < 0$ в p чётное число минус единиц, а при $A_1 < 0,\ A_{-1} < 0$ – если длина слова p чётна. Тогда при $\pi_1 = 1,\ \pi_{-1} = -1$ для произвольного самодопустимого неориентируемого $(p0^\infty)$ существует изолированная бифуркационная кривая $\mathcal{M}_{p\infty}$ разделяющая области $\mathcal{U}_p$ и $\mathcal{U}_{pp}$.Обозначим при $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = -1$ для ориентируемого p $\widetilde{\mathcal{U}}_p = \mathcal{U}_p$ и $\widetilde{\mathcal{U}}_p = \mathcal{U}_p \cup \mathcal{U}_{pp} \cup \mathcal{M}_{p\infty}$ для неориентируемого. Тогда замыкание границ областей $\widetilde{\mathcal{U}}_p$ образует канторовский пучок бифуркационных кривых. В случае $A_1 > 0,\ A_{-1} < 0$ в области $|\mu_1'| \leq |\mu_{-1}'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{p\infty} \cup \mathcal{M}_{p-1-11^\infty}$, а в области $|\mu_{-1}'| \leq |\mu_1'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{p\infty} \cup \mathcal{M}_{p1-11^\infty}$ (рис.17). В случае $A_1 < 0,\ A_{-1} < 0$ в области $|\mu_1'| \leq |\mu_{-1}'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{p\infty} \cup \mathcal{M}_{p-1(-11)^\infty}$, а в области $|\mu_{-1}'| \leq |\mu_1'|$ $\partial\mathcal{U}_p = (0,0) \cup \mathcal{M}_{p\infty} \cup \mathcal{M}_{p1(1-1)^\infty}$.

Для случая $\pi_1 = 1,\ \pi_{-1} = 1$ введём следующие обозначения: пусть p_0, b и c – слова алфавита $\{-1, 1\}$.Положим $p_1 = p_0,\ p_{i+1} = p_i n_i p_i$,где $n_i = c$ при чётном i и $n_i = b$ при нечётном i , $p_\infty = \lim p_i 0^\infty$.Ниже мы будем полагать в случае $A_1 > 0,\ A_{-1} < 0$ для области $|\mu_{-1}'| \leq |\mu_1'|$ $(b,c) = (-1, 1)$ для ориентируемого p_0 и $(b,c) = (1, 1)$ для неориентируемого, а в области $|\mu_1'| \leq |\mu_{-1}'|$ $(b,c) = (1-1, -1-1)$ для ориентируемого p и $(b,c) = (-1-1,\ 1-1)$ для неориентируемого

руемого; в случае $A_1<0,\ A_{-1}<0$ в области $|\mu'_{-1}|\le|\mu'_1|$ $(b,c)=(-1,11)$, если p_0 -ориентируемое, и $(b,c)=(11,-1)$, если p_0 - неориентируемое, а в области $|\mu'_1|\le|\mu'_{-1}|$ $(b,c)=(1,-1-1)$, если p_0 ориентируемое и $(b,c)=(-1-1,1)$, если p_0 - неориентируемое. Для каждого $p_0\ne q b q,\ p_0\ne q c q$ такого, что $p_0 0^\infty$ самодопустима, существует область $\widetilde{U}_{p_0}$, содержащая счётное число изолированных бифуркационных кривых $\mathcal{M}_{(p_i n_i)^\infty}$, накапливающихся к $\mathcal{M}_{p_\infty}$, $\partial\widetilde{U}_{p_0}=(0,0)\cup\mathcal{M}_{(p_0 n_0)^\infty}\cup\mathcal{M}_{p_\infty}$. Замыкание границ областей $\widetilde{U}_{p_0}$ образует канторовский пучок бифуркационных кривых. Кривые $\mathcal{M}_{(p_i n_i)^\infty}$ и $\mathcal{M}_{(p_{i+1} n_{i+1})^\infty}$ ограничивают область U_{p_i} (рис.20,21). При переходе через $\mathcal{M}_{(p_{i+1} n_{i+1})^\infty}$ из U_{p_i} в $U_{p_{i+1}}$ к надстройке T_{p_i} над ТМЦ $K_n(p_i 0^\infty)$ добавляется один седловой цикл $(p_{i+1} n_{i+1})^\infty$, родившийся из гомоклинической к O траектории $p_{i+1} n_{i+1}$, и семейство траекторий, α -предельных к траекториям их T_{p_i} и ω -предельных к циклу. Перестройки нидинга, происходящие при переходе от $\mathcal{M}_{(p_0 n_0)^\infty}$ к $\mathcal{M}_{p_\infty}$, аналогичны тем, что происходят при серии бифуркаций удвоения периода [37].

Приложение

Доказательство технических лемм

Лемма 3.I. Рассмотрим гладкую поверхность ℓ вида $w = h(u, v, \mu)$, где h определена при всех (u, v, μ) и $\| \frac{\partial h}{\partial(u,v,\mu)} \| \le L_2^-$. Тогда

а) $\bar{\ell}_i = T_i(\ell_i \cap T_i^{-1}(\Pi))$ есть поверхность вида $\bar{w} = \bar{h}_i(\bar{u}, \bar{v}, \mu)$, где $\bar{h}_i$ определена при всех $(\bar{u}, \bar{v})$ таких, что $\hat{\pi}_i A_i(\bar{u} - u^{0i}(\bar{v}, \mu)) \ge 0$ и $\| \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial(\bar{u}, \bar{v}, \mu)} \| \le L_1^-$;

б) Если $P_1(u_1, v_1) \in \ell \cap T_i^{-1}(\Pi)$, $P_2(u_2, v_2) \in \ell \cap T_i^{-1}(\Pi)$, то

$$\max(\|v_2 - v_1\|, \|u_2 - u_1\|) \le K \max(\|\bar{u}_2 - \bar{u}_1\|, \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|);$$

в) Если $\ell^{(1)}$ и $\ell^{(2)}$ - две поверхности указанного вида, то при каждом данном μ

$$\sup_{(\bar{u}, \bar{v}):\ \hat{\pi}_i A_i(\bar{u} - u^{0i}(\bar{v}, \mu)) \ge 0} \|\bar{h}_i^{(1)} - \bar{h}_i^{(2)}\| \le K \sup_{(u,v)} \|h_i^{(1)} - h_i^{(2)}\|$$

Доказательство. Очевидно, что точка $\bar{P}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ тогда и только тогда принадлежит $\bar{\ell}_i$, когда существуют (u, v) такие, что

$$\begin{cases} v = \Phi_i^v(u, h(u, v, \mu), \bar{v}, \mu) \\ \bar{u} = \Phi_i^u(u, h(u, v, \mu), \bar{v}, \mu) \\ \bar{w} = \Phi_i^w(u, h(u, v, \mu), \bar{v}, \mu) \end{cases} \tag{4.I}$$

При $u = 0$ (4.I) имеет единственное решение $v \equiv 0$. Поскольку в силу (3.I) $\| \frac{\partial \Phi_i^v(u, h(u,v,\mu), \bar{v}, \mu)}{\partial v} \| \le \| \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w} \| \| \frac{\partial h}{\partial v} \| \le \le \frac{1}{3} \bar{\delta} < \frac{1}{2}$ при достаточно малом $\bar{\delta}$, то отсюда на основании теоремы о неявной функции получаем, что при всех $\hat{\pi}_i u \ge 0$ (а из (I.2.3) только при таких u) v из (4.I) однозначно выражается через $(u, \bar{v}, \mu)$. При этом (см. (3.I), (3.2))

$$\left\{\begin{array}{l}\left\|\frac{\partial v}{\partial \bar v}\right\| \le \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial v}\right\| / \left(1 - L_2^- \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|\right) \le 2(\bar\delta)^{1+\varepsilon} \\ \left\|\frac{\partial v}{\partial u}\right\| \le \left(\left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial u}\right\| + L_2^- \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|\right) / \left(1 - L_2^- \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|\right) \le 2(\bar\delta)^{\varepsilon} \\ \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\| \le \left(\left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \mu}\right\| + L_2^- \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|\right) / \left(1 - L_2^- \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|\right) \le \bar\delta \end{array}\right. \tag{4.2}$$

Теперь $\bar u$ представляется в виде

$$\bar u = \varphi_i(u, \bar v, \mu) \tag{4.3}$$

где $\frac{\partial \varphi_i}{\partial u} = \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\left(1 + \left(\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right)\right)$. Из (3.I), (3.2), $\left\|\left(\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right)\right\| \le \bar\delta < 1$. Поэтому $\operatorname{sign} \frac{\partial \varphi_i}{\partial u} = \operatorname{sign} \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u} = \operatorname{sign} A_i \ne 0$. Отсюда получаем, что из (4.3) u выражается однозначно через $(\bar u, \bar v)$ при всех $\bar u$ таких, что $\pi_i A_i (\bar u - u^{oi}(\bar v, \mu)) \ge 0$.

Таким образом, область определения $\bar h_i$ действительно $\pi_i A_i (\bar u - u^{oi}(\bar v, \mu)) \ge 0$.

Из (4.I), (4.3) получаем

$$\left\{\begin{array}{l}\left\|\frac{\partial u}{\partial \bar u}\right\| = \left\|\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right)^{-1}\right\| \le \left|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} / \left(1 - \left\|\left(\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w}\left(\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right)\right\|\right) \le 2\left|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} \le 2(\bar\delta)^{1-\nu} \\ \left\|\frac{\partial u}{\partial \bar v}\right\| \le \left\|\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right)^{-1}\right\| \left[\left\|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial v}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial v}\right\| \left\|\frac{\partial v}{\partial \bar v}\right\|\right] \le 2N \left|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} \le 2N(\bar\delta)^{1-\nu} \\ \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| \le \left\|\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial u}\right)^{-1}\right\| \left[\left\|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w}\right\| \left(\left\|\frac{\partial h}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial h}{\partial v}\right\| \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\|\right)\right] \le 2N \left|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} \le 2N(\bar\delta)^{1-\nu} \end{array}\right. \tag{4.4}$$

Из (4.I), (4.2), (4.4) находим

$$\left\{\begin{array}{l}\left\|\frac{\partial v}{\partial \bar v}\right\| \le \left\|\frac{\partial v}{\partial \bar v}\right\|_{u=const} + \left\|\frac{\partial v}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial u}{\partial \bar v}\right\| \le (4N+1)(\bar\delta)^{1+\varepsilon-\nu} \\ \left\|\frac{\partial v}{\partial \bar u}\right\| \le \left\|\frac{\partial v}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial u}{\partial \bar u}\right\| \le 4(\bar\delta)^{1+\varepsilon-\nu} \\ \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\| \le \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\|_{u=const} + \left\|\frac{\partial v}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| \le (4N+1)(\bar\delta)^{1+\varepsilon-\nu} \end{array}\right. \tag{4.5}$$

Из (4.I), (4.4), (4.5) и (3.2) находим

$$\left\|\frac{\partial \bar w}{\partial \bar u}\right\| \le \left(\left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial u}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial u}\right\|\right) \left\|\frac{\partial u}{\partial \bar u}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial v}\right\| \left\|\frac{\partial v}{\partial \bar u}\right\| \le 3N < L_1^-$$

$$\left\|\frac{\partial \bar w}{\partial \bar v}\right\| \le \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial v}\right\| + \left(\left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial u}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial u}\right\|\right) \left\|\frac{\partial u}{\partial \bar v}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial v}\right\| \left\|\frac{\partial v}{\partial \bar v}\right\| \le 3N^2 = L_1^-$$

$$\left\|\frac{\partial \bar w}{\partial \mu}\right\| \le \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial \mu}\right\| + \left(\left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial u}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial u}\right\|\right) \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\right\| \left\|\frac{\partial h}{\partial v}\right\| \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\| \le 3N^2 = L_1^-$$

Пункт а) доказан.

Для доказательства пункта б) достаточно проверить, что $\|\frac{\partial v}{\partial \bar u}\| + \|\frac{\partial v}{\partial \bar v}\| \le K$ и $\|\frac{\partial u}{\partial \bar u}\| + \|\frac{\partial u}{\partial \bar v}\| \le K$, но это следует из (3.2), (4.4), (4.5).

