

Approximation von  
Attraktoren und Mannigfaltigkeiten  
nichtautonomer Systeme

Diplomarbeit  
im Studiengang Diplom-Mathematik  
von  
Martin Rasmussen

eingereicht  
beim Institut für Mathematik  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Universität Augsburg  
Juli 2002

Erstgutachter: Prof. Dr. Bernd Aulbach  
Zweitgutachter: Dr. Stefan Siegmund



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Notation und grundlegende Definitionen . . . . .	5
1.2 Differenzgleichungen . . . . .	7
1.3 Gewöhnliche Differenzialgleichungen . . . . .	11
1.4 Dynamische Systeme . . . . .	15
1.5 Nichtautonome dynamische Systeme . . . . .	16
<b>2 Attraktoren</b>	<b>21</b>
2.1 Autonome Attraktoren . . . . .	21
2.2 Nichtautonome Attraktoren . . . . .	25
<b>3 Numerische Approximation von Pullback-Attraktoren</b>	<b>33</b>
3.1 Der Fortsetzungsalgorithmus . . . . .	33
3.2 Konvergenz des Fortsetzungsalgorithmus . . . . .	37
3.3 Der Unterteilungsalgorithmus . . . . .	44
<b>4 Realisierung der Approximation mit GAIO</b>	<b>51</b>
4.1 Grundlegendes zu GAIO . . . . .	51
4.1.1 Das Objekt „Modell“ . . . . .	53
4.1.2 Das Objekt „Integrator“ . . . . .	54
4.1.3 Das Objekt „Punkte“ . . . . .	54
4.1.4 Das Objekt „Baum“ . . . . .	55
4.2 Implementierung des Unterteilungsalgorithmus . . . . .	57
4.2.1 Implementierung im erweiterten Phasenraum . . . . .	57
4.2.2 Implementierung im Phasenraum . . . . .	61

<b>5</b>	<b>Theorie der nichtautonomen Mannigfaltigkeiten</b>	<b>65</b>
5.1	Quasibeschränkte Funktionen . . . . .	65
5.2	Nichtautonome Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen . . . . .	66
5.2.1	Hauptsatz über invariante Faserbündel . . . . .	67
5.2.2	Faserung des erweiterten Phasenraums . . . . .	69
5.3	Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen	73
5.4	Nichtautonome Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen . . . . .	76
5.4.1	Hauptsatz über Integralmannigfaltigkeiten . . . . .	76
5.4.2	Faserung des erweiterten Phasenraums . . . . .	78
5.5	Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen	81
<b>6</b>	<b>Approximation nichtautonomer Mannigfaltigkeiten</b>	<b>83</b>
6.1	Approximation stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten . . . . .	84
6.2	Approximation sämtlicher Mannigfaltigkeiten durch Spektraltransformatio- nen . . . . .	91
6.3	Anwendbarkeit der Theorie bei Nicht-Standardsystemen . . . . .	96
6.3.1	Systeme von Differenzgleichungen mit gekoppeltem Linearteil . . .	96
6.3.2	Systeme von Differenzialgleichungen mit gekoppeltem Linearteil . . .	102
6.3.3	Verwendung von Abschneidetechniken . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Beispiele</b>	<b>111</b>
7.1	Approximation einer stark stabilen Mannigfaltigkeit des Lorenz-Systems . .	111
7.2	Verzweigung nichtautonomer Attraktoren bei der Duffing-van-der-Pol- Gleichung . . . . .	113
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>115</b>
	<b>Index</b>	<b>119</b>

# Einleitung

Dynamische Systeme erfreuen sich seit Jahrzehnten zunehmender Beliebtheit. Nicht zuletzt ist dies der reichhaltigen Anwendbarkeit der Theorie in den verschiedensten Disziplinen wie beispielsweise der Physik, Biologie und Ökonomie zu verdanken. Bestimmte reale Vorgänge werden hierbei durch das dynamische System modelliert. Das dynamische System beschreibt die zeitliche Entwicklung eines Zustandes. Der Zustand, in dem sich ein System befindet, ist durch einen Punkt im Phasenraum charakterisiert. Man unterscheidet grundsätzlich zwischen kontinuierlichen und diskreten dynamischen Systemen. Erstere haben ihren Ursprung in der Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen, wohingegen sich letztere aus den Studien über Iterationen von Selbstabbildungen entwickelt haben.

Bei der mathematischen Analyse dynamischer Systeme spielen invariante Mengen eine große Rolle. Invariante Mengen sind Teilmengen des Phasenraums, die unter der Zeitentwicklung als Ganzes konstant bleiben. Eine wichtige Klasse der invarianten Mengen sind *Attraktoren*. Attraktoren haben die Eigenschaft, dass sie auf gewisse Zustände anziehend wirken. Sie spielen bei der Langzeitanalyse dynamischer Systeme eine große Rolle, da sich die „Zukunft“ des Systems in ihrer Nähe abspielt. Eine große Bedeutung haben in den letzten Jahrzehnten auch die *invarianten Mannigfaltigkeiten* erlangt. In der Theorie der invarianten Mannigfaltigkeiten werden Teilmengen des Phasenraums nach ihrem Wachstumsverhalten klassifiziert.

Häufig sind dynamische Systeme nicht allgemein genug zur Beschreibung von zeitlichen Prozessen. Dies ist dann der Fall, wenn es einen Unterschied im Hinblick auf die zukünftige Entwicklung macht, *wann* sich ein System in einem bestimmten Zustand befindet. Man spricht in diesem Zusammenhang von nichtautonomen Problemstellungen. An die Stelle des dynamischen Systems tritt das nichtautonome dynamische System. Viele autonome Begriffe sind bereits auf die nichtautonome Situation erweitert worden. So gibt es beispielsweise nichtautonome Attraktoren und nichtautonome invariante Mannigfaltigkeiten.

Das Hauptziel dieser Diplomarbeit ist die Herleitung theoretischer Resultate zur Approximation nichtautonomer Attraktoren und nichtautonomer Mannigfaltigkeiten sowie die praktische Durchführung der Berechnungen mit dem Computerprogramm GAIO. Hierzu wurde eine Gliederung in die folgenden sieben Kapitel vorgenommen:

- Im ersten Kapitel besprechen wir grundlegende Eigenschaften von Differenzen- und Differenzialgleichungen, dynamischen Systemen und nichtautonomen dynamischen Systemen. Wie wir sehen werden, sind (nichtautonome) Differenzen- und Differenzialgleichungen spezielle (nichtautonome) dynamische Systeme.
- Das zweite Kapitel ist der Definition und Herleitung von Eigenschaften von Attraktoren gewidmet. Wir verzichten dabei auf die klassische Forderung der Kompaktheit eines Attraktors und untersuchen, welche Zusatzvoraussetzungen an einen Attraktor

eine sinnvolle Begriffsbildung ermöglichen. Die erstmals in dieser Arbeit formulierte Eigenschaft der kompakten Erzeugbarkeit wird sich hierbei als geeignet erweisen.

- Im dritten Kapitel behandeln wir zwei Algorithmen zur Approximation von Attraktoren. Die Entwicklung des Fortsetzungs- und Unterteilungsalgorithmus geht im autonomen Kontext ursprünglich auf DELLNITZ, HOHMANN [16, 17] zurück. Eine nicht-autonome Variante des Fortsetzungsalgorithmus wird erstmals in KELLER, OCHS [24] diskutiert. Von dieser Arbeit profitieren wir beim Nachweis der Konvergenz der beiden Algorithmen.
- Im vierten Kapitel beschäftigen wir uns mit Details zur Implementierung der Algorithmen mit dem Computerprogramm GAIO. Hierbei stellen wir kurz das Programm vor und diskutieren zwei verschiedene Ansätze zur Integration der nichtautonomen Situation in das Softwarepaket.
- Im fünften Kapitel zitieren wir Existenzresultate für nichtautonome Mannigfaltigkeiten von nichtautonomen Differenzen- und Differenzialgleichungen aus der Literatur und passen sie an unsere Bedürfnisse an.
- Im sechsten Kapitel widmen wir uns der numerischen Approximation der im fünften Kapitel eingeführten Mannigfaltigkeiten. Hierbei nutzen wir die Theorie zur Berechnung von Attraktoren aus dem dritten Kapitel, indem wir Zusammenhänge zwischen den invarianten Mannigfaltigkeiten und Attraktoren transformierter Systeme aufzeigen. Überdies beschäftigt uns die Fragestellung nach der Approximierbarkeit invarianter Mannigfaltigkeiten für Systeme, die nicht den Voraussetzungen aus dem fünften Kapitel genügen.
- Im letzten Kapitel dieser Diplomarbeit betrachten wir zwei populäre Beispiele aus der Theorie der dynamischen Systeme. Für das Lorenz-System berechnen wir eine stabile und eine stark stabile Mannigfaltigkeit. Bei der periodisch angeregten Duffing-van-der-Pol-Gleichung weisen wir numerisch eine Verzweigung nichtautonomer Attraktoren nach.

Danksagen möchte ich Prof. Dr. Bernd Aulbach und Dr. Stefan Siegmund für die Vergabe des Themas und die fruchtbare Zusammenarbeit während der Zeit der Diplomarbeit. Darüber hinaus danke ich Dr. Christian Pötzsche und Thomas Sienz für das Korrekturlesen und für wertvolle Anregungen, sowie Dipl. Math. Bernd Kieninger für eine Einführung in  $\text{\LaTeX}$ . Ferner stand mir Dipl. Math. Albert Marquardt bei der langwierigen Installation von GAIO auf dem Betriebssystem IBM RS/6000 AIX 4.3 hilfreich zur Seite. Für die Korrektur des Kapitels über GAIO bin ich Dr. Oliver Junge zu Dank verpflichtet.

Die zweidimensionalen Grafiken wurden in dieser Diplomarbeit mit dem Mathematikprogramm MATLAB erstellt. Für dreidimensionale Visualisierungen wurde das Grafikprogramm GRAPE des Sonderforschungsbereichs „Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen“ der Universität Bonn verwendet.

# Kapitel 1

## Grundlagen

In diesem ersten Kapitel führen wir Begriffe ein, die für das Verständnis dieser Arbeit notwendig sind. Hierbei gehen wir in Abschnitt 1.1 kurz auf die hier verwendete Notation und auf grundlegende Definitionen in metrischen und euklidischen Räumen ein. Die nächsten vier Abschnitte 1.2 bis 1.5 geben einen Einblick in wichtige Resultate aus den Bereichen Differenzgleichungen, gewöhnliche Differentialgleichungen, dynamische Systeme und nichtautonome dynamische Systeme.

### 1.1 Notation und grundlegende Definitionen

Wie allgemein üblich bezeichnen wir mit  $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$  die natürlichen Zahlen, mit  $\mathbb{Z} := \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$  die ganzen Zahlen und mit  $\mathbb{R}$  die reellen Zahlen. Mit  $\mathbb{Z}_0^+$  und  $\mathbb{R}_0^+$  beschreiben wir die Menge der nichtnegativen ganzen und reellen Zahlen. Ein (offenes)  $\mathbb{T}$ -Intervall ( $\mathbb{T} = \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+$ ) ist eine Menge, die Durchschnitt eines (offenen) reellen Intervalls mit der Menge  $\mathbb{T}$  ist.

Für die folgenden Definitionen setzen wir einen metrischen Raum  $(X, d)$  voraus. Für ein  $\varepsilon > 0$  ist die  $\varepsilon$ -Umgebung eines Punktes  $x_0 \in X$  durch

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\}$$

gegeben. Die  $\varepsilon$ -Umgebung einer nichtleeren Menge  $A \subset X$  definieren wir durch

$$U_\varepsilon(A) := \bigcup_{a \in A} U_\varepsilon(a).$$

Das Innere einer Menge  $A \subset X$  bezeichnen wir mit  $\text{int } A$ . Für den Abschluss von  $A$  schreiben wir  $\overline{A}$ . Den Durchmesser einer nichtleeren Menge  $A \subset X$  definieren wir durch  $\text{diam } A := \sup \{d(x, y) : x, y \in A\}$ .

Für zwei nichtleere und abgeschlossene Mengen  $A, B \subset X$  definieren wir folgende Abstandsfunktionen:

- Der Abstand eines Punktes  $x \in X$  zu der Menge  $A$  ist erklärt durch

$$d(x, A) := \inf \{d(x, y) : y \in A\}.$$

- Der Hausdorff-Semiabstand der Menge  $A$  zur Menge  $B$  ist durch

$$d(A|B) := \sup \{d(x, B) : x \in A\}$$

gegeben. Hierbei ist auch der Fall  $d(A|B) = \infty$  zugelassen.

- Der Hausdorff-Abstand der Mengen  $A$  und  $B$  ist definiert durch

$$d_H(A, B) := \max \{d(A|B), d(B|A)\}.$$

Das folgende Lemma besagt, dass die Abstandsfunktion, die den Abstand der Punkte aus  $X$  zu einer fest vorgegebenen Menge beschreibt, Lipschitz-stetig ist.

**1.1.1 Lemma:** *Ist  $A$  eine nichtleere und abgeschlossene Teilmenge des metrischen Raums  $X$ , so genügt die Funktion  $d(\cdot, A) : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  einer globalen Lipschitz-Bedingung der Form*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

**Beweis:** Für alle  $x, y \in X$  und  $a \in A$  gilt die Beziehung

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Hieraus folgt  $d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$ . Die linke Seite dieser Ungleichung ist eine untere Schranke für die Menge  $\{d(y, a) : a \in A\}$ , es gilt also

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf \{d(y, a) : a \in A\} = d(y, A).$$

Wir erhalten  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ . Die Behauptung ergibt sich hieraus durch Vertauschung der beliebig gewählten  $x$  und  $y$ .  $\square$

Die Norm eines Vektors des euklidischen Vektorraums  $\mathbb{R}^N$  ist durch die Betragssummenorm

$$\|x\| := \sum_{i=1}^N |x_i| \quad \text{für alle } x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

definiert. Für das kartesische Produkt endlich vieler euklidischer Räume  $\mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_n}$  setzen wir

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| := \sum_{i=1}^n \|x_i\| \quad \text{für alle } (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{N_n}.$$

Mit  $\mathbb{R}^{N \times M}$  beschreiben wir die Menge aller reellen  $N \times M$ -Matrizen. Für  $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$  definieren wir die Operatornorm

$$\|A\| := \max \{\|Ax\| : x \in \mathbb{R}^M, \|x\| = 1\}.$$

Für die Einheitsmatrix verwenden wir das Symbol  $\mathbb{1}$ .

## 1.2 Differenzgleichungen

Dieser Abschnitt entstand in enger Anlehnung an AULBACH [5]. Wir führen den Begriff der Differenzgleichung ein und leiten grundlegende Eigenschaften von Differenzgleichungen her.

**1.2.1 Definition:** Gegeben seien eine Menge  $X$  und eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ . Eine Gleichung der Form

$$x' = f(k, x) \quad (1.1)$$

nennen wir (nichtautonome) Differenzgleichung. Ist  $I$  ein nichtleeres  $\mathbb{Z}$ -Intervall, so heißt eine Funktion  $\lambda : I \rightarrow X$  Lösung der Differenzgleichung (1.1), wenn  $(k, \lambda(k)) \in D$  für alle  $k \in I$  und die Identität

$$\lambda(k+1) = f(k, \lambda(k)) \quad \text{für alle } k \text{ mit } \{k, k+1\} \subset I$$

erfüllt ist.

Die Kombination aus der Differenzgleichung (1.1) und einer *Anfangsbedingung*  $x(\kappa) = \xi$  mit  $(\kappa, \xi) \in D$  nennen wir ein *Anfangswertproblem*. Eine Lösung eines Anfangswertproblems ist eine Lösung  $\lambda : I \rightarrow X$  der Differenzgleichung (1.1) mit  $\kappa \in I$  und  $\lambda(\kappa) = \xi$ .

Ist die Funktion  $f$  unabhängig von  $k$ , so bezeichnen wir (1.1) als eine *autonome Differenzgleichung*. Der folgende Satz besagt, dass jede nichtautonome Differenzgleichung äquivalent in eine autonome Differenzgleichung umgeschrieben werden kann. Diese vielfach hilfreiche Anwendung darf jedoch nicht zu dem Schluss verleiten, dass nichtautonome Differenzgleichungen durch die Theorie autonomer Differenzgleichungen vollständig erfasst sind, denn es gehen generell die Beschränktheit von Lösungen oder die Existenz von Ruhelagen durch die Umformung verloren.

**1.2.2 Satz (nichtautonome als spezielle autonome Differenzgleichungen):** Gegeben seien eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$  und eine nichtautonome Differenzgleichung

$$x' = f(k, x). \quad (1.2)$$

Mit der dazugehörigen autonomen Differenzgleichung

$$\begin{aligned} s' &= s + 1 \\ y' &= f(s, y) \end{aligned} \quad (1.3)$$

gilt dann:

- (i) Ist  $\lambda : I \rightarrow X$  eine Lösung von (1.2), so ist  $(\mu_1, \mu_2) : I \rightarrow \mathbb{Z} \times X$ ,  $k \mapsto (k, \lambda(k))$  eine Lösung von (1.3).

(ii) Ist  $(\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{Z} \times X$  eine Lösung von (1.3) und ist  $\nu_1(\kappa) = \kappa$  für ein  $\kappa \in I$ , so ist  $\nu_2 : I \rightarrow X$  eine Lösung von (1.2).

**Beweis:** (i) Aus  $\lambda(k+1) = f(k, \lambda(k))$  für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset I$  und der Definition von  $(\mu_1, \mu_2)$  erhalten wir die Identitäten

$$\begin{aligned}\mu_1(k+1) &= \mu_1(k) + 1, \\ \mu_2(k+1) &= \lambda(k+1) = f(k, \lambda(k)) = f(\mu_1(k), \mu_2(k))\end{aligned}$$

für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset I$ . Damit haben wir  $(\mu_1, \mu_2)$  als eine Lösung von (1.3) nachgewiesen.

(ii) Sei  $\nu_1(k+1) = \nu_1(k) + 1$  und  $\nu_2(k+1) = f(\nu_1(k), \nu_2(k))$  für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset I$ . Aus der ersten Gleichung folgt induktiv, dass  $\nu_1(k) = k$  für alle  $k \in I$ , da  $\nu_1(\kappa) = \kappa$ . Mit der zweiten Gleichung ergibt sich dann die Identität

$$\nu_2(k+1) = f(k, \nu_2(k))$$

für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset I$  und damit die Behauptung.  $\square$

Wie im folgenden Satz konkretisiert wird, besitzen autonome Differenzgleichungen die viele Überlegungen vereinfachende Eigenschaft, dass Lösungen „in der Zeit“ verschoben werden können.

**1.2.3 Satz (Translationsinvarianz):** Gegeben sei eine autonome Differenzgleichung

$$x' = f(x) \tag{1.4}$$

mit einer Menge  $X$  und einer Funktion  $f : D \subset X \rightarrow X$ . Ist  $\lambda : I \rightarrow X$  eine Lösung von (1.4), so ist für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$  die auf dem  $\mathbb{Z}$ -Intervall  $\{k \in \mathbb{Z} : k + \kappa \in I\}$  erklärte Funktion  $\mu(k) := \lambda(k + \kappa)$  eine Lösung von (1.4).

**Beweis:** Aus der Lösungsidentität  $\lambda(k+1) = f(\lambda(k))$ , falls  $\{k, k+1\} \subset I$ , folgt  $\mu(k+1) = \lambda(k+1 + \kappa) = f(\lambda(k + \kappa)) = f(\mu(k))$ , falls  $\{k + \kappa, k + \kappa + 1\} \subset I$ .  $\square$

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen. Wie der Beweis des folgenden Satzes zeigen wird, erhält man Vorwärtslösungen durch Iterationen der rechten Seite. Die Existenz von Rückwärtslösungen ist nur dann gesichert, wenn sich die Funktion  $f$  in einer gewissen Weise umkehren lässt.

**1.2.4 Satz (Existenz- und Eindeigkeitssatz):** Gegeben sei eine Differenzgleichung

$$x' = f(k, x) \tag{1.5}$$

mit einer rechten Seite  $f : D \subset \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ . Dann gibt es eine Funktion  $\lambda : \Omega \subset \mathbb{Z} \times D \rightarrow X$  mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes  $(\kappa, \xi) \in D$  ist die Menge  $I_{max}(\kappa, \xi) := \{k \in \mathbb{Z} : (k, \kappa, \xi) \in \Omega\}$  ein  $\kappa$  enthaltendes  $\mathbb{Z}$ -Intervall. Die Funktion  $\lambda(\cdot; \kappa, \xi) : I_{max}(\kappa, \xi) \rightarrow X$  ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$x' = f(k, x), \quad x(\kappa) = \xi. \quad (1.6)$$

(ii) Ist  $\nu : J \rightarrow X$  eine weitere Lösung des Anfangswertproblems (1.6), so gilt

$$\nu(k) = \lambda(k; \kappa, \xi) \quad \text{für alle } k \in I_{max}(\kappa, \xi) \cap J.$$

Die Funktion  $\lambda$  nennen wir die allgemeine Lösung der Differenzgleichung (1.5).

**Beweis:** Sei  $(\kappa, \xi) \in D$  beliebig. Zur Konstruktion des Vorwärtsanteils der Lösung  $\lambda(\cdot; \kappa, \xi)$  setzen wir  $\lambda(\kappa; \kappa, \xi) = \xi$  und definieren, solange  $(k, \lambda(k; \kappa, \xi)) \in D$ , rekursiv

$$\lambda(k; \kappa, \xi) = f(k-1, \lambda(k-1; \kappa, \xi)) \quad \text{für } k > \kappa.$$

Um den Rückwärtsanteil der Lösung zu erhalten, definieren wir, solange die Funktion  $f(k, \cdot)$  die Menge  $\{x \in X : (k, x) \in D\}$  bijektiv auf die Menge  $\{x \in X : (k+1, x) \in D\}$  abbildet, rekursiv

$$\lambda(k; \kappa, \xi) = f^{-1}(k, \lambda(k+1; \kappa, \xi)) \quad \text{für } k < \kappa.$$

Die so auf dem  $\mathbb{Z}$ -Intervall  $I_{max}(\kappa, \xi)$  definierte Funktion  $\lambda(\cdot; \kappa, \xi)$  ist offensichtlich eine im Sinne von (ii) eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (1.6). Der Definitionsbereich der allgemeinen Lösung ist  $\Omega = \{(k, \kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times D : k \in I_{max}(\kappa, \xi)\}$ .  $\square$

**1.2.5 Bemerkung:** Ist der Definitionsbereich  $D$  der rechten Seite von der Form  $\mathbb{Z} \times X$ , so ist offensichtlich  $I_{max}(\kappa, \xi)$  für alle  $(\kappa, \xi) \in D$  nach rechts unbeschränkt. Sind darüber hinaus die Funktionen  $f(k, \cdot) : X \rightarrow X$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  bijektiv, so gilt sogar  $I_{max}(\kappa, \xi) = \mathbb{Z}$  für alle  $(\kappa, \xi) \in D$ . Wir nennen solche Differenzgleichungen *invertierbar*. Die Umkehrfunktion von  $f(k, \cdot)$  bezeichnen wir mit  $f^{-1}(k, \cdot)$ .

Die folgende Anwendung des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes untersucht die Abhängigkeit der allgemeinen Lösung von dem Anfangswertepaar  $(\kappa, \xi) \in D$ .

**1.2.6 Satz (Kozyklus-Eigenschaft der allgemeinen Lösung):** Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.4 sei  $(\kappa, \xi)$  ein beliebiger Punkt aus  $D$ . Dann gelten für jedes  $\sigma \in I_{max}(\kappa, \xi)$  die Beziehungen

$$I_{max}(\sigma, \lambda(\sigma; \kappa, \xi)) \subset I_{max}(\kappa, \xi), \quad (1.7)$$

$$\lambda(k; \sigma, \lambda(\sigma; \kappa, \xi)) = \lambda(k; \kappa, \xi) \quad \text{für alle } k \in I_{max}(\sigma, \lambda(\sigma; \kappa, \xi)). \quad (1.8)$$

Die Identität (1.8) nennen wir die Kozyklus-Eigenschaft der allgemeinen Lösung.

**Beweis:** Aufgrund der Konstruktion der allgemeinen Lösung im Beweis von Satz 1.2.4 ergibt sich (1.7). Die Aussage (1.8) ist auch wahr, denn die beiden Funktionen

$\lambda(\cdot; \sigma, \lambda(\sigma; \kappa, \xi))$  und  $\lambda(\cdot; \kappa, \xi)$  sind Lösungen des Anfangswertproblems  $x' = f(k, x)$ ,  $x(\sigma) = \lambda(\sigma; \kappa, \xi)$ . Sie stimmen daher nach Satz 1.2.4 auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche, nach (1.7) also auf  $I_{max}(\sigma, \lambda(\sigma; \kappa, \xi))$ , überein.  $\square$

Ist speziell  $X = \mathbb{R}^N$ , so ist eine *homogene lineare Differenzengleichung* durch

$$x' = A(k)x \quad (1.9)$$

mit einer Matrizenfunktion  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  ( $I$  ein  $\mathbb{Z}$ -Intervall) gegeben. Die *Übergangsmatrizen* von (1.9) sind durch

$$\Phi(k, \kappa) = \begin{cases} \mathbb{1} & : k = \kappa \\ A(k-1) \cdots A(\kappa) & : k > \kappa \\ A(k)^{-1} \cdots A(\kappa-1)^{-1} & : k < \kappa \end{cases}$$

definiert, wobei der Fall  $k < \kappa$  nur dann erklärt ist, wenn die Matrizen  $A(l)$  für alle  $l \in \{k, \dots, \kappa-1\}$  invertierbar sind. Offensichtlich gilt folgender Zusammenhang zur allgemeinen Lösung von (1.9):

$$\lambda(k; \kappa, \xi) = \Phi(k, \kappa)\xi \quad \text{für alle } (\kappa, \xi) \in I \times \mathbb{R}^N \text{ und } k \in I_{max}(\kappa, \xi).$$

Ist  $I = \mathbb{Z}$ , so ist ein *invarianter Projektor* für das lineare System (1.9) eine Matrizenfunktion  $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ , für die

$$\begin{aligned} P(k)^2 &= P(k), \\ P(k+1)A(k) &= A(k)P(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

gilt. Ist (1.9) invertierbar, so haben die Matrizen  $P(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) wegen  $P(k+1) = A(k)P(k)A^{-1}(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  den gleichen Rang. Wir bezeichnen ihn mit  $\text{rk } P$ . Wir sagen, dass das lineare System (1.9) kinematisch ähnlich zum linearen System

$$y' = B(k)y \quad (1.10)$$

( $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ) ist, falls es eine Funktion  $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbarer Matrizen  $S(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) mit

$$|S| := \max \left\{ \sup \{ \|S(k)\| : k \in \mathbb{Z} \}, \sup \{ \|S^{-1}(k)\| : k \in \mathbb{Z} \} \right\} < \infty$$

gibt, so dass

$$B(k) = S(k+1)A(k)S^{-1}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist. Das lineare System (1.10) erhält man durch die Transformation  $y = S(k)x$  aus (1.9).

Wir beschließen diesen Abschnitt, indem wir das Verhalten von Lösungen einer Differenzgleichung relativ zu einer Referenzlösung untersuchen.