Для доказательства пункта в) рассмотрим для любых $(\bar u, \bar v, \mu)$: $(\bar u - u^*(\bar v, \mu))\pi_i A_i \ge 0$ пару точек $\bar P_1(\bar u, \bar v, \bar w_1, \mu) \in \bar\ell_i^{(1)}$ и $\bar P_2(\bar u, \bar v, \bar w_2, \mu) \in \bar\ell_i^{(2)}$ У них по доказанному есть прообразы $P_1(u_1, v_1, w_1) \in \ell^{(1)}$ и $P_2(u_2, v_2, w_2) \in \ell^{(2)}$: $T_i P_1 = \bar P_1$ и $T_i P_2 = \bar P_2$. Очевидно, что $\|h^{(2)}(u_2, v_2, \mu) - h^{(1)}(u_1, v_1, \mu)\| \ge \|h^{(2)}(u_2, v_2, \mu) - h^{(1)}(u_2, v_2, \mu)\| - \|h^{(1)}(u_2, v_2, \mu) - h^{(1)}(u_1, v_1, \mu)\| \ge \|W_2 - W_1\| - L_2^- \|u_2 - u_1\| - L_2^- \|v_2 - v_1\|$. Отсюда, очевидно, что для доказательства пункта в) достаточно показать, что для отображения T_i при условии $d\bar v = 0$, $d\bar u = 0$, $d\mu = 0$ имеет место неравенство $\|d\bar w\| \le K\|dw\| - KL_2^-\|du\| - KL_2^-\|dv\|$. Но $d\bar u = \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial w}dw$, $d\bar w = \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial w}dw$, $d\bar v = \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial w}dw$. Из $d\bar u = 0$ получаем $du = -\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial w}dw$, $dv = \left(\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial w} - \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial w}\right)dw$, $d\bar w = \left(\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial w} - \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1}\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial w}\right)dw$. Отсюда и из (3.1) $\|du\| \le (\bar\delta)^{1+\varepsilon}\|dw\|$ $\|d\bar w\| \le (W+1)(\bar\delta)^{\bar\rho+\varepsilon}\|dw\|$, $\|dv\| \le 2(\bar\delta)^{1+\varepsilon}\|dw\|$, откуда и из (3.2) следует требуемое неравенство. Лемма доказана.

Лемма 3.2. Рассмотрим гладкую поверхность $\bar\ell^+ : (u = \bar h_u^+(\bar w, \mu)$, $\bar v = \bar h_v^+(\bar w, \mu))$, где $(\bar h_u^+, \bar h_v^+)$ определена при всех $\bar w$ и $\|\frac{\partial(\bar h_{u,v}^+)}{\partial w}\| \le L_1^+$, $\|\frac{\partial \bar h_{u,v}^+}{\partial \mu}\| \le L_2^+$.

а) Для того, чтобы при некотором μ существовал прообраз $T_i^{-1}(\bar\ell^+ \cap T_i(\Pi)) = \ell_i^+$ необходимо и достаточно, чтобы при данном μ либо $\bar\ell^+ \cap \ell_{i_\mu}^0 \ne \varnothing$, либо в случае $\pi_i A_i > 0$ $\bar\ell^+$ была выше $\ell_{i_\mu}^0$, а в случае $\pi_i A_i < 0$ $\bar\ell^+$ была ниже $\ell_{i_\mu}^0$. При этом ℓ_i^+ имеет вид $(u = h_{ui}^+(w, \mu)$, $v = h_{vi}^+(w, \mu))$, где h_i^+ определена при всех w и $\|\frac{\partial h_i^+}{\partial w}\| \le L_1^+$, $\|\frac{\partial h_i^+}{\partial \mu}\| \le L_2^+$.

б) Для любых P_1, P_2 из $\bar\ell^+ \cap T_i(\Pi)$

$$dist(P_1, P_2) \le K\, dist(\bar P_1, \bar P_2)$$

в) Если $\bar{\ell}^{+(1)}$ и $\bar{\ell}^{+(2)}$ – две поверхности указанного вида, то при любом μ

$$dist(\ell_i^{+(1)}, \ell_i^{+(2)}) \le K\, dist(\bar{\ell}^{+(1)}, \bar{\ell}^{+(2)})$$

г) Если при некотором μ $\bar{\ell}^{+(2)}$ выше $\bar{\ell}^{+(1)}$, то при $A_i>0$ $\ell_i^{+(2)}$ выше, а при $A_i<0$ $\ell_i^{+(2)}$ ниже $\ell_i^{+(1)}$.

Доказательство. В силу леммы 3.I. любая поверхность $\{w=const\}\cap T_i^{-1}(\Pi)$ под действием отображения T_i переходит в поверхность вида $\bar{w}=\bar{h}(\bar{u},\bar{v},\mu)$, где $\bar{h}$ определена при всех $(\bar{u},\bar{v})$, таких, что $\pi_i A_i(\bar{u}-u^{0i}(\bar{v},\mu))\geq 0$ и имеет константой Липшица L_1^-. Отсюда, так как $L_3^+L_1^-<1$, то для того, чтобы $\bar{\ell}^+\cap T_i(\Pi)\neq\emptyset$ необходимо и достаточно, чтобы либо $\bar{\ell}^+\cap \ell_{i_\mu}^0\neq\emptyset$, либо в случае $\pi_i A_i>0$ $\bar{\ell}^+$ была выше $\ell_{i_\mu}^0$, а в случае $\pi_i A_i<0$ $\bar{\ell}^+$ была ниже $\ell_{i_\mu}^0$. Предположим теперь, что это условие выполнено и $\bar{\ell}^+\cap \ell_{i_\mu}^0=\emptyset$ (если $\bar{\ell}^+\cap \ell_{i_\mu}^0\neq\emptyset$ то, очевидно $T_i^{-1}(\bar{\ell}^+\cap T_i(\Pi))=\{u=0, v=0\}$ и пункт а) выполнен). Для того, чтобы некоторая точка $P(u,v,w)\in\ell_i$ необходимо и достаточно, чтобы существовало $\bar{w}$ такое, что

$$v=\Phi_i^v(u,w,\bar{h}_v^+(\bar{w},\mu),\mu) \tag{4.6}$$

$$\bar{h}_u^+(\bar{w},\mu)=\Phi_i^u(u,w,\bar{h}_v^+(\bar{w},\mu),\mu) \tag{4.7}$$

$$\bar{w}=\Phi_i^w(u,w,\bar{h}_v^+(\bar{w},\mu),\mu) \tag{4.8}$$

Так как (4.8) имеет по предположению по крайней мере одно решение, $(u,w,\bar{w},\mu)$, то, так как $\|\frac{\partial\Phi_i^w}{\partial v}\|\|\frac{\partial\bar{h}_v^+}{\partial\bar{w}}\|\leq NL_1^+<\frac{1}{2}$, то в силу теоремы о неявной функции из (4.8) $\bar{w}$ однозначно выражается через (u,w,μ) при всех w и $\pi_i u\geqslant 0$. При этом (см. (3.I), (3.2))

$$\left\{\begin{array}{l} \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial w}\right\| \le \left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial w}\right\| \Big/ \left(1 - L_1^+ \left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \bar{v}}\right\|\right) \le 2(\bar{\delta})^{\nu+\varepsilon} \\ \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial \mu}\right\| \le \left(\left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \bar{v}}\right\| \left\|\frac{\partial \bar{h}_v^+}{\partial \mu}\right\|\right) \Big/ \left(1 - L_1^+ \left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \bar{v}}\right\|\right) \le 2N \\ \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial u}\right\| \le \left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}\right\| \Big/ \left(1 - L_1^+ \left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \bar{v}}\right\|\right) \le 2\left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}\right\| \end{array}\right. \tag{4.9}$$

Аналогично, так как (4.7) имеет при данном μ по крайней мере одно решение (u_0, w_0) то, поскольку $\left\|\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \bar{h}_u^+}{\partial \bar{w}} - \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{h}_v^+}{\partial \bar{w}}\right)\frac{\partial \bar{w}}{\partial u}\right\| \le$ $\le 2L_1^+(1+N)\left\|\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}\right\|\left|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} \le 2L_1^+ N(1+N) < \frac{1}{2}$ (см. (4.7), (4.9)), то из (4.7) u однозначно выражается через w и μ при всех w, близких к w_0, причем область определения $u = h_{ui}^+(w, \mu)$ ограничена по w только условием $u \ne 0$. Но если $u_1 = 0$ для некоторой точки $P_1 = (u_1, v_1, w_1) \in T_i^{-1}(\bar{\ell}^+)$ то, так как $P_1 \in T_i^{-1}(\Pi)$, то $v_1 = 0$ и, значит, $P_1 \in W^s_{loc} \cap \Pi$ и $T_i(P_1) \in \bar{\ell}^+ \cap \ell^0_{i\mu}$. Но мы предположили, что $\bar{\ell}^+ \cap \ell^0_{i\mu} = \varnothing$, так что u не может быть равно нулю. Таким образом из (4.7) u однозначно выражается через (w, μ) при всех w. При этом (см. (3.I), (3.2), (4.9))

$$\left\{\begin{array}{ll} \left\|\frac{\partial u}{\partial w}\right\| \le \left|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right|^{-1}\left(\left\|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial w}\right\| + \left(\left\|\frac{\partial \bar{h}_u^+}{\partial \bar{w}}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar{v}}\right\|\left\|\frac{\partial \bar{h}_v^+}{\partial \bar{w}}\right\|\right)\left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial w}\right\|\right) \le & \\ \le 2\left|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right|^{-1}(\bar{\delta})^{\nu+\varepsilon} \le 2(\bar{\delta})^{1+\varepsilon} & (4.I0) \\ \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| \le \left|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right|^{-1}\left(\left\|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \bar{h}_u^+}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar{v}}\right\|\left\|\frac{\partial \bar{h}_v^+}{\partial \mu}\right\| + \left(\left\|\frac{\partial \bar{h}_u^+}{\partial \bar{w}}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar{v}}\right\|\left\|\frac{\partial \bar{h}_v^+}{\partial \bar{w}}\right\|\right)\left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial \mu}\right\|\right) \le & \\ \le (N+1)\left|\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} \le (N+1)(\bar{\delta})^{1-\nu} & (4.11) \end{array}\right.$$

Отсюда и из (4.9)

$$\left\{\begin{array}{l} \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial w}\right\| \le \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial w}\right\|_{\substack{u=const \\ \mu=const}} + \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial u}\right\|\left\|\frac{\partial u}{\partial w}\right\| \le (4N+2)(\bar{\delta})^{\nu+\varepsilon} \\ \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial \mu}\right\| \le \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial \mu}\right\|_{\substack{u=const \\ w=const}} + \left\|\frac{\partial \bar{w}}{\partial u}\right\|\left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| \le 2N(N+2) \end{array}\right. \tag{4.I2}$$

Теперь из (4.6), (4.I0) - (4.I2)

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial w}\right\| \le \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial w}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial u}{\partial w}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial \bar v}\right\| \left\|\frac{\partial \bar h_v^+}{\partial \bar w}\right\| \left\|\frac{\partial \bar w}{\partial w}\right\| \le 2(\bar\delta)^{1+\varepsilon}$$

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\| \le \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u}\right\| \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial \bar v}\right\| \left\|\frac{\partial \bar h^+}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial \bar v}\right\| \left\|\frac{\partial \bar h^+}{\partial \bar w}\right\| \left\|\frac{\partial \bar w}{\partial \mu}\right\| \le (N+2)(\bar\delta)^{1+\varepsilon-\nu}$$

Отсюда и из (4.I0), (4.II)

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial w}\right\| + \left\|\frac{\partial v}{\partial w}\right\| \le 4(\bar\delta)^{1+\varepsilon} \le L_1^+ , \quad \left\|\frac{\partial u}{\partial \mu}\right\| + \left\|\frac{\partial v}{\partial \mu}\right\| \le 2N(\bar\delta)^{1-\nu} \le L_2^+$$

Пункт а) доказан.

Утверждение пункта б) при $\bar\ell^+ \cap \ell_{i_\mu}^0 = \varnothing$ прямо следует из (3.2), (4.I2). При $\bar\ell^+ \cap \ell_{i_\mu}^0 \neq \varnothing$, поскольку $T_i(\Pi \setminus W_{\ell\alpha}^s) \le \le \mathcal{A}(\ell_{i_\mu}^0, L_1^-)$, то $\bar\ell^+ \cap T_i(\Pi)$ состоит только из одной точки, так что пункт б) очевидно выполнен.