**1.2.7 Satz (Differenzgleichung der gestörten Bewegung):** Gegeben seien eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  und eine nichtautonome Differenzgleichung

$$x' = f(k, x) \quad (1.11)$$

mit einer Lösung  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Mit der sogenannten Differenzgleichung der gestörten Bewegung

$$x' = f(k, x + \lambda(k)) - f(k, \lambda(k)) \quad (1.12)$$

gelten dann folgende Aussagen:

- (i) Ist  $\nu : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.11) und ist  $I \cap J \neq \emptyset$ , so ist  $\mu := \nu - \lambda$  eine Lösung von (1.12) auf  $I \cap J$ .
- (ii) Ist  $\mu : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.12), so ist  $\nu := \mu + \lambda$  eine Lösung von (1.11).

**Beweis:** (i) Für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset I \cap J$  gilt

$$\begin{aligned} \mu(k+1) &= \nu(k+1) - \lambda(k+1) = f(k, \nu(k)) - f(k, \lambda(k)) \\ &= f(k, \mu(k) + \lambda(k)) - f(k, \lambda(k)). \end{aligned}$$

$\mu : I \cap J \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist daher eine Lösung von (1.12).

(ii) Für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset J$  gilt

$$\begin{aligned} \nu(k+1) &= \mu(k+1) + \lambda(k+1) = f(k, \mu(k) + \lambda(k)) - f(k, \lambda(k)) + f(k, \lambda(k)) \\ &= f(k, \nu(k)). \end{aligned}$$

$\nu : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist daher eine Lösung von (1.11).  $\square$

### 1.3 Gewöhnliche Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt wird erstmals in dieser Arbeit die enge strukturelle Verwandtschaft von Differenzen- und Differenzialgleichungen deutlich. Wir führen den Begriff der Differenzialgleichung ein und geben die Analoga zu den Sätzen des vorherigen Abschnitts an. Für die Beweise der Sätze sei auf AULBACH [3] verwiesen.

**1.3.1 Definition:** Gegeben sei eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Eine Gleichung der Form

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.13)$$

nennen wir (nichtautonome) Differenzialgleichung. Ist  $I \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall, so heißt eine differenzierbare Funktion  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  Lösung der Differenzialgleichung (1.13), wenn  $(t, \lambda(t)) \in D$  für alle  $t \in I$  und die Identität

$$\dot{\lambda}(t) := \frac{d\lambda}{dt}(t) = f(t, \lambda(t)) \quad \text{für alle } t \in I$$

erfüllt ist.

Die Kombination aus der Differenzialgleichung (1.13) und einer Anfangsbedingung  $x(\tau) = \xi$  mit  $(\tau, \xi) \in D$  nennen wir ein Anfangswertproblem. Eine Lösung eines Anfangswertproblems ist eine Lösung  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  der Differenzialgleichung (1.13) mit  $\tau \in I$  und  $\lambda(\tau) = \xi$ .

Ist die Funktion  $f$  unabhängig von  $t$ , so bezeichnen wir (1.13) als eine *autonome Differenzialgleichung*. Der folgende Satz besagt, dass nichtautonome Differenzialgleichungen durch eine Dimensionserhöhung äquivalent in autonome Differenzialgleichungen umgeschrieben werden können.

**1.3.2 Satz (nichtautonome als spezielle autonome Differenzialgleichungen):** Gegeben seien eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  und die nichtautonome Differenzialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.14)$$

Mit der dazugehörigen autonomen Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 1 \\ \dot{y} &= f(s, y) \end{aligned} \quad (1.15)$$

gilt dann:

- (i) Ist  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.14), so ist  $(\mu_1, \mu_2) : I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, t \mapsto (t, \lambda(t))$  eine Lösung von (1.15).
- (ii) Ist  $(\nu_1, \nu_2) : I \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.15) und ist  $\nu_1(\tau) = \tau$  für ein  $\tau \in I$ , so ist  $\nu_2 : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.14).

**Beweis:** siehe AULBACH [3, Satz 3.1.6, S. 108]. □

Wie bei autonomen Differenzialgleichungen ist die zeitliche Translation einer Lösung einer autonomen Differenzialgleichung wieder eine Lösung.

**1.3.3 Satz (Translationsinvarianz):** Gegeben sei eine autonome Differenzialgleichung

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.16)$$

mit einer Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Ist  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.16), so ist für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  die auf dem Intervall  $\{t \in \mathbb{R} : t + \tau \in I\}$  erklärte Funktion  $\mu(t) := \lambda(t + \tau)$  eine Lösung von (1.16).

**Beweis:** siehe AULBACH [3, Satz 1.1.22, S. 12]. □

Für die eindeutige Lösbarkeit von Differenzialgleichungen ist der Begriff der Lipschitz-Stetigkeit, der in der folgenden Definition präzisiert wird, von fundamentaler Bedeutung.

**1.3.4 Definition:** Gegeben sei eine Funktion  $g : D \subset \mathbb{R}^{M+N} \rightarrow \mathbb{R}^K$ . Gibt es dann eine Konstante  $L \geq 0$  mit

$$\|g(s, x) - g(s, y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } (s, x), (s, y) \in D,$$

so sagt man, die Funktion  $g(s, x)$  genügt auf  $D$  einer (globalen) Lipschitz-Bedingung bezüglich  $x$  (mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ ). Wenn es zu jedem Punkt in  $D$  eine Umgebung  $U$  gibt, so dass die Einschränkung von  $g(s, x)$  auf  $U \cap D$  einer Lipschitz-Bedingung genügt, so heißt  $g(s, x)$  Lipschitz-stetig bezüglich  $x$ .

Im folgenden Satz formulieren wir Bedingungen, die die eindeutige Lösbarkeit eines Anfangswertproblems garantieren. Der Beweis dieses Satzes ist ungleich komplizierter als der Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 1.2.4 für Differenzialgleichungen.

**1.3.5 Satz (Existenz- und Eindeutigkeitsatz):** Gegeben sei eine Differenzialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1.17)$$

wobei die für alle  $(t, x) \in D$  auf einer offenen Menge  $D \subset \mathbb{R}^{1+N}$  erklärte Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  stetig und bezüglich  $x$  Lipschitz-stetig sei. Dann gibt es eine Funktion  $\lambda : \Omega \subset \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für jedes  $(\tau, \xi) \in D$  ist die Menge  $I_{max}(\tau, \xi) := \{t \in \mathbb{R} : (t, \tau, \xi) \in \Omega\}$  ein  $\tau$  enthaltendes offenes Intervall. Die Funktion  $\lambda(\cdot, \tau, \xi) : I_{max}(\tau, \xi) \rightarrow \mathbb{R}^N$  ist eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi. \quad (1.18)$$

- (ii) Ist  $\nu : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine weitere Lösung des Anfangswertproblems (1.18), so ist  $\nu$  die Einschränkung der in (i) beschriebenen Lösung auf das Intervall  $J$  und es gilt  $J \subset I_{max}(\tau, \xi)$ .

Die Funktion  $\lambda$  nennen wir die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (1.17).

**Beweis:** siehe AULBACH [3, Satz 2.4.1, S. 71]. □

Die Aussage (ii) des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes rechtfertigt es, die Lösung  $\lambda(\cdot; \tau, \xi)$  ( $(\tau, \xi) \in D$ ) als die maximale Lösung des Anfangswertproblems  $x(\tau) = \xi$  zu bezeichnen. Da  $\lambda(\cdot; \tau, \xi)$  auch der Anfangsbedingung  $x(\sigma) = \lambda(\sigma; \tau, \xi)$  genügt, ist es plausibel, dass die beiden Funktionen  $\lambda(\cdot; \tau, \xi)$  und  $\lambda(\cdot; \sigma, \lambda(\sigma; \tau, \xi))$  identisch sind. Dies ist die Kernaussage des folgenden Satzes.

**1.3.6 Satz (Kozyklus-Eigenschaft der allgemeinen Lösung):** Unter den Voraussetzungen von Satz 1.3.5 sei  $(\tau, \xi)$  ein beliebiger Punkt aus  $D$ . Dann gelten für jedes  $\sigma \in I_{max}(\tau, \xi)$  die Beziehungen

$$I_{max}(\sigma, \lambda(\sigma; \tau, \xi)) = I_{max}(\tau, \xi), \quad (1.19)$$

$$\lambda(t; \sigma, \lambda(\sigma; \tau, \xi)) = \lambda(t; \tau, \xi) \quad \text{für alle } t \in I_{max}(\tau, \xi). \quad (1.20)$$

Die Identität (1.20) nennen wir die Kozyklus-Eigenschaft der allgemeinen Lösung.

**Beweis:** siehe AULBACH [3, Satz 2.6.5, S. 95]. □

Der folgende Satz gibt eine Bedingung an, unter der der Definitionsbereich  $\Omega$  der allgemeinen Lösung maximal ist.

**1.3.7 Satz (Linear beschränkte rechte Seite):** *Hat die stetige und bezüglich  $x$  Lipschitz-stetige rechte Seite  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^N$  einer Differentialgleichung  $\dot{x} = f(t, x)$  einen Definitionsbereich der Form*

$$D = (a, b) \times \mathbb{R}^N \quad \text{mit} \quad -\infty \leq a < b \leq \infty,$$

*und ist  $f$  linear beschränkt, d.h. gilt eine Abschätzung der Form*

$$\|f(t, x)\| \leq \rho(t)\|x\| + \sigma(t) \quad \text{für alle } t \in (a, b) \text{ und } x \in \mathbb{R}^N$$

*mit stetigen Funktionen  $\rho, \sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ , so ist der Definitionsbereich  $\Omega$  der allgemeinen Lösung maximal: Es gilt  $\Omega = (a, b) \times D$  und  $I_{\max}(\tau, \xi) = (a, b)$  für jedes  $\tau \in (a, b)$  und  $\xi \in \mathbb{R}^N$ .*

**Beweis:** siehe AULBACH [3, Satz 2.5.6, S. 87]. □

Eine wichtige Klasse der linear beschränkten Differentialgleichungen sind die *homogenen linearen Differentialgleichungen*. Eine solche Differentialgleichung ist durch

$$\dot{x} = A(t)x \tag{1.21}$$

mit einer stetigen Matrizenfunktion  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  ( $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall) gegeben. Wie in AULBACH [3, Kapitel 6] bewiesen wird, überträgt sich die Linearität der rechten Seite auf die allgemeine Lösung: Es existiert eine Abbildung  $\Phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ , die sogenannte *Übergangsmatrix* von (1.21), deren Zusammenhang zur allgemeinen Lösung von (1.21) durch die Beziehung

$$\lambda(t; \tau, \xi) = \Phi(t, \tau)\xi \quad \text{für alle } t, \tau \in I \text{ und } \xi \in \mathbb{R}^N$$

gegeben ist. Ist  $I = \mathbb{R}$ , so ist ein *invarianter Projektor* für das lineare System (1.21) eine Matrizenfunktion  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ , für die

$$\begin{aligned} P(t)^2 &= P(t), \\ P(t)\Phi(t, s) &= \Phi(t, s)P(s) \quad \text{für alle } t, s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

gilt. Die Matrizen  $P(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) haben wegen  $P(t) = \Phi(t, s)P(s)\Phi(s, t)$  und der Invertierbarkeit von  $\Phi(t, s)$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  den gleichen Rang. Wir bezeichnen ihn mit  $\text{rk } P$ . Wir sagen, dass das lineare System (1.21) kinematisch ähnlich zum linearen System

$$\dot{y} = B(t)y \tag{1.22}$$

( $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ) ist, falls es eine differenzierbare Funktion  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbarer Matrizen  $S(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) mit

$$|S| := \max \left\{ \sup \{ \|S(t)\| : t \in \mathbb{R} \}, \sup \{ \|S^{-1}(t)\| : t \in \mathbb{R} \} \right\} < \infty$$

gibt, so dass

$$B(t) = \dot{S}(t)S^{-1}(t) + S(t)A(t)S^{-1}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

erfüllt ist. Das lineare System (1.22) erhält man durch eine Transformation  $y = S(t)x$  aus (1.21).

Zum Abschluss dieses Abschnitts beschäftigen wir uns noch mit der Differentialgleichung der gestörten Bewegung, mit der das Lösungsverhalten relativ zu einer Referenzlösung untersucht werden soll.

**1.3.8 Satz (Differentialgleichung der gestörten Bewegung):** Gegeben sei eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  und eine nichtautonome Differentialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.23}$$

mit einer Lösung  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Mit der sogenannten Differentialgleichung der gestörten Bewegung

$$\dot{x} = f(t, x + \lambda(t)) - f(t, \lambda(t)) \tag{1.24}$$

gelten dann folgende Aussagen:

- (i) Ist  $\nu : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.23) und ist  $I \cap J \neq \emptyset$ , so ist  $\mu := \nu - \lambda$  eine Lösung von (1.24) auf  $I \cap J$ .
- (ii) Ist  $\mu : J \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (1.24), so ist  $\nu := \mu + \lambda$  eine Lösung von (1.23).

**Beweis:** analog Satz 1.2.7. □

## 1.4 Dynamische Systeme

Der Begriff des dynamischen Systems ist geeignet, die strukturellen Gemeinsamkeiten von autonomen Differenzen- und Differentialgleichungen zusammenzuführen. Wir werden in dieser Arbeit - wann immer möglich - Resultate, die für autonome Differenzen- und Differentialgleichungen gelten, in der Allgemeinheit von dynamischen Systemen formulieren.