в) Выберем произвольное (w, μ) . Ему отвечают две точки: $P_1 : (u_1, v_1, w) \in \ell_i^{+(1)}$ и $P_2 : (u_2, v_2, w) \in \ell_i^{+(2)}$. Пусть $\bar P_1 = (\bar u_1, \bar v_1, \bar w_1)$, $\bar P_2 = (\bar u_2, \bar v_2, \bar w_2)$.
Имеем $\|\bar h^{+(2)}(\bar w_2, \mu) - \bar h^{+(1)}(\bar w_2, \mu)\| \ge \|\bar h^{+(2)}(\bar w_2, \mu) - \bar h^{+(1)}(\bar w_1, \mu)\| - \|\bar h^{+(1)}(\bar w_2, \mu) - \bar h^{+(1)}(\bar w_1, \mu)\| \ge \max(|\bar u_2 - \bar u_1|, \|\bar v_2 - \bar v_1\|) - L_1^+ \|\bar w_2 - \bar w_1\|$.
Отсюда очевидно, что для доказательства пункта в) достаточно показать, что для отображения T_i при условии $dw = 0$ имеет место неравенство

$$\max(\|du\|, \|dv\|) \le K \max(|d\bar u|, \|d\bar v\|) - K L_1^+ \|d\bar w\| \qquad (4.I3)$$

Имеем $dv = \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial \bar v} d\bar v + \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u} du$, $d\bar w = \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \bar v} d\bar v + \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u} du$, $d\bar u = \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar v} d\bar v$, откуда $du = \left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} d\bar u - \left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar v} d\bar v$, $dv = \left(\frac{\partial \varphi_i^v}{\partial \bar v} - \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar v}\right) d\bar v + \frac{\partial \varphi_i^v}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} d\bar u$, $d\bar w = \left(\frac{\partial \varphi_i^w}{\partial \bar v} - \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} \frac{\partial \varphi_i^u}{\partial \bar v}\right) d\bar v + \frac{\partial \varphi_i^w}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} d\bar u$.

Отсюда и из (3.I)

$$\|d\bar v\| \le (\bar\delta)^{1+\varepsilon-\vartheta}|d\bar u| + ((\bar\delta)^{1+\varepsilon} + N(\bar\delta)^{1+\varepsilon-\vartheta})\|d\bar v\| \le (N+2)(\bar\delta)^{1+\varepsilon-\vartheta}\max(|d\bar u|, \|d\bar v\|)$$

$$|du| \le (\bar\delta)^{1-\vartheta}|d\bar u| + N(\bar\delta)^{1-\vartheta}\|d\bar v\| \le (N+2)(\bar\delta)^{1-\vartheta}\max(|d\bar u|, \|d\bar v\|)$$

$$\|d\bar w\| \le N|d\bar u| + (N+N^2)\|d\bar v\| \le N(N+2)\max(|d\bar u|, \|d\bar v\|)$$

откуда и из (3.2) следует (4.I3). Пункт в) доказан.

г) Возьмем произвольное W и рассмотрим точки $P_1(u_1, v_1, W) \in \ell_i^{+(1)}$ и $P_2(u_2, v_2, W) \in \ell_i^{+(2)}$. Рассмотрим $\bar P_1 = T_i P_1 = (\bar u_1, \bar v_1, \bar w_1) \in \bar\ell^{+(1)}$ и $\bar P_2 = T_i P_2 = (\bar u_2, \bar v_2, \bar w_2) \in \bar\ell^{+(2)}$. Имеем $\|\bar h_v^{+(2)}(\bar w_2) - \bar h_v^{+(1)}(\bar w_2)\| \geqslant \|\bar v_2 - \bar v_1\| - L_1^+\|\bar w_2 - \bar w_1\|$ и $\bar h_u^{+(2)}(\bar w_2) - \bar h_u^{+(1)}(\bar w_2) \le \bar u_2 - \bar u_1 + L_1^+\|\bar w_2 - \bar w_1\|$. Отсюда, так как $\bar\ell^{+(2)}$ выше $\bar\ell^{+(1)}$, то $\bar u_2 - \bar u_1 + L_1^+\|\bar w_2 - \bar w_1\| > 0$ и $\|\bar v_2 - \bar v_1\| \le L_3^+|\bar u_2 - \bar u_1| + L_1^+(1+L_3^+)\|\bar w_2 - \bar w_1\|$. Отсюда получаем, что для доказательства пункта г) достаточно показать, что при условии $dW=0$,

$$\|d\bar v\| \le L_3^+|d\bar u| + L_1^+(1+L_3^+)\|d\bar w\| \tag{4.I4}$$

$$L_1^+\|d\bar w\| + d\bar u > 0 \tag{4.I5}$$

имеет место $\|dv\| \le L_3^+|du|$ и $A_i\, du > 0$. Имеем (см. доказательство пункта в)) $\|d\bar w\| \le N|d\bar u| + (N+N^2)\|d\bar v\|$, откуда и из (4.I4)

$$\|d\bar v\| \le 2L_3^+|d\bar u| \tag{4.I6}$$

и $\|d\bar w\| \le (N+1)|d\bar u|$. Из последнего неравенства и (4.I5) получаем

$$d\bar u > 0 \tag{4.I7}$$

В силу (4.I6), (3.2) $\|\frac{\partial\Phi_i^u}{\partial\bar v}\|\|d\bar v\| < \frac{1}{4}|d\bar u|$, отсюда, так как

$d\bar u = \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial \bar v} d\bar v + \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u} du$, то $\operatorname{sign} d\bar u = (\operatorname{sign} \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}) \cdot \operatorname{sign} du$, откуда и из (4.17) получаем $A_i\, du > 0$. Кроме того, имеем

$$\|d\bar u\| \le \frac{|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}|}{1 - \|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial \bar v}\| \frac{\|d\bar v\|}{\|d\bar u\|}} |du| \le 2 |\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}| |du|,$$

и из (4.16) $\|d\bar v\| \le 4L_3^+ |\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}| |du|$. Теперь, так как $dv = \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \bar v} d\bar v + \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial u} du$, получаем $\|dv\| \le (\bar\sigma)^{\varepsilon}(1 + 4L_3^+ (\bar\sigma)^{\nu})|du| \le L_3^+ |du|$. Лемма доказана.

Лемма 3.3. Пусть $\ell^- \in \mathcal{L}^-$ и пусть в случае $\pi_i > 0$ ℓ^- выше W^s_{loc}, а в случае $\pi_i < 0$ ℓ^- ниже W^s_{loc}. Тогда

а) $\bar\ell_i^- = T_i(\ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi)) \in \mathcal{L}^-$

б) для $P_1 \in \ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi)$, $P_2 \in \ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi)$

$$\operatorname{dist}(P_1, P_2) \le K \operatorname{dist}(\bar P_1, \bar P_2)$$

в) если $\ell^{-(1)} \in \mathcal{L}^-$ и $\ell^{-(2)} \in \mathcal{L}^-$, $\ell^{-(2)}$ выше $\ell^{-(1)}$ и $\operatorname{dist}(\ell^{-(2)}, \ell^{-(1)}) > K\|\Delta\mu\|$, то

при $A_i > 0$ $\bar\ell^{-(2)}_{i,\mu+\Delta\mu} = T_{i,\mu+\Delta\mu}(\ell^{-(2)} \cap T^{-1}_{i,\mu+\Delta\mu}(\Pi)) \le \mathcal{A}^+(\bar\ell^{-(1)}_{i\mu} = T_{i\mu}(\ell^{-(1)} \cap T^{-1}_{i\mu}(\Pi)), L_1^-)$

при $A_i < 0$ $\bar\ell^{-(2)}_{i,\mu+\Delta\mu} \le \mathcal{A}^-(\bar\ell^{-(1)}_{i\mu}, L_1^-)$

и

$$\operatorname{dist}(\bar\ell^{-(2)}_{i,\mu+\Delta\mu}, \bar\ell^{-(1)}_{i\mu}) > \frac{1}{K} \operatorname{dist}(\ell^{-(2)}, \ell^{-(1)}).$$

Доказательство. Прообраз любой поверхности $\bar v = const$ имеет вид $v = \Phi_i^v(u, w, \bar v, \mu)$, то есть задается функцией от (u, w), определенной при всех w, u $(\pi_i u \ge 0)$ и имеющей константу Липшица L_3^+.

По условию леммы получаем, что прообраз пересекается с ℓ^-. Таким образом $\ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi) \ne \emptyset$.

Очевидно, что для того, бы $\bar P(\bar u, \bar v, \bar w) \in T_i(\ell^- \cap T_i^{-1}(\Pi))$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое v, что

$$v = \Phi_i^v(h_u^-(v), h_w^-(v), \bar v, \mu) \qquad (4.18)$$

$$\bar{u} = \Phi_i^u(h_u^-(v), h_w^-(v), \bar{v}, \mu) \tag{4.19}$$

$$\bar{w} = \Phi_i^w(h_u^-(v), h_w^-(v), \bar{v}, \mu) \tag{4.20}$$

По доказанному, уравнение (4.18) имеет по крайней мере одно решение. Отсюда, поскольку $\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial u}\|\|\frac{\partial h_u^-}{\partial v}\| + \|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\|\|\frac{\partial h_w^-}{\partial v}\| \le L_1^-(\bar{\delta})^{\varepsilon}(1+\bar{\delta}) \le \le \frac{1}{2}$, то в силу теоремы о неявной функции из (4.18) v однозначно выражается при любом $\bar{v}$. При этом

$$\|\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\| \le 2\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \bar{v}}\| \le 2(\bar{\delta})^{1+\varepsilon} \tag{4.21}$$

Теперь из (4.19) - (4.21) находим, что из (4.18) - (4.20) $\bar{u}$ и $\bar{w}$ однозначно выражаются при любом $\bar{v}$. При этом

$$\|\frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\| \le \|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial \bar{v}}\| + (\|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\|\|\frac{\partial h_u}{\partial v}\| + \|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w}\|\|\frac{\partial h_w^-}{\partial v}\|)\|\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\| \le N + 1 \le L_1^-$$

$$\|\frac{\partial w}{\partial \bar{v}}\| \le \|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial \bar{v}}\| + (\|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial u}\|\|\frac{\partial h_u^-}{\partial v}\| + \|\frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w}\|\|\frac{\partial h_w^-}{\partial v}\|)\|\frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\| \le N + 1 \le L_1^-$$

Пункт а) доказан. Пункт б) следует из (4.21).

Для доказательства пункта в) возьмем произвольное $\bar{v}$ и рассмотрим две точки $\bar{P}_1(\bar{u}_1, \bar{v}, \bar{w}_1) \in l_{i\mu}^{-(1)}$ и $\bar{P}_2(\bar{u}_2, \bar{v}, \bar{w}_2) \in l_{i,\mu+\Delta\mu}^{-(2)}$. Пусть P_1 и P_2 таковы, что $T_{i\mu}P_1 = \bar{P}_1$, $T_{i,\mu+\Delta\mu}P_2 = \bar{P}_2$. Очевидно, что $|h_u^{-(2)}(v_2) - h_u^{-(1)}(v_2) - (u_2 - u_1)| \le L_1^-\|v_2 - v_1\|$, $\|h_w^{-(2)}(v_2) - h_w^{-(1)}(v_2)\| \ge \|w_2 - w_1\| - L_1^-\|v_2 - v_1\|$. Отсюда по условию пункта в) получаем

$$u_2 - u_1 + L_1^-\|v_2 - v_1\| > K\|\Delta\mu\|, \quad \|w_2 - w_1\| \le L_2^-|u_2 - u_1| + L_1^-(1 + L_2^-)\|v_2 - v_1\|$$

Отсюда очевидно, что для доказательства пункта в) достаточно показать, что при выполнении условий $d\bar{v} = 0$,

$$\|dw\| \le L_2^-|du| + L_1^-(1 + L_2^-)\|dv\| \tag{4.22}$$

$$du + L_1^-\|dv\| > K\|d\mu\| \tag{4.23}$$

имеют место неравенства

$$\|d\bar{w}\| \leq L_1^- \, |d\bar{u}| \tag{4.24}$$

$$A_i \, d\bar{u} > 0 \tag{4.25}$$

$$\|d\bar{u}\| \geq \frac{1}{K}\left(|du| + L_1^- \|dv\|\right) \tag{4.26}$$

Имеем $dv = \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w} dw + \frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \mu} d\mu$. Отсюда и из (4.22) получаем

$$\|dv\| \leq \frac{\left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial u}\right\| + L_2^- \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|}{1 - L_1^-(1+L_2^-)\left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial w}\right\|} |du| + \left\|\frac{\partial \Phi_i^v}{\partial \mu}\right\| \|d\mu\| \leq 2(\bar{\delta})^{\varepsilon} |du| + (\bar{\delta})^{1+\varepsilon} \|d\mu\| \tag{4.27}$$

Из (4.23) и (4.27) находим

$$\|d\mu\| \leq \frac{2}{K} du \tag{4.28}$$

Из (4.28), (4.27) находим

$$\|dv\| \leq 3(\bar{\delta})^{\varepsilon} du \tag{4.29}$$

Из (4.22), (4.28), (4.29) и соотношений $d\bar{u} = \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial w} dw + \frac{\partial \Phi_i^u}{\partial \mu} d\mu$,
$d\bar{w} = \frac{\partial \Phi_i^w}{\partial u} du + \frac{\partial \Phi_i^w}{\partial w} dw + \frac{\partial \Phi_i^w}{\partial \mu} d\mu$ получаем

$$\left(\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right)^{-1} d\bar{u} \geq \frac{du}{2}, \quad \left|\frac{\partial \Phi_i^u}{\partial u}\right|^{-1} \|d\bar{w}\| \leq \left(N + \frac{1}{2}\right) du,$$

откуда и из (4.29), очевидно, следует (4.24) – (4.26). Лемма доказана.