**1.4.1 Definition:** Ein dynamisches System (DS) auf einer Menge  $X$  mit der Zeit  $\mathbb{T} (= \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+)$  ist durch eine Abbildung  $\varphi : D \subset \mathbb{T} \times X \rightarrow X$  mit den folgenden Eigenschaften gegeben:

- (i) Das maximale Existenzintervall  $D_{max}(x) := \{t \in \mathbb{T} : (t, x) \in D\}$  für  $x \in X$  ist entweder leer oder ein offenes  $\mathbb{T}$ -Intervall, das  $0 \in \mathbb{T}$  enthält.
- (ii) Für alle  $t, s \in \mathbb{T}$  und  $x \in X$  mit  $s \in D_{max}(x)$  und  $t + s \in D_{max}(x)$  gilt  $t \in D_{max}(\varphi(s, x))$  und

$$\begin{aligned} \varphi(0, x) &= x, \\ \varphi(t + s, x) &= \varphi(t, \varphi(s, x)). \end{aligned}$$

Die Menge  $X$  eines dynamischen Systems bezeichnen wir als *Phasenraum*. Hat  $X$  die Struktur eines topologischen Raums, so nennen wir ein dynamisches System stetig, falls die Abbildung  $\varphi(t, \cdot) : \{x \in X : (t, x) \in D\} \rightarrow X$  für alle  $t \in \mathbb{T}$  stetig ist. Zur Verallgemeinerung der maximalen Existenzintervalle setzen wir für eine beliebige Teilmenge  $M$  von  $X$

$$D_{max}(M) := \bigcap_{x \in M} D_{max}(x).$$

Die folgenden zwei Beispiele zeigen, dass dynamische Systeme von autonomen Differenzen- und Differenzialgleichungen erzeugt werden.

### 1.4.2 Beispiele:

- (i) Gegeben sei eine autonome Differenzengleichung

$$x' = f(x) \tag{1.25}$$

mit einer Menge  $X$  und einer Funktion  $f : D \subset X \rightarrow X$ . Mit  $\mathbb{T} := \mathbb{Z}_0^+$  (oder  $\mathbb{T} := \mathbb{Z}$  bei Invertierbarkeit von (1.25)) wird ein dynamisches System erzeugt, falls man

$$\varphi(t, x) := \lambda(t; 0, x)$$

für alle  $(t, x) \in \mathbb{T} \times D$  mit  $t \in I_{max}(0, x)$  definiert.

**Beweis:** Nach Satz 1.2.4 ist  $D_{max}(x) := \{t \in \mathbb{T} : t \in I_{max}(0, x)\}$  ein  $0 \in \mathbb{Z}$  enthaltendes  $\mathbb{Z}$ -Intervall und es gilt  $\varphi(0, x) = \lambda(0; 0, x) = x$  für alle  $x \in D$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \varphi(t+s, x) &= \lambda(t+s; 0, x) \stackrel{(1.8)}{=} \lambda(t+s; s, \lambda(s; 0, x)) \stackrel{1.2.3}{=} \lambda(t; 0, \lambda(s; 0, x)) \\ &= \varphi(t, \varphi(s, x)) \end{aligned}$$

für alle  $t, s \in \mathbb{T}$  und  $x \in D$  mit  $s \in D_{max}(x)$  und  $t+s \in D_{max}(x)$ . □

- (ii) Ebenso zeigt man, dass einer autonomen Differenzialgleichung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit einer Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die den Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 1.3.5 genügt, ein dynamisches System zugeordnet ist. Es gilt  $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}^N$  und

$$\varphi(t, x) = \lambda(t; 0, x)$$

für alle  $(t, x) \in \mathbb{R} \times D$  mit  $t \in I_{max}(0, x)$ .

## 1.5 Nichtautonome dynamische Systeme

In diesem Abschnitt führen wir den relativ neuen Begriff des nichtautonomen dynamischen Systems ein, der sich aus der Theorie der zufälligen dynamischen Systeme entwickelt hat

(siehe ARNOLD [1]). Wie wir sehen werden, sind Differenzen- und Differenzialgleichungen spezielle nichtautonome dynamische Systeme.

**1.5.1 Definition:** Ein nichtautonomes dynamisches System (NDS) auf einer Menge  $X$  mit der Zeit  $\mathbb{T}$  ( $= \mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_0^+$ ) und der Basismenge  $P$  ist ein Paar von Abbildungen  $(\theta : \mathbb{T} \times P \rightarrow P, \varphi : D \subset \mathbb{T} \times P \times X \rightarrow X)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $\theta$  ist ein dynamisches System.
- (ii) Das maximale Existenzintervall  $D_{max}(p, x) := \{t \in \mathbb{T} : (t, p, x) \in D\}$  für  $p \in P$  und  $x \in X$  ist entweder leer oder ein offenes  $\mathbb{T}$ -Intervall, das  $0 \in \mathbb{T}$  enthält.
- (iii)  $\varphi$  ist ein Kozykel über  $\theta$ , d.h. für alle  $t, s \in \mathbb{T}$  und  $(p, x) \in P \times X$  mit  $s \in D_{max}(p, x)$  und  $t + s \in D_{max}(p, x)$  gilt  $t \in D_{max}(\theta(s, p), \varphi(s, p, x))$  und

$$\begin{aligned}\varphi(0, p, x) &= x, \\ \varphi(t + s, p, x) &= \varphi(t, \theta(s, p), \varphi(s, p, x)).\end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Menge  $X$  eines nichtautonomen dynamischen Systems als *Phasenraum*. Das kartesische Produkt  $P \times X$  nennen wir auch *erweiterten Phasenraum*. Hat  $X$  die Struktur eines topologischen Raums, so heißt  $(\theta, \varphi)$  stetig, falls für alle  $t \in \mathbb{T}$  und  $p \in P$  die Abbildung  $\varphi(t, p, \cdot) : \{x \in X : (t, p, x) \in D\} \rightarrow X$  stetig ist. Zur Verallgemeinerung der maximalen Existenzintervalle definieren wir für  $p \in P$  und  $M \subset X$

$$D_{max}(p, M) := \bigcap_{x \in M} D_{max}(p, x).$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir statt  $\theta(t, p)$  auch  $\theta_t p$ . Für  $\varphi(t, p, x)$  verwenden wir auch die Notation  $\varphi(t, p)x$ .

Die folgenden zwei Beispiele zeigen, dass nichtautonome dynamische Systeme von nichtautonomen Differenzen- und Differenzialgleichungen erzeugt werden.

### 1.5.2 Beispiele:

- (i) Gegeben sei eine nichtautonome Differenzengleichung

$$x' = f(k, x) \tag{1.26}$$

mit einer Menge  $X$  und einer Funktion  $f : D \subset \mathbb{Z} \times X \rightarrow X$ . Mit  $P := \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{T} := \mathbb{Z}_0^+$  (oder  $\mathbb{T} := \mathbb{Z}$  bei Invertierbarkeit von (1.26)) und dem Zeitshift  $\theta : \mathbb{T} \times P \rightarrow P$ ,  $(t, s) \mapsto t + s$ , wird ein nichtautonomes dynamisches System erzeugt, falls man

$$\varphi(t, p, x) := \lambda(t + p; p, x)$$

für alle  $(t, p, x) \in \mathbb{T} \times D$  mit  $t + p \in I_{max}(p, x)$  definiert.

**Beweis:** Nach Satz 1.2.4 ist  $D_{max}(p, x) := \{t \in \mathbb{T} : t + p \in I_{max}(p, x)\}$  ein  $0 \in \mathbb{Z}$  enthaltendes  $\mathbb{Z}$ -Intervall und es gilt  $\varphi(0, p, x) = \lambda(p; p, x) = x$  für alle  $(p, x) \in D$ . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\varphi(t + s, p, x) &= \lambda(t + s + p; p, x) \stackrel{(1.8)}{=} \lambda(t + s + p; s + p, \lambda(s + p; p, x)) \\ &= \lambda(t + \theta(s, p); \theta(s, p), \varphi(s, p, x)) = \varphi(t, \theta(s, p), \varphi(s, p, x))\end{aligned}$$

für alle  $t, s \in \mathbb{T}$ ,  $(p, x) \in D$  mit  $s \in D_{max}(p, x)$  und  $t + s \in D_{max}(p, x)$ .  $\square$

(ii) Ebenso zeigt man, dass einer nichtautonomen Differenzialgleichung

$$\dot{x} = f(t, x)$$

mit einer Funktion  $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die den Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 1.3.5 genügt, ein nichtautonomes dynamisches System zugeordnet ist. Es gilt  $\mathbb{T} = P = \mathbb{R}$ ,  $X = \mathbb{R}^N$ ,  $\theta(t, s) = t + s$  für alle  $t, s \in \mathbb{R}$  und

$$\varphi(t, p, x) = \lambda(t + p; p, x)$$

für alle  $(t, p, x) \in \mathbb{R} \times D$  mit  $t + p \in I_{max}(p, x)$ .

Neben Differenzen- und Differenzialgleichungen erzeugen auch zufällige und stochastische Differenzen- und Differenzialgleichungen, wie in ARNOLD [1] gezeigt wird, nichtautonome dynamische Systeme. Darüber hinaus sind Kontroll-Systeme und bestimmte partielle Differenzialgleichungen spezielle nichtautonome dynamische Systeme. Ferner lassen sich dynamische Gleichungen auf Zeitskalen in das Konzept der nichtautonomen dynamischen Systeme einbetten (siehe SIEGMUND [35]).

Ein nichtautonomes dynamisches System  $(\theta : \mathbb{T} \times P \rightarrow P, \varphi : D \subset \mathbb{T} \times P \times X \rightarrow X)$  ist auch ein spezielles dynamisches System  $\psi : D \subset \mathbb{T} \times P \times X \rightarrow P \times X$  mit

$$\psi(t, p, x) = (\theta(t, p), \varphi(t, p, x))$$

auf dem Phasenraum  $P \times X$ , denn es gilt für alle  $t, s \in \mathbb{T}$  und  $(p, x) \in P \times X$  mit  $s \in D_{max}(p, x)$ ,  $t + s \in D_{max}(p, x)$ :

$$\begin{aligned} \psi(0, p, x) &= (\theta(0, p), \varphi(0, p, x)) = (p, x), \\ \psi(t + s, p, x) &= (\theta(t + s, p), \varphi(t + s, p, x)) = (\theta(t, \theta(s, p)), \varphi(t, \theta(s, p), \varphi(s, x))) \\ &= \psi(t, \psi(s, p, x)). \end{aligned}$$

Man bezeichnet dieses dynamische System auch als den *Schiefproduktfluss* des nichtautonomen dynamischen Systems  $(\theta, \varphi)$  (siehe SACKER, SELL [32]).

Das folgende Lemma charakterisiert Schiefproduktflüsse nichtautonomer dynamischer Systeme, die von Differenzen- oder Differenzialgleichungen erzeugt sind.

**1.5.3 Lemma (Schiefproduktfluss ist von autonomisierter Gleichung erzeugt):** Gegeben sei eine nichtautonome Differenzen- oder Differenzialgleichung

$$x' = f(k, x) \quad \text{oder} \quad \dot{x} = f(t, x) \tag{1.27}$$

und die dazugehörige autonomisierte Gleichung (1.3) oder (1.15). Dann ist der Schiefproduktfluss  $\psi$  des von (1.27) erzeugten nichtautonomen dynamischen System  $(\theta, \varphi)$  identisch mit dem dynamischen System, das aus (1.3) bzw. (1.15) hervorgeht.

**Beweis:** Seien  $\lambda$  die allgemeine Lösung von System (1.27) und  $I_{max}(p, x)$  die dazugehörigen Existenzintervalle für  $(p, x) \in P \times X$ . Aufgrund der Sätze 1.2.2 oder 1.3.2 ist durch

$$\tilde{\lambda}(t; \tau, (p, x)) := (t - \tau + p, \lambda(t - \tau + p; p, x))$$

für alle  $(t, \tau, p, x) \in P^3 \times X$  mit  $t - \tau + p \in I_{max}(p, x)$  die allgemeine Lösung des Systems (1.3) oder (1.15) erklärt, denn es gilt  $\tilde{\lambda}(\tau; \tau, (p, x)) = (p, x)$ . Für das hieraus entstandene dynamische System  $\tilde{\psi}$  gilt

$$\tilde{\psi}(t, (p, x)) \stackrel{1.4.2}{=} \tilde{\lambda}(t; 0, (p, x)) = (t + p, \lambda(t + p; p, x)) \stackrel{1.5.2}{=} (\theta(t, p), \varphi(t, p, x))$$

für alle  $(t, p, x) \in \mathbb{T} \times P \times X$  mit  $t + p \in I_{max}(p, x)$ . Offensichtlich gilt  $\tilde{\psi} \equiv \psi$ . □



# Kapitel 2

## Attraktoren

Attraktoren sind wichtige Hilfsmittel zur Beschreibung des Langzeitverhaltens dynamischer Systeme und nichtautonomer dynamischer Systeme. Sie sind Teilmengen des Phasenraums oder des erweiterten Phasenraums und wirken in einer gewissen Weise auf eine Umgebung (lokale Attraktoren) oder auf den gesamten Raum (globale Attraktoren) anziehend.

In diesem Kapitel führen wir grundlegende Begriffe zu Attraktoren ein und besprechen diese anhand von Beispielen. Hierbei verzichten wir auf die klassische Forderung der Kompaktheit eines Attraktors und untersuchen, inwieweit Zusatzbedingungen an den Attraktor eine sinnvolle Begriffsbildung ermöglichen. Wir unterscheiden grundsätzlich zwischen autonomen Attraktoren dynamischer Systeme (Abschnitt 2.1) und nichtautonomen Attraktoren nichtautonomer dynamischer Systeme (Abschnitt 2.2).

Einen Überblick über die klassischen Attraktorbegriffe gibt die parallel zu dieser Diplomarbeit entstandene Staatsexamensarbeit von SIENZ [39].

### 2.1 Autonome Attraktoren

Grundlegend für diesen Abschnitt ist ein dynamisches System  $\varphi : D \subset \mathbb{T} \times X \rightarrow X$ , dessen Phasenraum ein metrischer Raum  $(X, d)$  ist. Bevor wir erklären können, was wir unter einem Attraktor verstehen, müssen wir einige neue Begriffe einführen.

**2.1.1 Definition:** Eine Teilmenge  $A$  des Phasenraums  $X$  heißt invariant, falls  $D_{\max}(A) = \mathbb{T}$  und die Gleichung

$$\varphi(t, A) = A \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}$$

erfüllt ist.

Die Menge aller Ruhelagen  $R := \{x \in X : \varphi(t, x) = x \text{ für alle } t \in \mathbb{T}\}$  ist ein einfaches Beispiel für eine invariante Menge. Beliebige Vereinigungen invarianter Mengen sind wieder invariant.