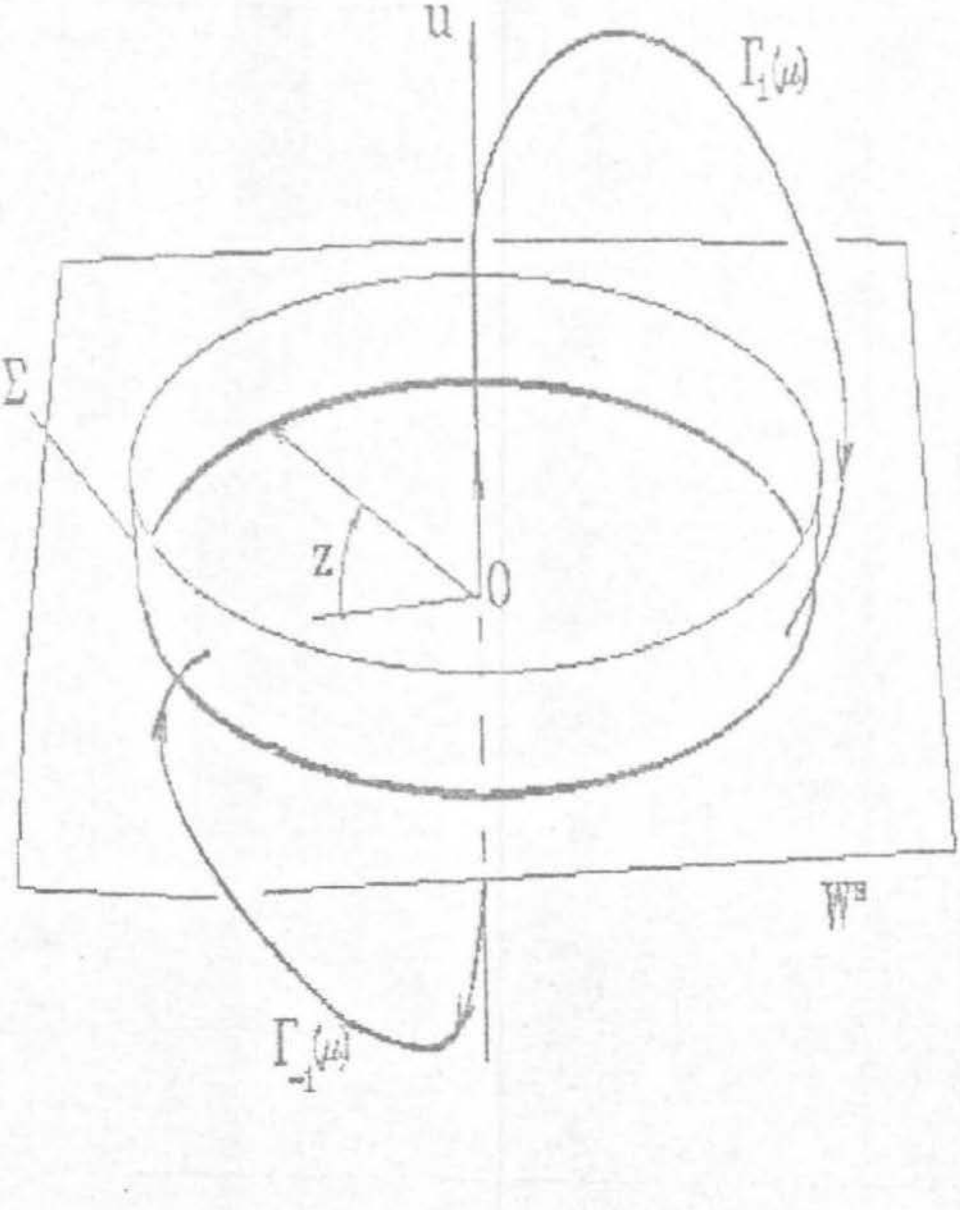


рис. 7

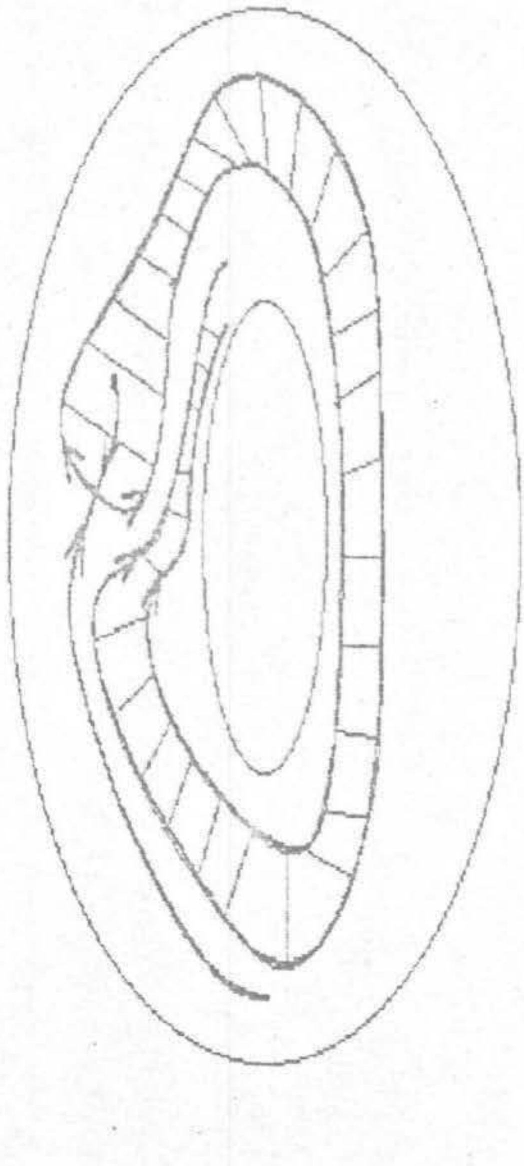
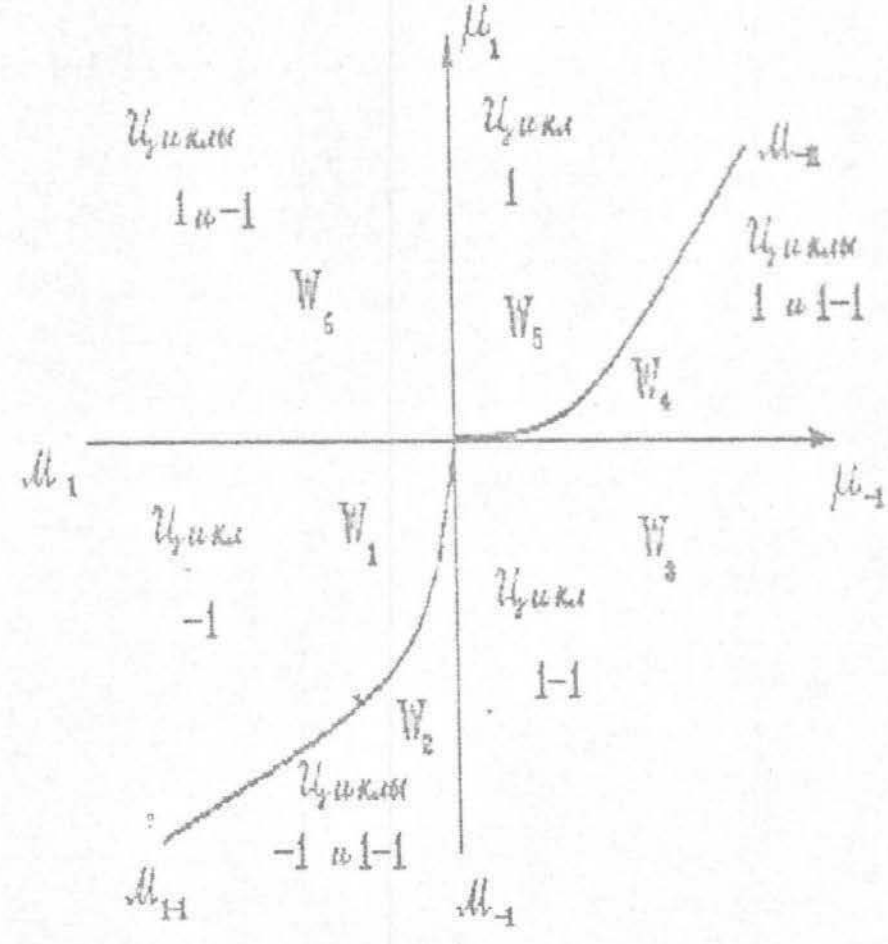
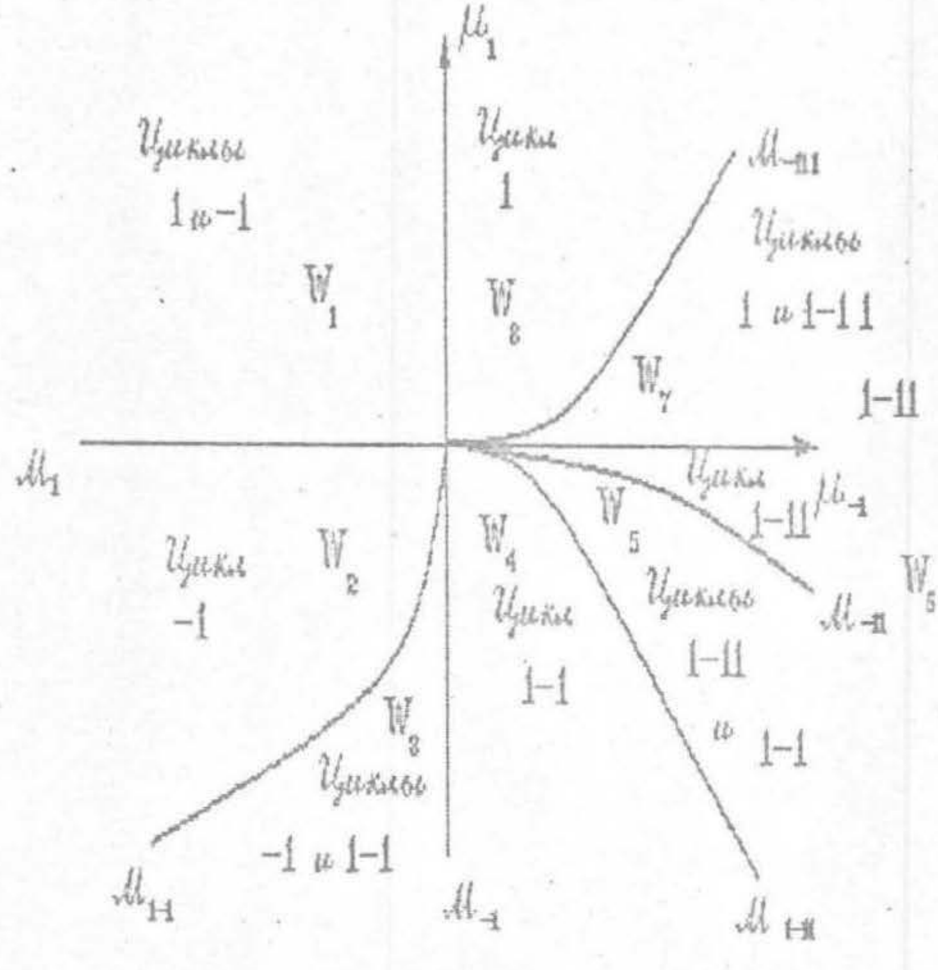


рис. 8



μ_1
Циклы
1 и -1
Цикл
1
Циклы
1 и 1-1
W_6
W_5
W_4
M_1
μ_{-1}
Цикл
-1
W_1
W_3
Цикл
1-1
W_2
Циклы
-1 и 1-1
M_{-1}

рис. 9



μ_1
Циклы
1 и -1
Цикл
1
W_1
W_8
M_{-111}
Циклы
1 и 1-11
W_7
1-11
M_1
Цикл
1-11
μ_{-1}
W_5
W_4
W_2
Цикл
-1
Цикл
1-1
Циклы
1-11
и 1-1
W_6
M_{-11}
W_3
Циклы
-1 и 1-1
M_{11}
M_{-1}
M_{1-11}

рис. 10

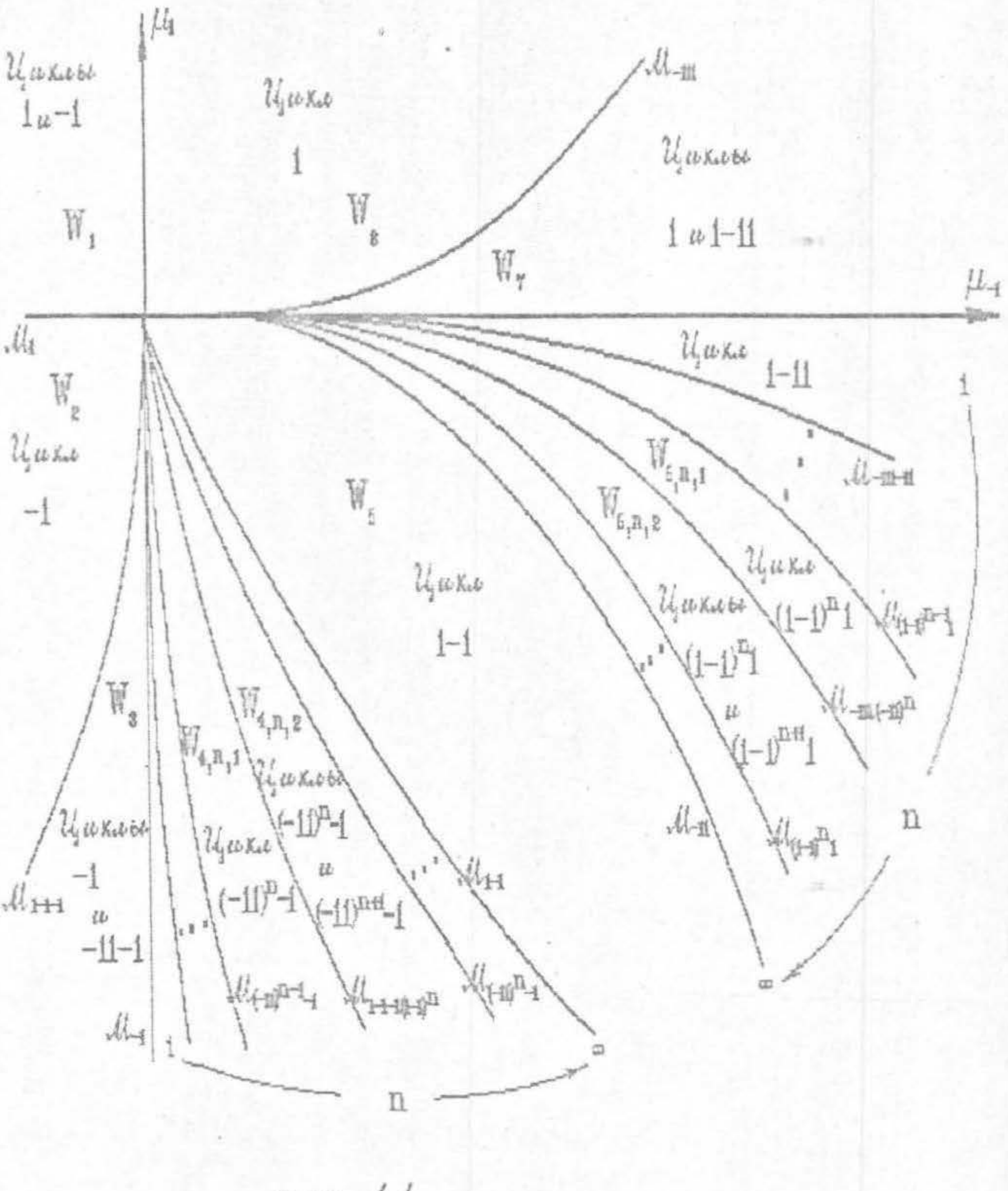

μ1
Циклы
1 и -1
Цикл
1
W1
W8
W7
M-III
Циклы
1 и 1-II
μ-1
M1
W2
Цикл
-1
Цикл
1-II
W5
W5,n,1
W5,n,2
M-III-II
Цикл
1-1
Циклы
Цикл
W3
W4,n,1
W4,n,2
Циклы
Цикл
M-II
M-I-I
M-1
n
n

рис. 11

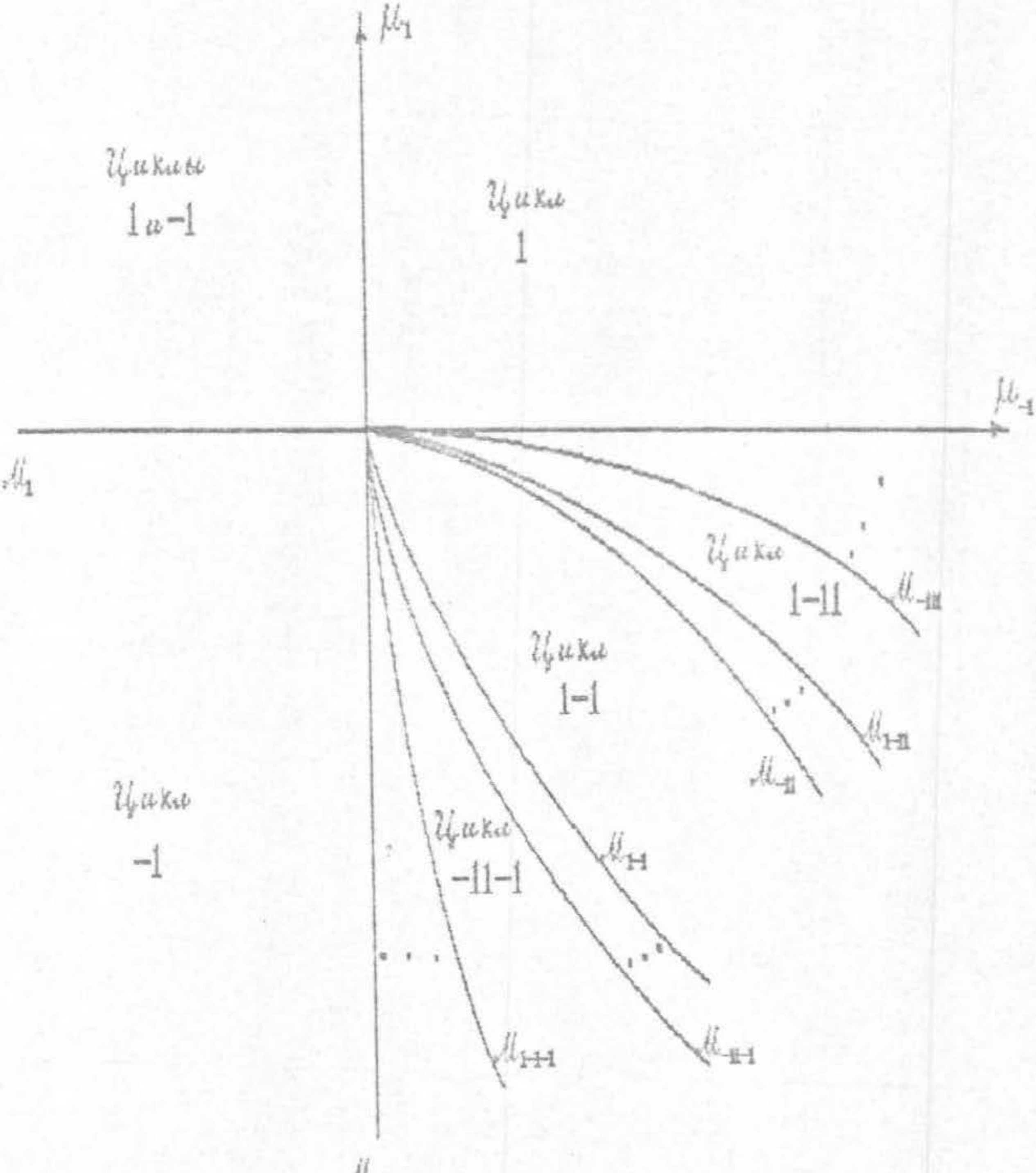

μ_1
μ_{-1}
μ_1
μ_{-1}
Циклы 1 и -1
Цикл 1
Цикл 1-11
Цикл 1-1
Цикл -1
Цикл -11-1
μ_{-111}
μ_{1-11}
μ_{-11}
μ_{1-1}
μ_{-11-1}
μ_{1-1-1}