Die invarianten Mengen, auf die wir in dieser Arbeit unser Augenmerk legen und die wir als Attraktoren nachweisen wollen, müssen zwar nicht kompakt sein, sollten sich jedoch aus einer kompakten Menge in Vorwärtszeit durch den Fluss  $\varphi$  erzeugen lassen. Die folgende Definition beschreibt diese Eigenschaft:

**2.1.2 Definition:** Eine invariante Menge  $A \subset X$  heißt kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $K$ , falls es eine kompakte Menge  $K \subset X$  gibt, so dass für jede kompakte Menge  $C \subset X$  eine Zahl  $T(K, C) > 0$  mit

$$\varphi(t, A \cap K) \supset A \cap C \quad \text{für alle } t > T(K, C)$$

existiert.

Zur Veranschaulichung dieser auf den ersten Blick abstrakten Definition betrachten wir das folgende Beispiel:

**2.1.3 Beispiel:** Gegeben sei die ebene autonome lineare Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

Für das hieraus erzeugte dynamische System gilt

$$\varphi(t, (\xi, \eta)) = (\xi e^{-t}, \eta e^t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.1)$$

Offensichtlich sind die stabile Mannigfaltigkeit  $W^s := \mathbb{R} \times \{0\}$  und die instabile Mannigfaltigkeit  $W^u := \{0\} \times \mathbb{R}$  invariante Mengen. Jede kompakte Nullumgebung ist Erzeuger von  $W^u$ , da der Fluss auf  $W^u$  „nach außen“ geht und daher jeder kompakte Teil von  $W^u$  in Vorwärtszeit „erreicht“ werden kann. Einen formalen Nachweis für diese Aussage führen wir in Kapitel 6, wo wir unter gewissen Voraussetzungen instabile Mannigfaltigkeiten als Attraktoren nachweisen. Da der Fluss auf der stabilen Mannigfaltigkeit „nach innen“ geht, ist  $W^s$  nicht kompakt erzeugbar.

**2.1.4 Bemerkungen:**

- (i) Eine kompakte und invariante Menge ist kompakt erzeugbar.
- (ii) Der Erzeuger einer kompakt erzeugbaren Menge ist nicht eindeutig bestimmt. Beispielsweise ist jede kompakte Obermenge eines Erzeugers ein weiterer Erzeuger.
- (iii) Ist  $K$  ein Erzeuger von  $A$ , so gilt

$$A = \bigcup_{t>0} \varphi(t, A \cap K).$$

In der folgenden Definition wird für eine nichtleere, invariante und abgeschlossene Menge  $A$  ein Attraktionssystem eingeführt, das alle kompakten Mengen des Phasenraums enthält, die von  $A$  in einer gewissen Weise angezogen werden.

**2.1.5 Definition:** Gegeben sei eine nichtleere, invariante und abgeschlossene Menge  $A \subset X$ . Unter  $\mathcal{D}(A)$  verstehen wir die Menge aller kompakten Mengen  $C \subset X$ , für die  $\sup D_{\max}(C) = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, C)|A) = 0 \quad (2.2)$$

*gilt. Wir nennen  $\mathcal{D}(A)$  das Attraktionssystem von  $A$ .*

**2.1.6 Bemerkung:** Das Attraktionssystem einer nichtleeren, invarianten und abgeschlossenen Menge  $A$  ist stets nichtleer, da jede kompakte Teilmenge von  $A$  ein Element von  $\mathcal{D}(A)$  ist.

**2.1.7 Beispiel:** Für die Differenzialgleichung aus Beispiel 2.1.3 folgt aus (2.1), dass das Attraktionssystem der instabilen Mannigfaltigkeit  $W^u$  jede kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^2$  enthält.

Wir können nun erklären, was wir unter lokalen und globalen Attraktoren verstehen:

**2.1.8 Definition:** Eine nichtleere, invariante, abgeschlossene und kompakt erzeugbare Menge  $A$  heißt lokaler  $\mathcal{D}(A)$ -Attraktor, falls es eine Menge  $C \in \mathcal{D}(A)$  mit

$$d(C|A) > 0 \quad (2.3)$$

*gibt. Ist überdies noch  $\mathcal{D}(A) = \{C \subset X : C \text{ ist kompakt}\}$ , so nennen wir  $A$  einen globalen Attraktor.*

### 2.1.9 Bemerkungen:

- (i) In der Literatur, siehe beispielsweise ROBINSON [29], wird von Attraktoren vielfach Kompaktheit gefordert. In dieser Arbeit möchten wir diese Bedingung abschwächen, indem wir nur die Abgeschlossenheit und die kompakte Erzeugbarkeit eines Attraktors voraussetzen, denn wir wollen im Rahmen der Theorie zur Approximation von nichtautonomen Mannigfaltigkeiten unbeschränkte Mengen als Attraktoren nachweisen.
- (ii) Die Bedingung (2.3) stellt sicher, dass es auch Mengen im Attraktionssystem geben muss, die nicht ganz im Attraktor liegen. Sie ist jedoch schwächer als die vielfach in der Literatur geforderte Existenz einer Fundamentalumgebung, die eine Umgebung des Attraktors ist und die im Sinne von (2.2) angezogen wird. Betrachten wir hierzu die skalare Differenzengleichung

$$x' = e^x x.$$

Das Attraktionssystem der invarianten und abgeschlossenen Menge  $A := \{0\}$  besteht aus den kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}$ , die keine positiven Zahlen enthalten; es gibt also keine Fundamentalumgebung, wir bezeichnen  $A$  jedoch als lokalen  $\mathcal{D}(A)$ -Attraktor.

Der folgende Satz besagt, dass autonome Attraktoren eindeutig sind.

**2.1.10 Satz (Eindeutigkeit von autonomen Attraktoren):** Gegeben seien zwei  $\mathcal{D}$ -Attraktoren  $A$  und  $B$ . Dann gilt  $A = B$ .

**Beweis:** Es gilt  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ . Wir führen den Beweis indirekt und nehmen  $A \neq B$  an. Sei  $K$  ein gemeinsamer Erzeuger von  $A$  und  $B$ . Dann existiert für jede kompakte Menge  $C \subset X$  eine Zahl  $\mathcal{T}(K, C) > 0$  mit

$$\varphi(t, A \cap K) \supset A \cap C \text{ und } \varphi(t, B \cap K) \supset B \cap C \text{ für alle } t > \mathcal{T}(K, C).$$

Aus  $A \neq B$  folgt hiermit  $A \cap K \neq B \cap K$ , also ist ohne Einschränkung die Menge  $M := \overline{(A \setminus B) \cap K}$  nichtleer und als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $K$  kompakt. Wiederum existiert wegen der kompakten Erzeugbarkeit eine Zahl  $\mathcal{T}(K, K) > 0$  mit

$$\varphi(t, A \cap K) \supset A \cap K \text{ für alle } t > \mathcal{T}(K, K).$$

Hieraus folgt für alle  $t > \mathcal{T}(K, K)$

$$\varphi(t, \overline{(A \setminus B) \cap K}) \supset \varphi(t, (A \setminus B) \cap K) \supset (A \setminus B) \cap K,$$

denn aus  $x \in (A \setminus B) \cap K$  folgt  $x \in A \cap K \subset \varphi(t, A \cap K)$  und  $x \notin \varphi(t, B) = B$ , schließlich also  $x \in \varphi(t, (A \setminus B) \cap K)$  für alle  $t > \mathcal{T}(K, K)$ . Hieraus erhalten wir

$$d(\varphi(t, M) | B) \geq d((A \setminus B) \cap K | B) > 0 \text{ für alle } t > \mathcal{T}(K, K)$$

und damit  $M \notin \mathcal{D}(B)$ . Wegen  $M \subset A$  gilt jedoch die widersprüchliche Aussage  $M \in \mathcal{D}(A)$ . Es folgt die Gleichheit der beiden Attraktoren  $A$  und  $B$ .  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass ohne die Forderung der kompakten Erzeugbarkeit keine Eindeutigkeit von Attraktoren zu erzielen ist.

### 2.1.11 Beispiel: Die ebene autonome Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

erzeugt ein global definiertes dynamisches System mit

$$\varphi(t, (\xi, \eta)) = (\xi + t, \eta e^{-t}) \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Für  $\eta_0 \in \mathbb{R}$  ist die Menge  $A_{\eta_0} := \{(t, \eta_0 e^{-t}) : t \in \mathbb{R}\}$  eine invariante und abgeschlossene Trajektorie des Systems. Wir weisen nun nach, dass  $A_{\eta_0}$  nicht kompakt erzeugbar ist und dass das Attraktionssystem  $\mathcal{D}(A_{\eta_0})$  maximal ist:

Hierzu nehmen wir an,  $A_{\eta_0}$  sei kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $K$ . Da  $K$  beschränkt ist, gibt es eine reelle Konstante  $M$  mit  $((-\infty, M] \times \mathbb{R}) \cap K = \emptyset$ . Aufgrund (2.4) gilt

$$\begin{aligned} \emptyset &= ((-\infty, M] \times \mathbb{R}) \cap \varphi(t, K) \\ &= ((-\infty, M] \times \mathbb{R}) \cap \varphi(t, A_{\eta_0} \cap K) \text{ für alle } t \geq 0. \end{aligned}$$

Mit  $C := \{(M, \eta_0 e^{-M})\} \subset A_{\eta_0}$  folgt hieraus  $(A_{\eta_0} \cap C) \cap \varphi(t, A_{\eta_0} \cap K) = \emptyset$  für alle  $t \geq 0$  im Widerspruch zur kompakten Erzeugbarkeit.

Zum Nachweis von  $\mathcal{D}(A_{\eta_0}) = \{C \subset \mathbb{R}^2 : C \text{ ist kompakt}\}$  wählen wir eine kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^2$ . Für ein beliebiges  $\varepsilon > 0$  existiert dann ein  $x_0 \in \mathbb{R}$ , so dass für alle  $x > x_0$  die

Beziehung  $|\eta_0 e^{-x}| < \frac{\varepsilon}{2}$  erfüllt ist. Da  $C$  beschränkt ist, gibt es Konstanten  $M_x, M_y \in \mathbb{R}^+$  mit  $C \subset (-M_x, M_x) \times (-M_y, M_y)$ . Aus (2.4) folgt dann

$$\begin{aligned}\varphi(t, C) &\subset \varphi(t, (-M_x, M_x) \times (-M_y, M_y)) \\ &= (-M_x + t, M_x + t) \times (-M_y e^{-t}, M_y e^{-t}).\end{aligned}$$

Es existiert also ein  $t_0 > 0$  mit

$$\varphi(t, C) \subset (x_0, \infty) \times U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \quad \text{für alle } t > t_0.$$

Für alle  $(x, y) \in \varphi(t, C)$  ( $t > t_0$ ) gilt daher

$$d((x, y), (x, \eta_0 e^{-x})) = |y - \eta_0 e^{-x}| \leq |y| + |\eta_0 e^{-x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hieraus folgt  $d((x, y), A_{\eta_0}) < \varepsilon$ , was nach Maximumsbildung über die kompakte Menge  $\varphi(t, C)$  (siehe Lemma 1.1.1)  $d(\varphi(t, C)|A_{\eta_0}) < \varepsilon$  impliziert. Es gilt daher  $C \in \mathcal{D}(A_{\eta_0})$ .

**2.1.12 Beispiel:** Die instabile Mannigfaltigkeit  $W^u$  der Differentialgleichung aus Beispiel 2.1.3 ist der globale Attraktor des Systems, denn sie ist kompakt erzeugbar und ihr Attraktionssystem ist nach Beispiel 2.1.7 maximal.

## 2.2 Nichtautonome Attraktoren

Ziel dieses Abschnittes ist die Einführung eines Attraktorbegriffs für nichtautonome dynamische Systeme  $(\theta : \mathbb{T} \times P \rightarrow P, \varphi : D \subset \mathbb{T} \times P \times X \rightarrow X)$  mit einer Basismenge  $P$  und einem metrischen Raum  $(X, d)$ . Ist  $(\theta, \varphi)$  nicht invertierbar, d.h.  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_0^+$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{R}_0^+$ , so setzen wir voraus, dass sich  $\theta$  zu einem dynamischen System auf  $\tilde{\mathbb{T}} \times P$  mit  $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{Z}, \mathbb{R}$  erweitern lässt. Dies ist bei allen bekannten Beispielen für nichtautonome dynamische Systeme möglich.

Beim Übergang von der autonomen zur nichtautonomen Situation ist das Blickfeld vom Phasenraum auf den erweiterten Phasenraum zu richten. Nichtautonome Attraktoren sind daher Teilmengen des erweiterten Phasenraums, genauer nichtautonome Mengen. Dieser neue Begriff wird in der folgenden Definition präzisiert:

**2.2.1 Definition:** Eine Teilmenge  $A$  des erweiterten Phasenraums  $P \times X$  heißt nichtautonome Menge, falls für alle  $p \in P$

$$A(p) := \{x \in X : (p, x) \in A\} \neq \emptyset$$

erfüllt ist.  $A(p)$  nennt man  $p$ -Faser von  $A$  oder Faser von  $A$  über  $p$ .

Wir betrachten in diesem Abschnitt vor allem folgende Eigenschaften nichtautonomer Mengen.

**2.2.2 Definition:** Eine nichtautonome Menge  $A$  heißt

- (i) invariant, falls  $D_{\max}(p, A(p)) = \mathbb{T}$  und  $\varphi(t, p)A(p) = A(\theta_t p)$  für alle  $t \in \mathbb{T}$  und  $p \in P$  gilt;

- (ii) abgeschlossen, falls  $A(p) \subset X$  für alle  $p \in P$  abgeschlossen ist;
- (iii) kompakt, falls  $A(p) \subset X$  für alle  $p \in P$  kompakt ist.