рис. 12

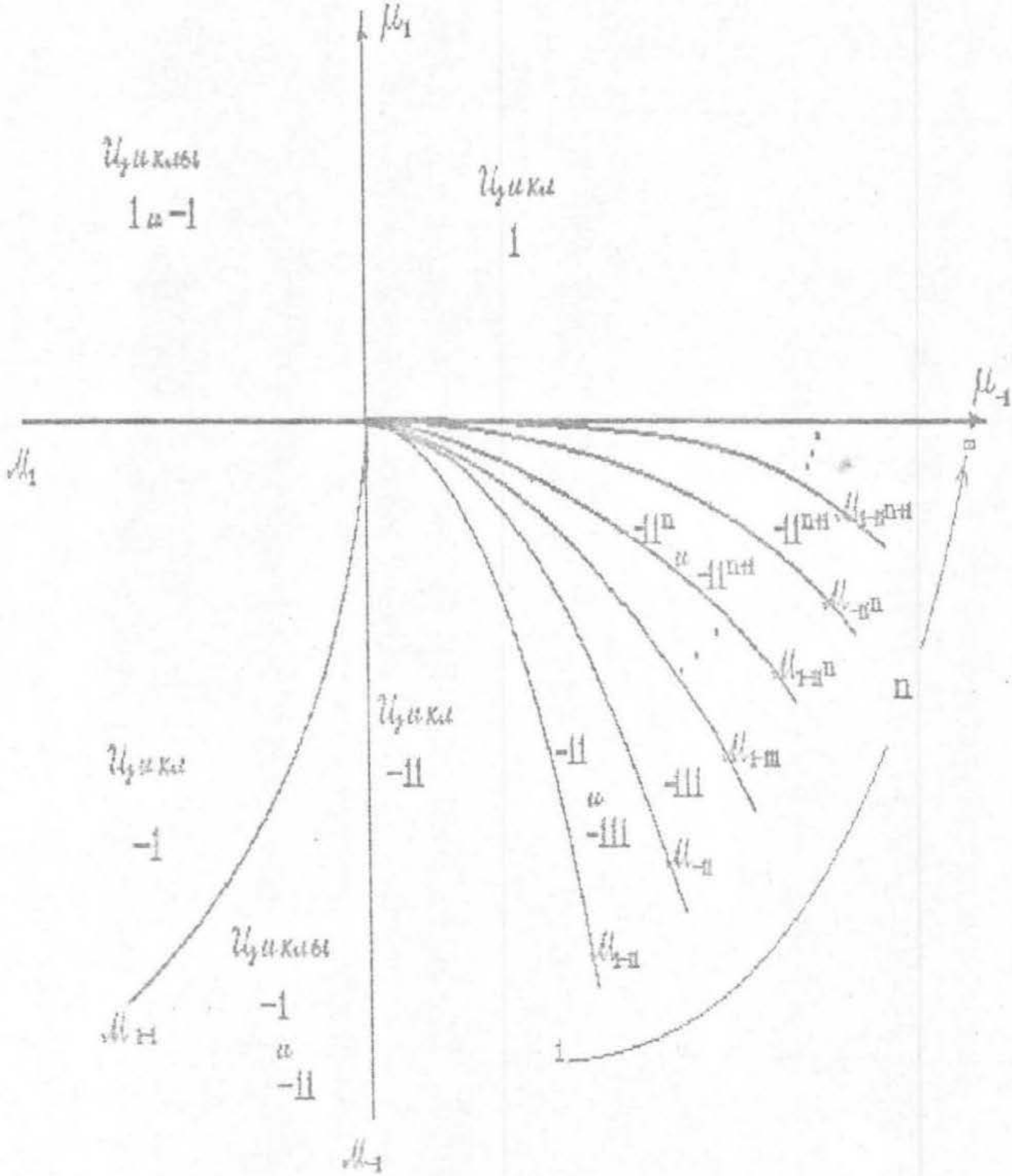


рис. 13

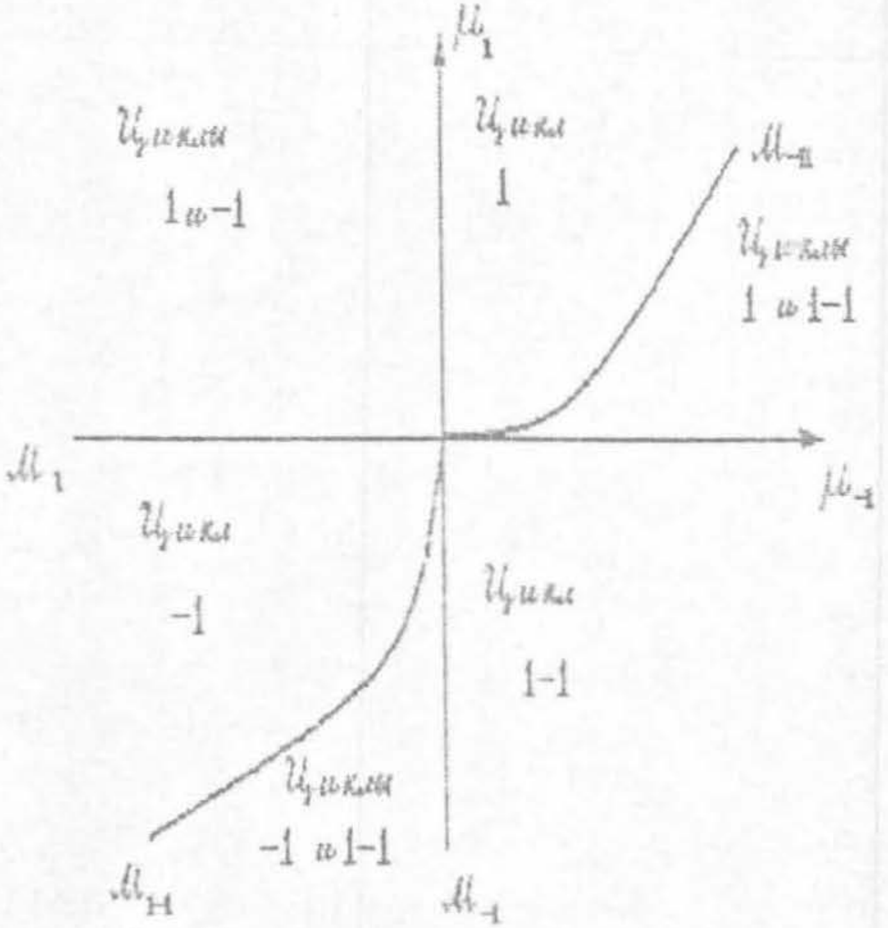

M_1
Циклы
1 и -1
Цикл
1
$M_{-\text{II}}$
Циклы
1 и 1-1
M_1
M_{-1}
Цикл
-1
Цикл
1-1
Циклы
-1 и 1-1
M_{H}
M_{-1}

рис. 14

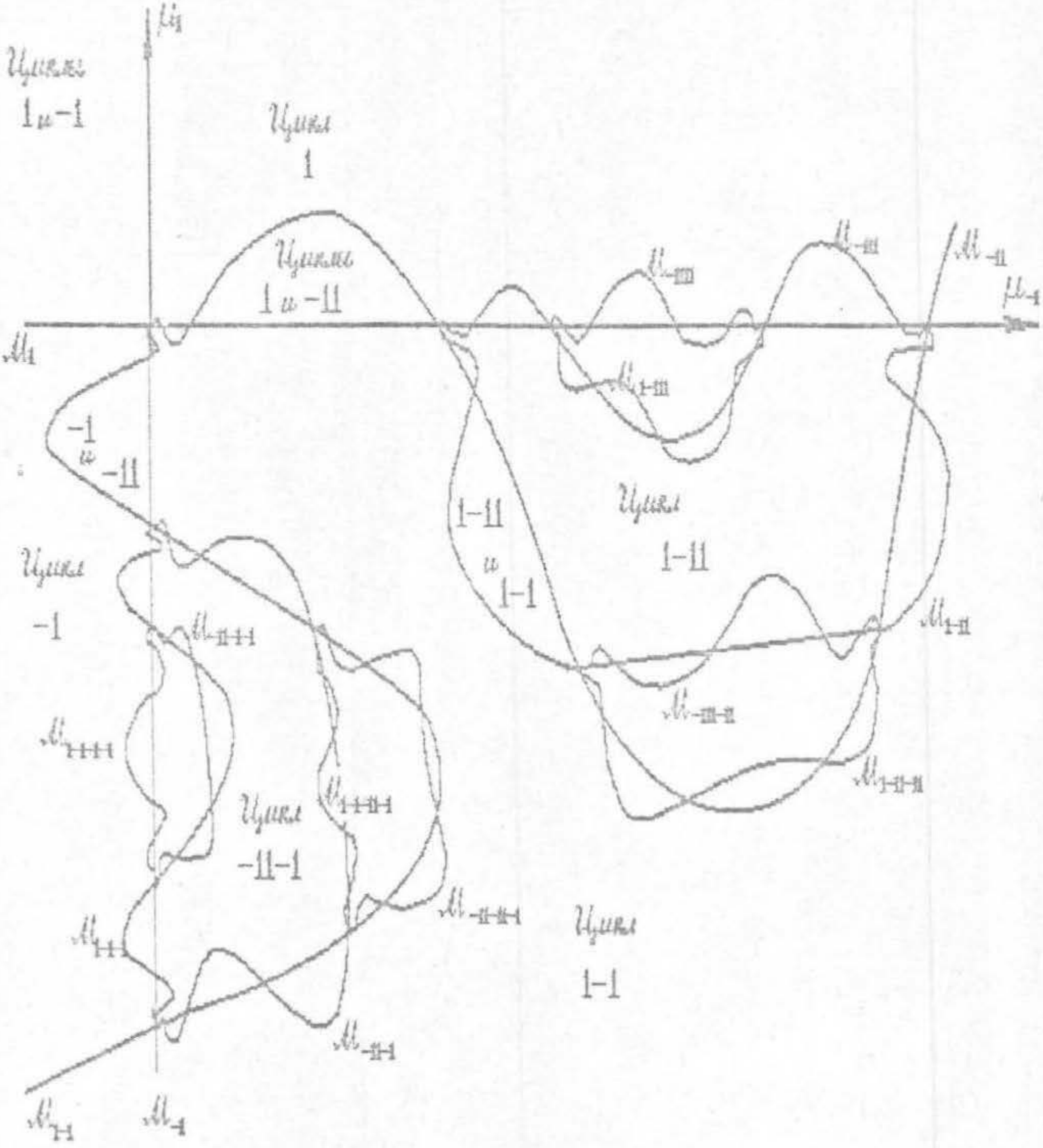
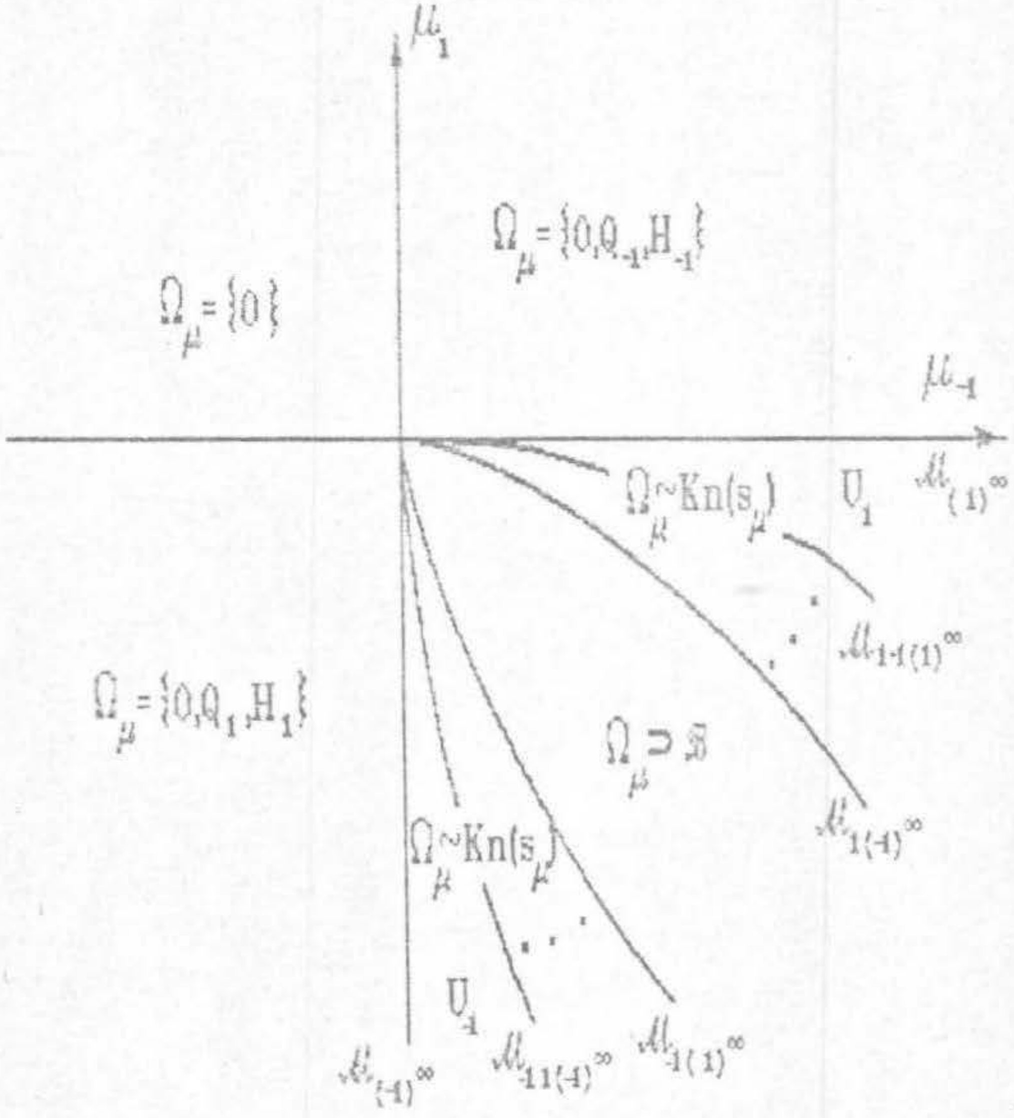


рис. 15



$A_1 > 0$, $A_{-1} > 0$, $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = -1$