Wie bei autonomen Attraktoren ist die kompakte Erzeugbarkeit eine wichtige Forderung an einen nichtautonomen Attraktor. Die entsprechende nichtautonome Definition ist wie folgt gegeben:

**2.2.3 Definition:** Eine invariante nichtautonome Menge  $A$  heißt kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $K$ , falls es eine kompakte Menge  $K \subset X$  mit der Eigenschaft gibt, dass für jede kompakte Menge  $C \subset X$  eine Zahl  $\mathcal{T}(K, C) > 0$  existiert, so dass für jedes  $p \in P$  die Beziehung

$$\varphi(t, \theta_{-t}p)(A(\theta_{-t}p) \cap K) \supset A(p) \cap C \quad \text{für alle } t > \mathcal{T}(K, C) \quad (2.5)$$

erfüllt ist.

Anschaulich bedeutet die kompakte Erzeugbarkeit der nichtautonomen Menge  $A$ , dass jeder kompakte Teil jeder Faser von  $A$  durch das nichtautonome dynamische System aus der kompakten Menge  $K$  in Vorwärtszeit „erzeugt“ wird.

#### 2.2.4 Bemerkungen:

- (i) Im Gegensatz zur autonomen Situation (siehe Bemerkung 2.1.4 (i)) ist eine invariante und kompakte nichtautonome Menge im Allgemeinen nicht kompakt erzeugbar. Wir betrachten hierzu die Lösungskurve  $A_\xi := \{(t, \xi e^{-t}) : t \in \mathbb{R}\}$  ( $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ) des nichtautonomen dynamischen Systems, das aus der skalaren Differenzialgleichung  $\dot{x} = -x$  hervorgeht. Für jede kompakte Menge  $K \subset \mathbb{R}$  gibt es eine Zahl  $\tau < 0$  mit  $A_\xi(t) \cap K = \emptyset$  für alle  $t < \tau$ .  $A_\xi$  ist daher nicht kompakt erzeugbar.
- (ii) Jede kompakte Obermenge eines Erzeugers einer kompakt erzeugbaren Menge  $A$  ist wieder ein Erzeuger von  $A$ .
- (iii) Ist  $K$  ein Erzeuger von  $A$ , so gilt für jedes  $p \in P$

$$A(p) = \bigcup_{t>0} \varphi(t, \theta_{-t}p)(A(\theta_{-t}p) \cap K).$$

In der nichtautonomen Theorie wird zwischen zwei verschiedenen Attraktionsarten, nämlich der Pullback- und der Forward-Attraktion, unterschieden. Demzufolge werden in der nächsten Definition zwei verschiedene Attraktionssysteme einer invarianten und abgeschlossenen nichtautonomen Menge eingeführt.

**2.2.5 Definition:** Gegeben sei eine invariante und abgeschlossene nichtautonome Menge  $A$ . Sei  $\mathcal{D}_P(A)$  die Menge aller kompakten nichtautonomen Mengen  $C_P$ , für die  $\sup D_{\max}(p, C_P(p)) = \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, \theta_{-t}p)C_P(\theta_{-t}p) | A(p)) = 0 \quad \text{für alle } p \in P \quad (2.6)$$

*gilt. Wir nennen  $\mathcal{D}_P(A)$  das Pullback-Attraktionssystem von  $A$ .  
Ferner sei mit  $\mathcal{D}_F(A)$  die Menge aller kompakten nichtautonomen Mengen  $C_F$  bezeichnet, für die  $\sup D_{max}(p, C_F(p)) = \infty$  und*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, p)C_F(p)|A(\theta_t p)) = 0 \quad \text{für alle } p \in P \quad (2.7)$$

*gilt. Wir nennen  $\mathcal{D}_F(A)$  das Forward-Attraktionssystem von  $A$ .*

Ohne Umschweife - für ein Beispiel zu den Attraktionssystemen sei auf Beispiel 2.2.9 verwiesen - können wir nun erklären, was wir unter nichtautonomen Attraktoren verstehen.

**2.2.6 Definition:** *Eine invariante, abgeschlossene und kompakt erzeugbare nichtautonome Menge  $A$  heißt lokaler  $\mathcal{D}_P(A)$ -Pullback-Attraktor bzw. lokaler  $\mathcal{D}_F(A)$ -Forward-Attraktor, falls es eine Menge  $C_P \in \mathcal{D}_P(A)$  bzw.  $C_F \in \mathcal{D}_F(A)$  und ein  $\delta > 0$  mit*

$$d(C_P(p)|A(p)) > \delta \quad \text{bzw.} \quad d(C_F(p)|A(p)) > \delta \quad \text{für alle } p \in P \quad (2.8)$$

*gibt. Darüber hinaus heißt eine invariante, abgeschlossene und kompakt erzeugbare nichtautonome Menge  $A$  globaler Pullback-Attraktor bzw. globaler Forward-Attraktor, falls für jede kompakte Menge  $C \subset X$*

$$P \times C \in \mathcal{D}_P(A) \quad \text{bzw.} \quad P \times C \in \mathcal{D}_F(A)$$

*erfüllt ist. Gelten die Grenzwertbeziehungen (2.6) bzw. (2.7) in der Definition 2.2.5 sogar gleichmäßig in  $p \in P$ , so nennen wir den entsprechenden Attraktor gleichmäßig in  $p$ .*

### 2.2.7 Bemerkungen:

- (i) Der in Definition 2.2.6 eingeführte Attraktorbegriff unterscheidet sich etwas von der derzeit in der Literatur gebräuchlichen Definition eines nichtautonomen Attraktors (siehe hierzu ARNOLD [1, Seite 483], KLOEDEN [25] oder KLOEDEN, KELLER, SCHMALFUSS [26]). Zum einen verzichten wir, wie auch bei den autonomen Attraktoren, auf die Kompaktheit eines Attraktors und fordern statt dessen die Abgeschlossenheit und die kompakte Erzeugbarkeit. Darüber hinaus wird üblicherweise eine Menge  $A$  bereits  $\mathcal{D}$ -Attraktor genannt, falls alle Mengen aus  $\mathcal{D}$  angezogen werden. Der hier verwendete Begriff beruht jedoch darauf, dass das Attraktionssystem genau die Mengen, die der Attraktor anzieht, enthält.
- (ii) Die Bedingung (2.8) stellt sicher, dass es auch Mengen außerhalb des Attraktors gibt, die angezogen werden. Eine Abschwächung auf  $\delta = 0$  ist nicht sinnvoll, da im Fall der Pullback-Attraktion bei der skalaren Differenzgleichung  $x' = x$  die Menge  $\mathbb{Z} \times C$  für jede kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}$  ein lokaler Pullback-Attraktor wäre.
- (iii) Ist der nichtautonome Attraktor gleichmäßig in  $p \in P$ , so fallen die Begriffe Pullback-Attraktor und Forward-Attraktor zusammen.

- (iv) Interpretiert man ein dynamisches System durch die Definitionen  $P := \{p_0\}$  und  $\theta(t, p_0) := p_0$  ( $t \in \mathbb{T}$ ) als ein nichtautonomes dynamisches System und ist  $A$  ein autonomer Attraktor, so ist  $\{p_0\} \times A$  sowohl ein Pullback-, als auch ein Forward-Attraktor.

Wir beschäftigen uns nun mit der Frage nach der Eindeutigkeit von nichtautonomen Attraktoren. Im Fall der Pullback-Attraktion erhalten wir das folgende erfreuliche Resultat:

**2.2.8 Satz (Eindeutigkeit von Pullback-Attraktoren):** Gegeben seien entweder zwei lokale  $\mathcal{D}$ -Pullback-Attraktoren  $A$  und  $B$  oder zwei globale Pullback-Attraktoren  $A$  und  $B$ . In beiden Fällen gilt  $A = B$ .

**Beweis:** Wir führen den Beweis indirekt und nehmen  $A \neq B$  an. Dann existiert ein  $p_0 \in P$  mit  $A(p_0) \neq B(p_0)$ . Ohne Einschränkung gibt es ein  $x_0 \in A(p_0) \setminus B(p_0)$ , woraus  $d(x_0, B(p_0)) > 0$  wegen der Abgeschlossenheit von  $B$  folgt. Da  $A$  kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $K$  ist, gibt es für die kompakte Menge  $C := \{x_0\}$  eine Zahl  $\mathcal{T}(K, C) > 0$  mit

$$\varphi(t, \theta_{-t}p_0)(A(\theta_{-t}p_0) \cap K) \supset A(p_0) \cap C = \{x_0\} \quad \text{für alle } t > \mathcal{T}(K, C). \quad (2.9)$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall:  $A$  und  $B$  sind lokale  $\mathcal{D}$ -Pullback-Attraktoren, es gilt also  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ . Die Beziehung (2.9) und das Auswahlaxiom sichern nun die Existenz einer Funktion  $g_1 : \{i \in \mathbb{N} : i > \mathcal{T}(K, C)\} \rightarrow K$  mit  $g_1(i) \in ((\varphi(i, \theta_{-i}p_0))^{-1}(\{x_0\})) \cap (A(\theta_{-i}p_0) \cap K)$ . Wir setzen

$$\tilde{P} := \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N}, \\ i > \mathcal{T}(K, C)}} \{\theta_{-i}p_0\}$$

und definieren die nichtleere Menge

$$M(p) := \overline{\bigcup_{\substack{i > \mathcal{T}(K, C), \\ p = \theta_{-i}p_0}} \{g_1(i)\}} \quad \text{für alle } p \in \tilde{P}.$$

$M(p)$  ( $p \in \tilde{P}$ ) ist als abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge  $K$  kompakt. Wir wenden abermals das Auswahlaxiom an und erhalten eine Funktion  $g_2 : P \setminus \tilde{P} \rightarrow X$  mit  $g_2(p) \in A(p)$ . Durch die Ergänzung

$$M(p) := \{g_2(p)\} \quad \text{für alle } p \in P \setminus \tilde{P}$$

wird  $M$  zu einer kompakten nichtautonomen Menge. Für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > \mathcal{T}(K, C)$  gilt nun  $x_0 \in \varphi(k, \theta_{-k}p_0)M(\theta_{-k}p_0)$ . Hieraus folgt  $M \notin \mathcal{D}(B)$ , da

$$d(\varphi(k, \theta_{-k}p_0)M(\theta_{-k}p_0) | B(p_0)) \geq d(x_0, B(p_0)) > 0$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$  mit  $k > \mathcal{T}(K, C)$  erfüllt ist. Wegen  $M \subset A$  erhalten wir jedoch die widersprüchliche Aussage  $M \in \mathcal{D}(A)$ . Es folgt  $A = B$ .

2. Fall:  $A$  und  $B$  sind zwei globale Pullback-Attraktoren. Aus (2.9) folgt unmittelbar

$P \times K \notin \mathcal{D}(B)$ , denn es gilt für alle  $t > \mathcal{T}(K, C)$

$$\begin{aligned} d(\varphi(t, \theta_{-t}p_0)K|B(p_0)) &\geq d(\varphi(t, \theta_{-t}p_0)(A(\theta_{-t}p_0) \cap K)|B(p_0)) \\ &\stackrel{(2.9)}{\geq} d(x_0, B(p_0)) > 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Es folgt  $A = B$ .  $\square$

Das folgende Beispiel zeigt unter anderem, dass wir von Forward-Attraktoren im Allgemeinen keine Eindeutigkeit erwarten können:

**2.2.9 Beispiel:** Für die von den reellen Parametern  $a, b > 0$  abhängige invertierbare nichtautonome Differenzgleichung

$$x' = \begin{cases} \frac{|x|}{a}x & : k < 0 \\ bx & : k \geq 0 \end{cases}$$

auf dem Phasenraum  $X = \mathbb{R}$  weisen wir die folgenden Aussagen nach:

- (a) Die Menge  $A := \mathbb{Z} \times \{0\}$  ist ein lokaler Pullback-Attraktor mit  $\mathbb{Z} \times C \in \mathcal{D}_P(A)$  für jede kompakte Menge  $C \subset U_a(0)$ .
- (b) Es gibt keinen globalen Pullback-Attraktor.
- (c) Ist  $b < 1$ , so ist jede Menge  $A_\xi := \{(k, \varphi(k, 0)\xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : k \in \mathbb{Z}\}$  ( $\xi \in \mathbb{R}$ ) ein globaler Forward-Attraktor.
- (d) Ist  $b \geq 1$ , so gibt es keinen globalen Forward-Attraktor.

(a) Offensichtlich ist die nichtautonome Menge  $A$  invariant, abgeschlossen und kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $\{0\}$ . Sei  $C \subset U_a(0)$  eine beliebige kompakte Menge. Wir zeigen nun, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\varphi(k, \kappa - k)C|A(\kappa)) = 0 \quad \text{für alle } \kappa \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist. Sei hierzu  $\kappa \in \mathbb{Z}$  beliebig. Aus der Kompaktheit von  $C$  folgt

$$M := \max\{|x| : x \in C\} < a.$$

Mit vollständiger Induktion erhält man daher für alle ganzen Zahlen  $k_0 \leq 0$  und  $k > 0$  die Ungleichung

$$d(\varphi(k, k_0 - k)C|\{0\}) \leq \left(\frac{M}{a}\right)^k. \quad (2.10)$$

Ist  $\kappa \leq 0$ , so folgt die Behauptung unmittelbar aus (2.10) durch den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  mit  $k_0 := \kappa$ . Im Fall  $\kappa > 0$  ergibt sich mit (2.10) wegen  $\varphi(k, k_1)x = b^k x$  für alle ganzen Zahlen  $k, k_1 \geq 0$  unter Anwendung der Kozykluseigenschaft für alle  $k \geq \kappa$  die Ungleichung

$$d(\varphi(k, \kappa - k)C|\{0\}) = b^\kappa d(\varphi(k - \kappa, \kappa - k)C|\{0\}) \leq b^\kappa \left(\frac{M}{a}\right)^{k - \kappa},$$

die zur Behauptung durch den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  führt.

(b) Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an,  $A$  sei ein globaler Pullback-Attraktor. Wegen (2.8) ist  $A(0) \subsetneq \mathbb{R}$ , es gibt also ein  $x_0 \notin A(0)$  und, da  $A(0)$  abgeschlossen ist, ein  $\varepsilon > 0$  mit  $U_\varepsilon(x_0) \cap A(0) = \emptyset$ . Wir betrachten die Menge  $[-2a, 2a] \subset \mathbb{R}$ . Mit vollständiger Induktion gilt

$$\varphi(k, -k)[-2a, 2a] \supset [-2^k a, 2^k a] \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt die Existenz einer Zahl  $k_0 > 0$  mit

$$\varphi(k, -k)[-2a, 2a] \supset [-2^k a, 2^k a] \supset [-2^{k_0} a, 2^{k_0} a] \supset \{x_0\} \quad \text{für alle } k > k_0.$$

Wir erhalten schließlich

$$d(\varphi(k, -k)[-2a, 2a] | A_1(0)) \geq d(x_0, A_1(0)) \geq \varepsilon \quad \text{für alle } k > k_0,$$

was auf  $\mathbb{Z} \times [-2a, 2a] \notin \mathcal{D}(A)$ , einen Widerspruch, führt.

(c) Offensichtlich ist die nichtautonome Menge  $A_\xi$  ( $\xi \in \mathbb{R}$ ) invariant und abgeschlossen. Aus

$$\sup \{ \max \{|x| : x \in A_\xi(k)\} : k \in \mathbb{Z} \} \leq \max \{a, |\xi|\}$$

folgt, dass  $A_\xi$  kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $[-\max\{a, |\xi|\}, \max\{a, |\xi|\}]$  ist. Sei  $C \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$  eine beliebige kompakte nichtautonome Menge. Wir zeigen nun, dass die Beziehung

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\varphi(k, \kappa)C(\kappa) | A_\xi(\kappa + k)) = 0 \quad \text{für alle } \kappa \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist. Im Fall von  $\kappa < 0$  ist wegen der Stetigkeit der rechten Seite die Menge  $\varphi(-\kappa, \kappa)C(\kappa)$  wieder kompakt. Wegen der Kozykluseigenschaft reicht es daher, den Fall  $\kappa \geq 0$  zu betrachten. Da  $C(\kappa)$  beschränkt ist, gibt es ein  $M > 0$  mit  $C(\kappa) \subset U_M(0)$ . Für alle  $k > 0$  gilt daher

$$\varphi(k, \kappa)C(\kappa) \subset \varphi(k, \kappa)[-M, M] = [-b^k M, b^k M].$$

Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann gibt es ein  $k_0 > 0$ , so dass für alle  $k > k_0$

$$\varphi(k, \kappa)C(\kappa) \subset U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \quad \text{und} \quad |\xi|b^{\kappa+k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Für alle  $x \in \varphi(k, \kappa)C(\kappa)$  ( $k > k_0$ ) erhalten wir daher die Abschätzung

$$d(x, A_\xi(\kappa + k)) = |x - \xi b^{\kappa+k}| \leq |x| + |\xi|b^{\kappa+k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Durch Maximumsbildung (siehe Lemma 1.1.1) über die kompakte Menge  $\varphi(k, \kappa)C(\kappa)$  folgt

$$d(\varphi(k, \kappa)C(\kappa) | A(\kappa + k)) < \varepsilon \quad \text{für alle } k > k_0.$$

$A_\xi$  ist also ein nichteindeutiger globaler Forward-Attraktor.

(d) Wie in (b) zeigt man, dass es für den Fall  $b \geq 1$  keinen globalen Forward-Attraktor geben kann.

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Untersuchung, ob die Nichteindeutigkeit von Forward-Attraktoren mit der speziellen Definition der kompakten Erzeugbarkeit zusammenhängt.

**2.2.10 Bemerkung:** Bei der Definition der kompakten Erzeugbarkeit wurde eine zur Pullback-Attraktion ähnliche Konstruktion verwendet: Ausgehend von einem festen Punkt  $p \in P$  wird die  $\theta_{-t}p$ -Faser ( $t > 0$ ) einer nichtautonomen Menge durch  $\varphi(t, \theta_{-t}p)$  abgebildet. Diese Analogie ist jedoch nicht ausschlaggebend für die Nichteindeutigkeit von Forward-Attraktoren, denn fordert man in Definition 2.2.3 statt (2.5) die zur Forward-Attraktion passendere Bedingung

$$\varphi(t, p)(A(p) \cap K) \supset A(\theta_t p) \cap C \quad \text{für alle } t > \mathcal{T}(K, C),$$

so wären die Mengen  $A_\xi$  ( $\xi \in \mathbb{R}$ ) aus Beispiel 2.2.9 (c) auch nach dieser Definition kompakt erzeugbar. Da jedoch jede dieser Mengen nach Beispiel 2.2.9 (c) ein globaler Forward-Attraktor ist, würde diese alternative Definition der kompakten Erzeugbarkeit auch keine Eindeutigkeit für Forward-Attraktoren liefern.



## Kapitel 3

# Numerische Approximation von Pullback-Attraktoren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit Algorithmen zur numerischen Approximation von Pullback-Attraktoren. Grundlegend für unsere Untersuchungen wird der in Abschnitt 3.1 eingeführte Fortsetzungsalgorithmus sein. Die formale Behandlung dieses Algorithmus wurde für zufällige dynamische Systeme in KELLER, OCHS [24] durchgeführt. Hieraus stammt auch ein Konvergenzresultat, das wir in Abschnitt 3.2 an unsere Situation anpassen werden. Bei praktischen Problemstellungen ist es jedoch aus Gründen des Rechenaufwands sinnvoll, anstelle des Fortsetzungsalgorithmus den sogenannten Unterteilungsalgorithmus zu verwenden. In Abschnitt 3.3 weisen wir seine Konvergenz nach und untersuchen anhand eines Beispiels die Approximationsgüte im Vergleich zum Fortsetzungsalgorithmus.

Es ist erwähnenswert, dass sich die Berechnung autonomer Attraktoren unmittelbar aus unseren Überlegungen ergibt, da autonome Attraktoren als Pullback-Attraktoren interpretiert werden können (siehe Bemerkung 2.2.7 (iv)). Standardreferenzen für den autonomen Spezialfall sind die Artikel von DELLNITZ und HOHMANN [16, 17].

Grundlegend für dieses Kapitel ist ein stetiges nichtautonomes dynamisches System  $(\theta, \varphi)$  auf dem Phasenraum  $X = \mathbb{R}^N$  mit einem lokalen oder globalen Pullback-Attraktor  $A$ . Wie in Abschnitt 2.2 setzen wir voraus, dass der Basisfluss  $\theta$  invertierbar ist.

### 3.1 Der Fortsetzungsalgorithmus

Zur Approximation von Pullback-Attraktoren beschreiten wir in dieser Arbeit einen mengenorientierten Ansatz. Hierbei wählen wir eine kompakte Menge  $Q \subset \mathbb{R}^N$ , in der wir die Fasern des Pullback-Attraktors  $A$  berechnen wollen. Anschließend zerlegen wir  $Q$  in endlich viele Teilmengen. Eine mögliche Approximation ist dann durch die Vereinigung eines Teils dieser kleinen Mengen gegeben. Diese Vorgehensweise wird durch die folgenden Definitionen präzisiert.

**3.1.1 Definition:** Das endliche Mengensystem  $\mathcal{B} = \{B_i \subset Q : i \in \{1, \dots, n\}\}$  von Teilmengen einer kompakten Menge  $Q \subset \mathbb{R}^N$  heißt Zerlegung von  $Q$ , falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$(i) \bigcup_{i=1}^n B_i = Q,$$

$$(ii) \text{int } B_i \cap \text{int } B_j = \emptyset \text{ für } 1 \leq i < j \leq n,$$

(iii)  $B_i$  ist zusammenhängend, abgeschlossen und nichtleer ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ).

Die Menge  $Q$  nennen wir Hauptbox; die Elemente der Zerlegung  $\mathcal{B}$  bezeichnen wir als Boxen.

Wir setzen

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}) := \{B_I := \bigcup_{i \in I} B_i : I \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

$\mathcal{P}(\mathcal{B})$  ist die Menge aller durch die Zerlegung  $\mathcal{B}$  ermöglichten Approximationen. Unter dem Durchmesser einer Zerlegung  $\mathcal{B}$  verstehen wir

$$\text{diam } \mathcal{B} := \max \{ \text{diam } B_i : i \in \{1, \dots, n\} \}.$$

Wir nennen eine Zerlegung  $\mathcal{B}_1$  feiner als eine Zerlegung  $\mathcal{B}_2$ , falls  $\mathcal{P}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{P}(\mathcal{B}_1)$ .

Bei der technischen Realisation von Approximationen werden vielfach folgende Boxen eingesetzt:

**3.1.2 Definition:** Ein  $N$ -Quader mit Mittelpunkt  $c \in \mathbb{R}^N$  und Radius  $r \in (\mathbb{R}^+)^N$  ist durch

$$Q(c, r) := [c_1 - r_1, c_1 + r_1] \times \dots \times [c_N - r_N, c_N + r_N] \subset \mathbb{R}^N$$

gegeben.

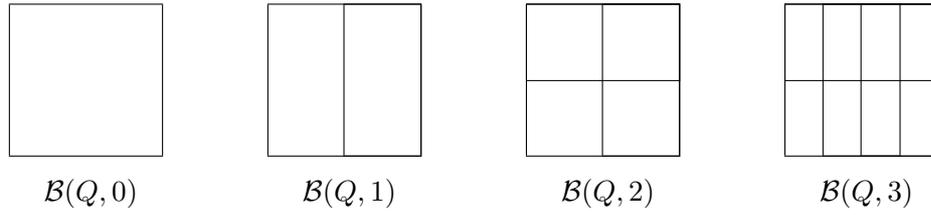
Es ist naheliegend,  $N$ -Quader in der folgenden Weise zu zerlegen:

**3.1.3 Definition:** Zu einer vorgegebenen Hauptbox  $Q = Q(c, r)$  mit  $c, r \in \mathbb{R}^N$  und einer Folge  $s : \mathbb{N} \rightarrow \{1, \dots, N\}$  definieren wir induktiv

$$\mathcal{B}(Q, 0) := Q,$$

$$\mathcal{B}(Q, i) := \left\{ Q\left(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{s(i)} \pm \frac{1}{2} \tilde{r}_{s(i)}, \dots, \tilde{c}_N, (\tilde{r}_1, \dots, \frac{1}{2} \tilde{r}_{s(i)}, \dots, \tilde{r}_N)\right) : \right. \\ \left. Q(\tilde{c}, \tilde{r}) \in \mathcal{B}(Q, i-1) \right\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, sind die Mengensysteme  $\mathcal{B}(Q, i)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) Zerlegungen von  $Q$ . In jedem Schritt wird jeder  $N$ -Quader der Zerlegung in der Koordinatenrichtung, die durch die Folge  $s$  gegeben ist, halbiert. Es gilt daher  $|\mathcal{B}(Q, i)| = 2^i$  ( $i \in \mathbb{N}$ ). Die folgende Abbildung verdeutlicht die Entstehung der Zerlegungen für  $s(i) := ((i+1) \bmod 2) + 1$  und  $N = 2$ :

Abbildung 3.1: Zerlegungen der Box  $Q = Q(c, r)$ 

Die folgende Definition, in der das System  $(\theta, \varphi)$  in geeigneter Weise diskretisiert wird, ist SIEGMUND [36] entnommen (siehe auch KELLER, OCHS [24]):

**3.1.4 Definition:** Gegeben seien eine kompakte Menge  $Q$  mit  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$ , eine  $n$ -elementige Zerlegung  $\mathcal{B}$  und eine Schrittweite  $T > 0$  in  $\mathbb{T}$ . Die Abbildungen

$$\hat{\theta} : \mathbb{Z} \times P \rightarrow P \quad \text{und} \quad \hat{\varphi} : \mathbb{Z}_0^+ \times P \times \mathcal{P}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{B})$$

werden wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{kp} &:= \theta_{kTp} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ und } p \in P, \\ \hat{\varphi}(0, p)B_I &:= B_I \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } I \subset \{1, \dots, n\}, \\ \hat{\varphi}(1, p)B_I &:= B_J \quad \text{für alle } p \in P \text{ und } I \subset \{1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

wobei  $J := \{j \in \{1, \dots, n\} : \varphi(T, p)B_I \cap B_j \neq \emptyset\}$ ,  
sowie induktiv für  $k \geq 2$ ,  $p \in P$  und  $I \subset \{1, \dots, n\}$

$$\hat{\varphi}(k, p)B_I := \hat{\varphi}(1, \theta_{(k-1)Tp})(\hat{\varphi}(k-1, p)B_I). \quad (3.1)$$

Das Paar  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$  nennen wir Box-NDS.

Um das Bild eines Zeitschritts des Box-NDS einer Kollektion von Boxen in der  $p$ -Faser zu erhalten, wird zunächst mit dem nichtautonomen dynamischen System  $(\theta, \varphi)$  abgebildet und anschließend die kleinste Überdeckung aus  $\mathcal{P}(\mathcal{B})$  gewählt (siehe Abbildung 3.2).