рис. 16

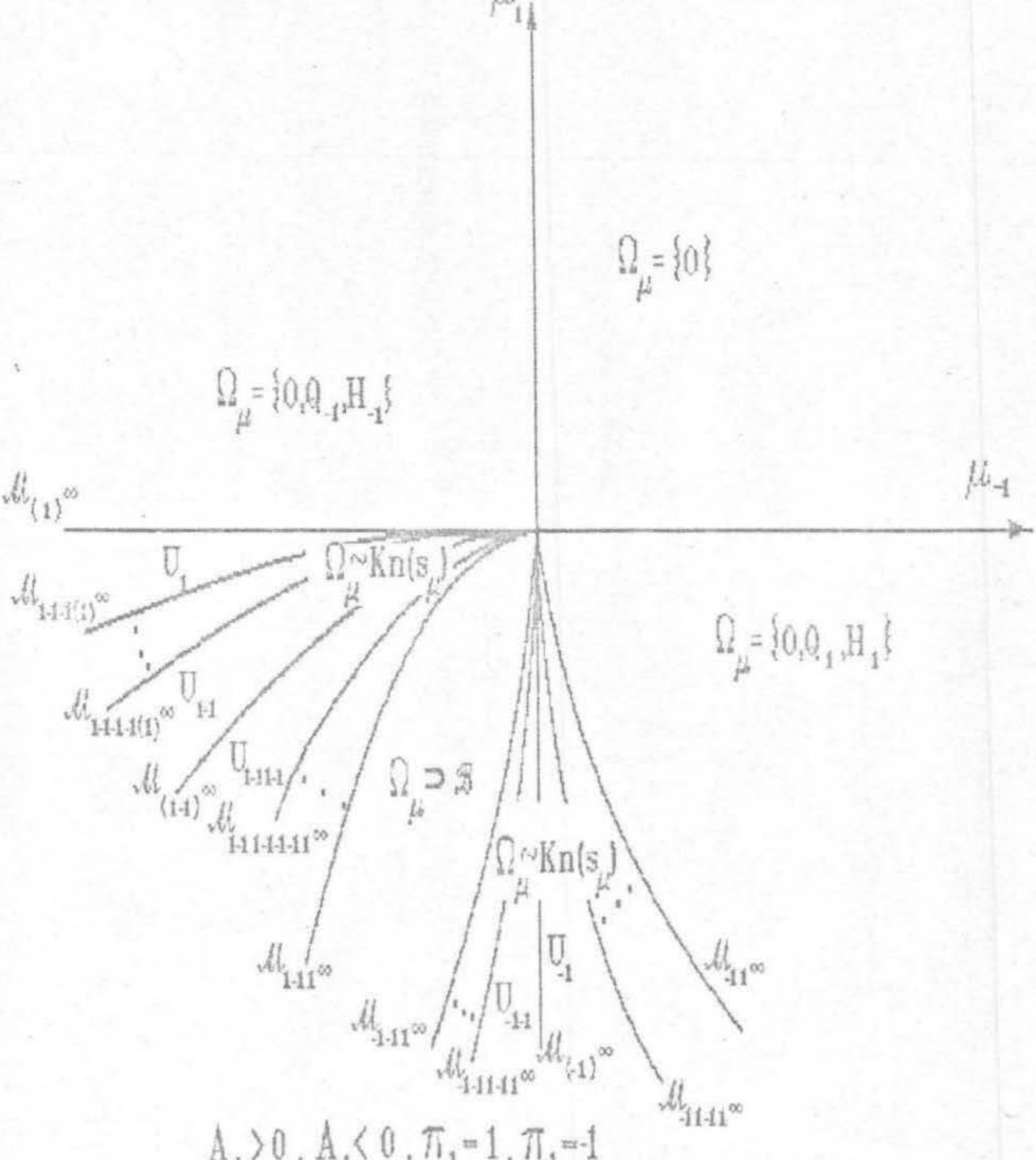
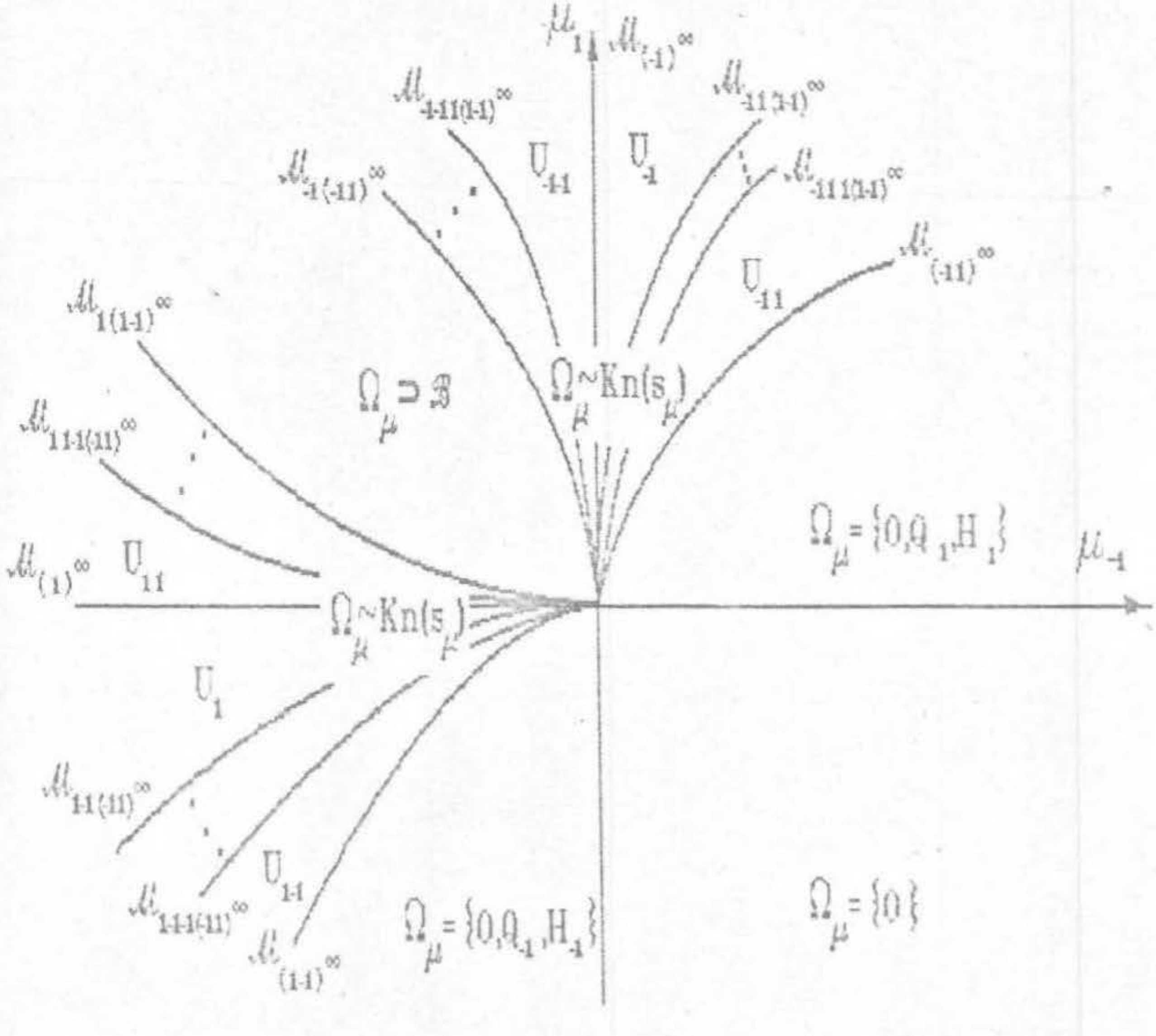
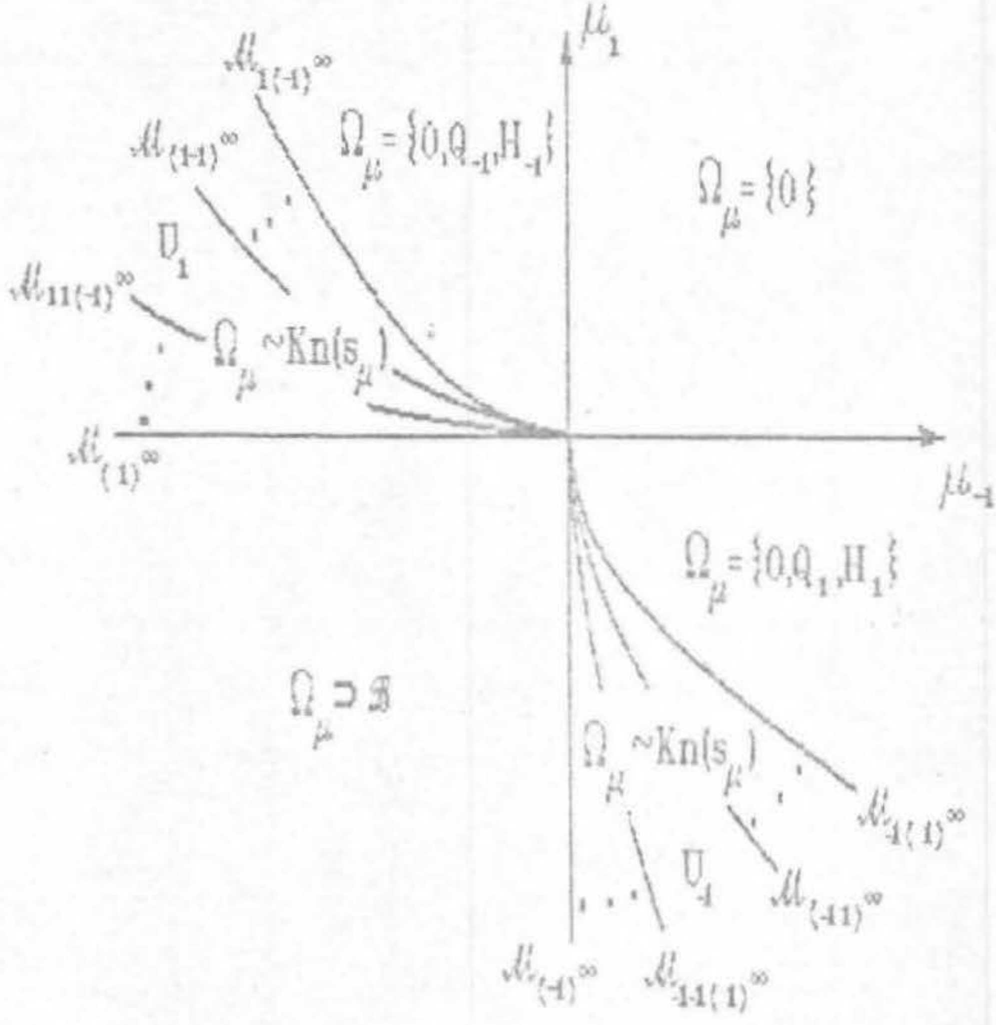

μ_1
μ_{-1}
$\Omega_\mu = \{0\}$
$\Omega_\mu = \{0, Q_{-1}, H_{-1}\}$
$\Omega_\mu = \{0, Q_1, H_1\}$
$\mathcal{M}_{(1)^\infty}$
U_1
$\Omega_\mu \sim Kn(s_\mu)$
$\mathcal{M}_{1\text{-}1\text{-}1(1)^\infty}$
$\mathcal{M}_{1\text{-}1\text{-}1\text{-}1(1)^\infty}$
$U_{1\text{-}1}$
$U_{1\text{-}1\text{-}1\text{-}1}$
$\mathcal{M}_{(1\text{-}1)^\infty}$
$\mathcal{M}_{1\text{-}1\text{-}1\text{-}1\text{-}1\text{-}1\text{-}1\text{-}1^\infty}$
$\Omega_\mu \supset \mathcal{S}$
$\mathcal{M}_{1\text{-}1\text{-}1^\infty}$
U_{-1}
$U_{-1\text{-}1}$
$\mathcal{M}_{-1\text{-}1\text{-}1^\infty}$
$\mathcal{M}_{-1\text{-}1\text{-}1\text{-}1\text{-}1^\infty}$
$\mathcal{M}_{(-1)^\infty}$
$\mathcal{M}_{-1\text{-}1^\infty}$
$\mathcal{M}_{-1\text{-}1\text{-}1\text{-}1^\infty}$
$A_1 > 0,\ A_{-1} < 0,\ \pi_1 = 1,\ \pi_{-1} = -1$

рис. 17



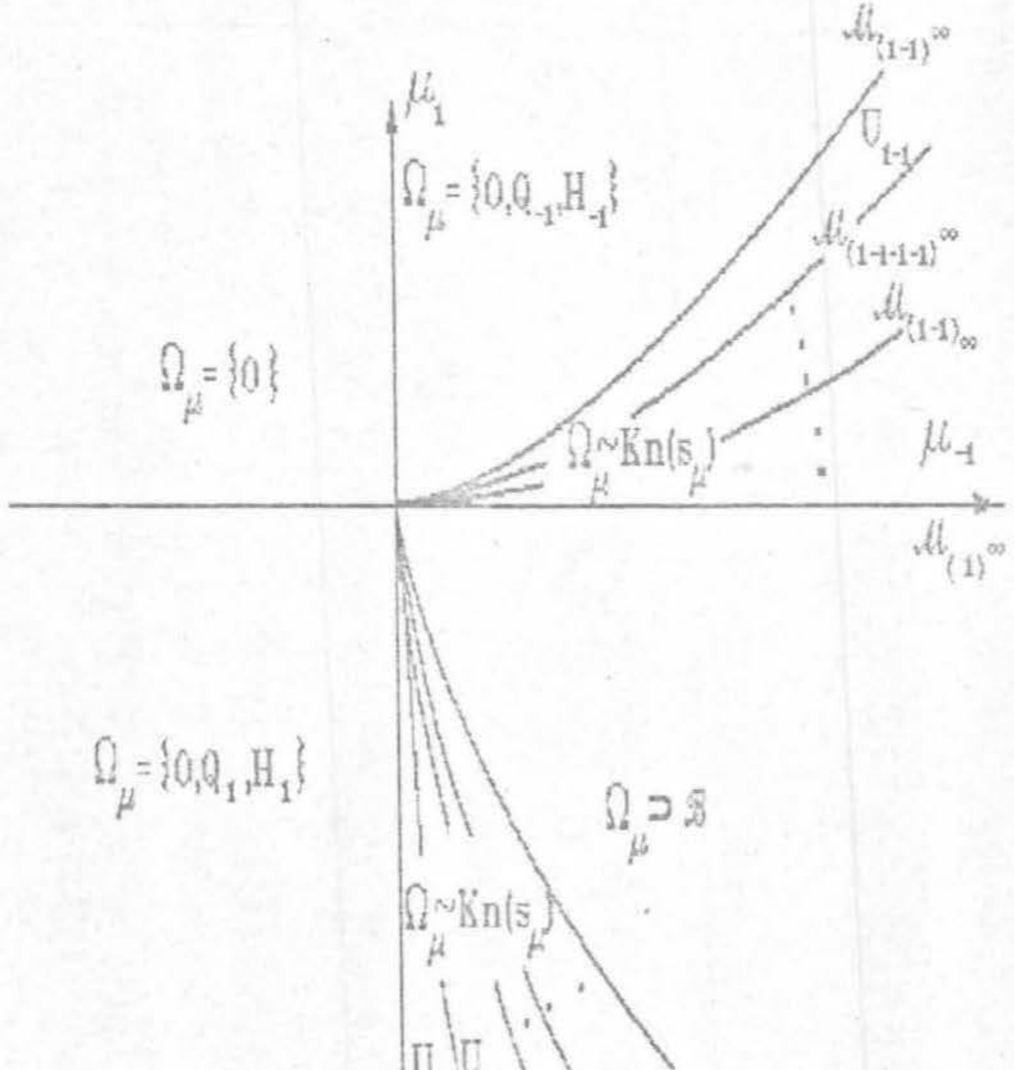
$A_1 < 0,\ A_{-1} < 0,\ \pi_1 = 1,\ \pi_{-1} = -1$

рис. 18



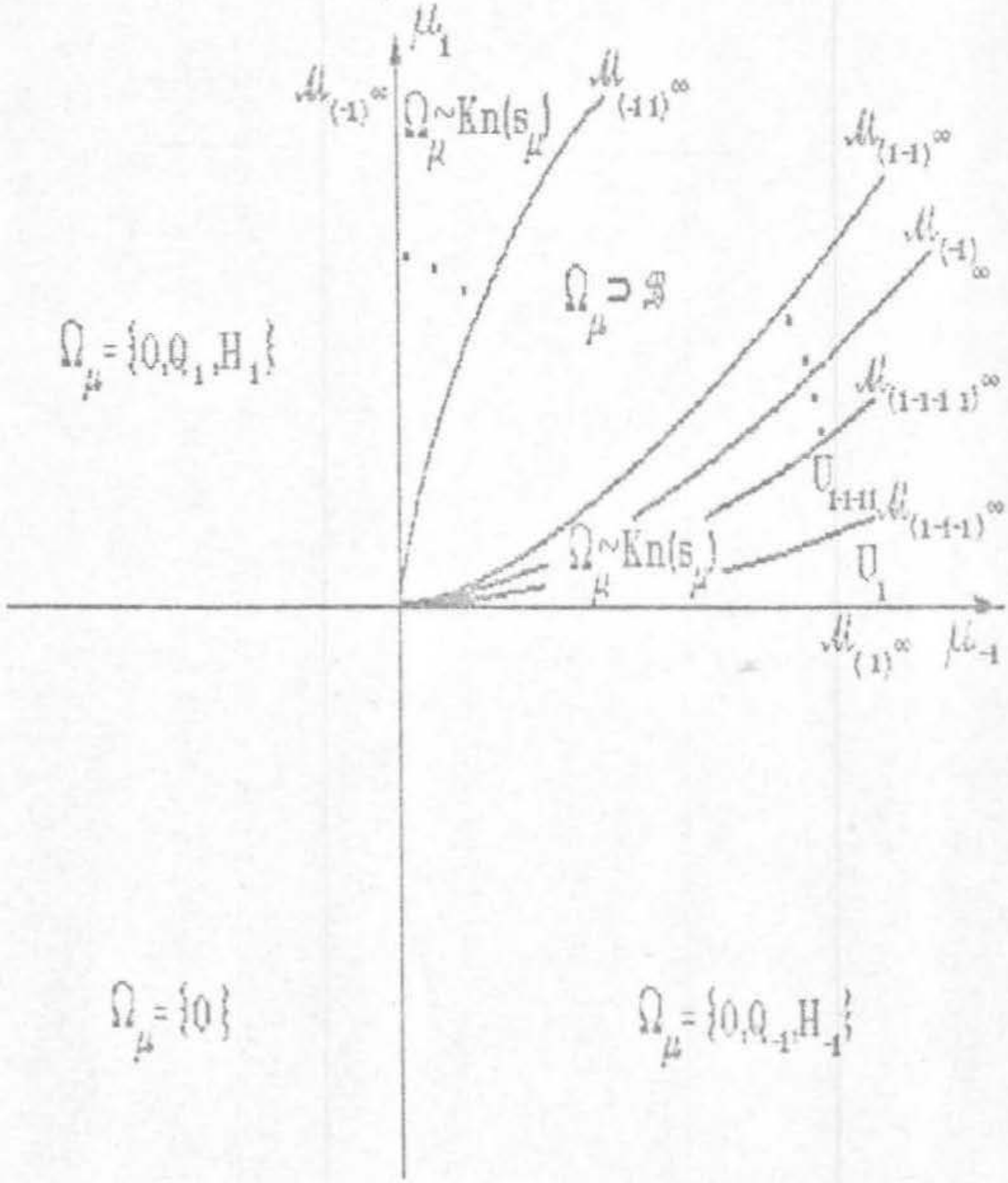
$A_1 > 0,\ A_{-1} > 0,\ \pi_1 = 1,\ \pi_{-1} = 1$.

рис. 19



$A_1 > 0$, $A_{-1} < 0$, $\pi_1 = 1$, $\pi_{-1} = 1$

рис. 20



$A_1 < 0,\ A_{-1} < 0,\ \pi_1 = 1,\ \pi_{-1} = 1$

рис. 21

ЛИТЕРАТУРА

1. Шильников Л.П. О некоторых случаях рождения периодических движений из особых траекторий, Матем.сб., т.61, вып.4, 1963.

2. Шильников Л.П. О рождении периодического движения из траектории, двоякоасимптотической к состоянию равновесия типа седло, Матем.сб., т.77, N3, 1968.

3. Шильников Л.П. Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа, Матем.сб., т.74, вып.3, 1967.

4. Шильников Л.П. К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус, Матем.сб., т.81, N1, 1970.

5. E.N.Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, J.Atmos.Sci., 20(1963)

6. В.С.Афраймович, В.В.Быков, Л.П.Шильников. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. ДАН СССР, 1977, 234, N2.

7. В.Н.Белых, О бифуркациях сепаратрис седла системы Лоренца. Дифф.ур-я, 1984, т.20, N10.

8. Rubenfeld L.A., Siegman W.L., Nonlinear dynamic theory for a double-diffusive convection model. SIAM J.Appl.Mat., 1977, v.32

9. Varandos C.A.F., Mendouca J.T., The transition to turbulence of a beam plasma system, Intern.conf. on plasma physics: proc. contr. papers, Kiev, 1987, v.2

10. Yorke J.A., Yorke E.D., Chaotic behavior and hydrodynamics. In: Hydr.Inst. and Trans. to Turbulence. Ed. by J.Gollub, Springer, Berlin, 1981.

11. E.N.Lorenz, The mechanics of vacillations, J.Atmos.Sci., v.20, N5, 1963.

12. Д. М. Сонечкин, Стохастичность в моделях общей циркуляции атмосферы, Ленинград, Гидрометеоиздат, 1984

13. Закс М. А., Любимов Д. В., О возможном механизме накопления бифуркаций в конечномерной аппроксимации уравнений конвекции, В сб. "Бифуркационные переходы в задачах теории гидродинамической устойчивости, Свердловск, Инст. Мех. Спл. Сред СО АН СССР, 1982

14. В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца. Тр. ММО, т. 44, 1982.

15. J.-M. Gambaudo, P. Glendinning, C. Tresser, Collage de cycles et suites de Farey, Comptes Rendus, 299, s. 1, 1984.

16. J.-M. Gambaudo, P. Glendinning, C. Tresser, The gluing bifurcation: 1. Symbolic dynamics on the closed curves, Nonlinearity, 1, 1988.

17. А. Н. Баутин, Качественное исследование одной нелинейной системы, ПММ, 1975, 39:4.

18. А. Д. Морозов, Е. Л. Федоров, Об автоколебаниях в двумерных динамических системах, близких к гамильтоновым, ПММ, 1979, 43:4.

19. А. С. Дмитриев, В. Я. Кислов, Стохастические колебания в радиофизике и электронике, М., Наука, 1989.

20. Robbins K. A., A new approach to subcritical instability and turbulent transitions of a simple dynamo, Math. Proc. of Camb. Phys. Soc., 1977, v. 82(2).

21. Симонов А. А., Исследование бифуркаций в некоторых динамических системах методами символической динамики. , ДАН СССР , 1978, т. 240, в. 6.

22. Симонов А. А., Исследование бифуркаций в некоторых динамических системах методами символической динамики. , Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Москва, 1978.

23. Cherry T.M., Analytic quasi-periodic curves of discontinues type on a torus, Proc. Lond. Math. Soc., 1837, 2:54.

24. Hirsh M.W., Pugh C.C., Shub M., Invariant manifolds, Lect. Notes Math., 1977, 583.

25. Арнольд В.И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

26. Афраймович В.С., О гладких заменах переменных, в сб. "Методы качественной теории дифференциальных уравнений", Горький, 1984.

27. Самовол В.С., Эквивалентность систем дифференциальных уравнений в окрестности особой точки. Тр. ММО, 1982, т. 44.

28. Овсянников И.М., Шильников Л.П., О системах с гомоклинической кривой седлофокуса, Матем. Сб., т. 130(172), 1986, вып. 4.

29. Леонов Н.Н., О точечном преобразовании прямой в прямую, Радиофизика, 1959, т. 2, N6.

30. Арансон С.Х., Жужома Е.В., Малкин М.И., О взаимосвязи между гладкими и топологическими свойствами преобразований окружности (реоремы типа Данжуа), Горький, 1984 (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1984 N3052-84 Деп.).

31. С.Х. Арансон, О проблеме серых ячеек, Мат. заметки, т. 47, вып. 1, 1990.

32. Hardy G.H., Wright E.M., An introduction to the theory of numbers, 5th ed., Oxford Univ. Press, 1979.

33. Rand D., The topological classification of Lorenz attractors., Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1978, 83, N3.

34. Williams R.F., The structure of Lorenz attractors, Lecture Notes in Mathematics, 1977, 615.

35. Малкин М.И., О топологической сопряженности разрывных отображений отрезка, УМЖ, 1980, т. 32, N5.

36. Симонов А.А., Исследование кусочно-монотонных преобразований интервала методами символической динамики., ДАН СССР, 1977, 234, N2.

37. Milnor J., Thurston W., On iterated maps of the interval, Princeton University, 1977, preprint.

38. Тураев Д.В., Бифуркации двумерных динамических систем, близких к системе с двумя петлями сепаратрис, УМН, 1985, т.40, вып.2

39. Тураев Д.В., Об одном случае бифуркаций контура, образованного двумя гомоклиническими кривыми седла, в сб. "Методы качественной теории дифференциальных уравнений", Горький, 1984.

40. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла с отрицательной седловой величиной, ДАН СССР, 1986, т.290, N6.

41. Тураев Д.В., О бифуркациях гомоклинической восьмерки многомерного седла, УМН, 1988, т.43, вып.5.

42. Тураев Д.В., Бифуркации двумерных динамических систем, близких к системе с двумя петлями сепаратрис, Материалы XXII Всесоюзной студенческой конференции, Новосибирск.

43. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла с отрицательной седловой величиной, Всесоюзная конференция "Современные вопросы механики и технологии машиностроения", Тезисы докладов, Москва, 1986.

44. Тураев Д.В., Шильников Л.П., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла, VI Всесоюзная конференция по КТДУ, тезисы докладов, Иркутск, 1986.

45. Тураев Д.В., О бифуркациях гомоклинической восьмерки седла, Всесоюзная конференция "Нелинейные колебания механических систем", Горький, 1987.

46. Тураев Д.В., О бифуркациях гомоклинической вось

многомерного седла, VII Всесоюзная конференция по КТДУ, тезисы докладов, Рига. 1989.

47. В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, Об особых множествах систем Морса-Смейла, Тр. ММО, т. 28, 1973.

48. Haken H., Analogy between hihgek instabilities in fluid and lasers, Phys. Lett., 1975, v. 53 A.