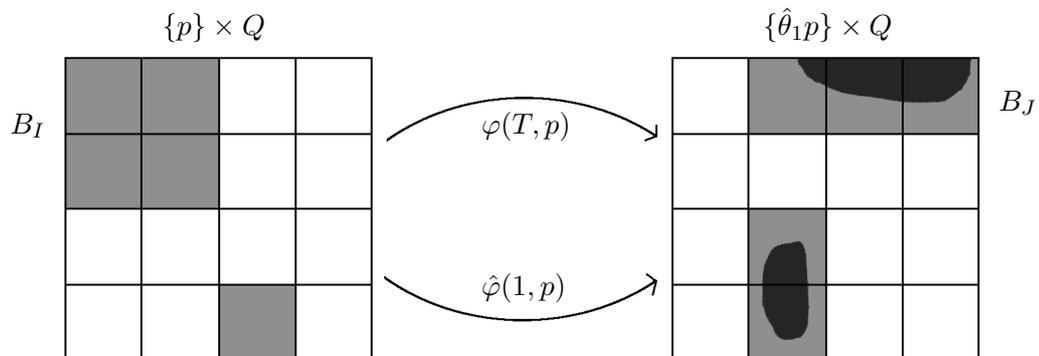


Abbildung 3.2: Wirkungsweise des Box-NDS

**3.1.5 Bemerkungen:**

- (i) Das Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$  hängt von der kompakten Menge  $Q$ , deren Zerlegung  $\mathcal{B}$ , der Schrittweite  $T$  und dem nichtautonomen dynamischen System  $(\theta, \varphi)$  ab.
- (ii) Das Box-NDS ist wohldefiniert, denn die Voraussetzung  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$  impliziert nach Definition 2.2.5  $\sup D_{max}(p, Q) = \infty$  für alle  $p \in P$ .
- (iii) Aus Formel (3.1) ist leicht zu sehen, dass das Box-NDS ein diskretes nichtautonomes dynamisches System ist.
- (iv) Man beachte, dass das Box-NDS nicht invertierbar ist, selbst wenn für das nichtautonome dynamische System  $(\theta, \varphi)$   $\mathbb{T} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  ist.

Das folgende Lemma vergleicht das nichtautonome dynamische System  $(\theta, \varphi)$  mit dem durch die Wahl von  $Q$ ,  $\mathcal{B} = \{B_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$  und  $T$  spezifizierten Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$ .

**3.1.6 Lemma:** *Es sei  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$  ein Box-NDS. Für alle  $p \in P$  und  $I \subset \{1, \dots, n\}$  gelten dann folgende Aussagen:*

- (i)  $\hat{\varphi}(1, p)B_I \supset Q \cap \varphi(T, p)B_I$ ,
- (ii)  $d(\hat{\varphi}(1, p)B_I | Q \cap \varphi(T, p)B_I) \leq \text{diam } \mathcal{B}$ .

**Beweis:** (i) Sei  $x \in Q \cap \varphi(T, p)B_I$  beliebig gewählt. Da  $\mathcal{B}$  eine Zerlegung von  $Q$  ist, gibt es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x \in B_i$ . Es gilt also  $\varphi(T, p)B_I \cap B_i \neq \emptyset$ , was auf  $i \in \{j \in \{1, \dots, n\} : \varphi(T, p)B_I \cap B_j \neq \emptyset\}$  führt. Daraus folgt  $x \in \hat{\varphi}(1, p)B_I$ .

(ii) Sei  $x \in \hat{\varphi}(1, p)B_I$  beliebig gewählt. Wir zeigen, dass  $d(x, Q \cap \varphi(T, p)B_I) \leq \text{diam } \mathcal{B}$  gilt, woraus sich die Behauptung durch Supremumsbildung über  $x \in \hat{\varphi}(1, p)B_I$  ergibt. Da  $\mathcal{B}$  eine Zerlegung von  $Q$  ist, gibt es ein  $i \in \{1, \dots, n\}$  mit  $x \in B_i$ . Es folgt  $i \in \{j \in \{1, \dots, n\} : \varphi(T, p)B_I \cap B_j \neq \emptyset\}$ , also existiert ein  $y \in \varphi(T, p)B_I \cap B_i$ . Hiermit ergibt sich  $d(x, Q \cap \varphi(T, p)B_I) \leq d(x, y) \leq \text{diam } B_i \leq \text{diam } \mathcal{B}$ .  $\square$

Die Idee des Fortsetzungsalgorithmus beruht auf Iterationen des Box-NDS. Genauer gilt:

**3.1.7 Fortsetzungsalgorithmus:** Zur Berechnung von  $A(\theta_{kT}p_0) \cap Q$  für  $p_0 \in P$  und  $k \in \{0, \dots, k_1\}$  wähle man einen Startwert  $k_0 < 0$  in  $\mathbb{Z}$  und setze  $B_{I_{k_0}} := Q$ . Die Approximationen der Mengen  $A(\theta_{kT}p_0) \cap Q$ , die durch  $B_{I_k}$  gegeben sind, erhält man wie folgt:

- (i) *Startschritte:* Für  $k \in \{k_0, \dots, -1\}$  berechne man

$$B_{I_{k+1}} = \hat{\varphi}(1, \hat{\theta}_k p_0)B_{I_k} = \hat{\varphi}(k - k_0 + 1, \hat{\theta}_{k_0} p_0)Q.$$

- (ii) *Fortsetzungsschritte:* Für  $k \in \{0, \dots, k_1 - 1\}$  berechne man

$$B_{I_{k+1}} = \hat{\varphi}(1, \hat{\theta}_k p_0)B_{I_k} = \hat{\varphi}(k - k_0 + 1, \hat{\theta}_{k_0} p_0)Q.$$

Die Mengen  $B_{I_k}$  ( $k \geq 0$ ) sollten gute Approximationen der jeweiligen Fasern des Pullback-Attraktors  $A$  in der Hauptbox  $Q$  sein. Der nächste Abschnitt wird uns zeigen, unter welchen Voraussetzungen dies der Fall ist.

## 3.2 Konvergenz des Fortsetzungsalgorithmus

In diesem Abschnitt untersuchen wir das Konvergenzverhalten des Fortsetzungsalgorithmus. Hierbei werden wir sehen, dass die Approximation im Hausdorff-Abstand erfolgt, falls  $Q$  und  $T$  groß genug gewählt sind.

**3.2.1 Satz (Konvergenz des Fortsetzungsalgorithmus):** Seien  $(\theta, \varphi)$  ein stetiges nichtautonomes dynamisches System mit einem Pullback-Attraktor  $A$  und  $Q \subset \mathbb{R}^N$  eine kompakte Menge, für die  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$  gilt. Weiterhin sei mit einer Schrittweite  $T > 0$  in  $\mathbb{T}$  und einer Zerlegung  $\mathcal{B}$  das Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$  definiert. Für ein fest gewähltes  $p_0 \in P$  gelten dann folgende Aussagen:

(i) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\kappa \in \mathbb{N}$  und ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $k \geq \kappa$  die Beziehung

$$d(\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k}p_0)Q | A(p_0) \cap Q) < \varepsilon$$

gilt, sofern  $\text{diam } \mathcal{B} \leq \delta$ ,  $\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k}p_0)Q \neq \emptyset$  und  $A(p_0) \cap Q \neq \emptyset$ .

(ii) Falls zusätzlich für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  die Beziehung

$$\varphi(T, \theta_{-jT}p_0)(A(\theta_{-jT}p_0) \cap Q) \cap Q = A(\theta_{-(j-1)T}p_0) \cap Q \quad (3.2)$$

erfüllt ist, folgt  $A(p_0) \cap Q \subset \hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k}p_0)Q$  und es gilt

$$d_H(\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k}p_0)Q, A(p_0) \cap Q) < \varepsilon.$$

**Beweis:** (i) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig. Ist die abgeschlossene Menge  $A(p_0) \setminus U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(A(p_0) \cap Q)$  leer, so setzen wir  $\hat{\varepsilon} := \frac{1}{2}\varepsilon$ . Ansonsten definieren wir

$$\hat{\varepsilon} := \frac{1}{2} \min \{ \varepsilon, \min \{ d(x, Q) : x \in A(p_0) \setminus U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(A(p_0) \cap Q) \} \} > 0. \quad (3.3)$$

Aus der Voraussetzung  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$  folgt die Existenz eines  $\tau > 0$  mit

$$d(\varphi(t, \theta_{-t}p_0)Q | A(p_0)) < \frac{1}{2}\hat{\varepsilon} \quad \text{für alle } t > \tau. \quad (3.4)$$

Wir wählen  $\kappa \in \mathbb{N}$  minimal mit  $\kappa T > \tau$  und definieren

$$\begin{aligned} C_\kappa &:= Q, \\ C_j &:= (\varphi(jT, \theta_{-jT}p_0))^{-1}(U_{\frac{1}{2}\hat{\varepsilon}(1+\frac{\kappa-j}{\kappa})}(A(p_0))) \cap Q \end{aligned}$$

für  $j = \kappa - 1, \kappa - 2, \dots, 0$ . Für jedes  $j \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$  gibt es wegen der Stetigkeit von  $(\theta, \varphi)$  und  $\sup D_{\max}(\theta_{-jT}p_0, Q) = \infty$  offene Mengen  $D_j \subset \mathbb{R}^N$  mit  $C_j = D_j \cap Q$ . Wegen der Stetigkeit von  $(\theta, \varphi)$  gilt weiterhin  $Q \cap \varphi(T, \theta_{-jT}p_0)\overline{C_j} \subset C_{j-1} = D_{j-1} \cap Q \subset D_{j-1}$ . Aus der Kompaktheit von  $Q \cap \varphi(T, \theta_{-jT}p_0)\overline{C_j}$  folgt nun

$$\delta_j := \min \{ d(x, Q \cap \varphi(T, \theta_{-jT}p_0)\overline{C_j}) : x \in \partial D_{j-1} \} > 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, \kappa\}.$$

Wir definieren  $\delta := \min \{\delta_j : j \in \{1, \dots, \kappa\}\}$  und erhalten damit

$$U_\delta(Q \cap \varphi(T, \theta_{-j} T p_0) C_j) \cap Q \subset C_{j-1} \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, \kappa\}. \quad (3.5)$$

Im Folgenden gelte  $\text{diam } \mathcal{B} \leq \delta$ . Für die Mengen  $Q_l := \hat{\varphi}(l, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q$  für  $l \in \{0, \dots, \kappa\}$  weisen wir durch vollständige Induktion nach, dass

$$Q_l \subset C_{\kappa-l} \quad \text{für alle } l \in \{0, \dots, \kappa\} \quad (3.6)$$

erfüllt ist. Offensichtlich gilt  $Q_0 = Q = C_\kappa$ . Nehmen wir nun an, es gelte  $Q_l \subset C_{\kappa-l}$  für ein festes  $l \in \{0, \dots, \kappa - 1\}$ . Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} Q_{l+1} &= \hat{\varphi}(l+1, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q \\ &= \hat{\varphi}(1, \hat{\theta}_{l-\kappa} p_0) Q_l \\ &\stackrel{3.1.6}{\subset} U_\delta(Q \cap \varphi(T, \theta_{-(\kappa-l)} T p_0) Q_l) \cap Q \\ &\subset U_\delta(Q \cap \varphi(T, \theta_{-(\kappa-l)} T p_0) C_{\kappa-l}) \cap Q \stackrel{(3.5)}{\subset} C_{\kappa-(l+1)}. \end{aligned}$$

Es folgt (3.6). Insbesondere gilt

$$Q_\kappa = \hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q \subset C_0 \subset U_\varepsilon(A(p_0)). \quad (3.7)$$

Sei nun  $x \in \hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q \neq \emptyset$  beliebig gewählt. Wegen (3.7) gilt  $d(x, A(p_0)) \leq \hat{\varepsilon}$ . Da  $A(p_0)$  abgeschlossen ist, gibt es ein  $y \in A(p_0)$  mit  $d(x, y) \leq \hat{\varepsilon}$ . Wegen (3.3) gilt sogar  $y \in U_{\frac{1}{2}\varepsilon}(A(p_0) \cap Q)$ . Es existiert daher ein  $\tilde{y} \in A(p_0) \cap Q$  mit  $d(y, \tilde{y}) < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Zusammenfassend gilt:  $d(x, \tilde{y}) \leq d(x, y) + d(y, \tilde{y}) < \hat{\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon \leq \varepsilon$ . Damit ergibt sich  $d(x, A(p_0) \cap Q) < \varepsilon$ . Nach Maximumsbildung (siehe Lemma 1.1.1) über die kompakte Menge  $\hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q$  folgt

$$d(\hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q | A(p_0) \cap Q) < \varepsilon.$$

Ist nun  $k > \kappa$ , dann gilt, da alle Bilder von  $\hat{\varphi}$  Teilmengen von  $Q$  sind,  $\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q = \hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) \hat{\varphi}(k-\kappa, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q \subset \hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q$ . Hieraus folgt

$$d(\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q | A(p_0) \cap Q) \leq d(\hat{\varphi}(\kappa, \hat{\theta}_{-\kappa} p_0) Q | A(p_0) \cap Q) < \varepsilon.$$

Damit ist (i) gezeigt.

(ii) Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass die Beziehung

$$A(\theta_{-(k-l)} T p_0) \cap Q \subset \hat{\varphi}(l, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q \quad (3.8)$$

für alle  $l \in \{0, \dots, k\}$  erfüllt ist. Zunächst ( $l = 0$ ) gilt  $A(\theta_{-k} T p_0) \cap Q \subset Q$ . Nehmen wir nun an, dass (3.8) für ein beliebiges und festes  $l \in \{0, \dots, k-1\}$  erfüllt ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} A(\theta_{-(k-(l+1))} T p_0) \cap Q &\stackrel{(3.2)}{=} \varphi(T, \theta_{-(k-l)} T p_0) (A(\theta_{-(k-l)} T p_0) \cap Q) \cap Q \\ &\stackrel{(3.8)}{\subset} \varphi(T, \theta_{-(k-l)} T p_0) (\hat{\varphi}(l, \theta_{-k} T p_0) Q) \cap Q \\ &\stackrel{3.1.6}{\subset} \hat{\varphi}(1, \hat{\theta}_{-(k-l)} p_0) (\hat{\varphi}(l, \theta_{-k} T p_0) Q) \\ &= \hat{\varphi}(l+1, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q. \end{aligned}$$

Speziell ( $l = k$ ) gilt  $A(p_0) \cap Q \subset \hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q$ . Hieraus folgt

$$d(A(p_0) \cap Q | \hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k} p_0) Q) = 0,$$

was unter Verwendung von (i) die Behauptung impliziert.  $\square$

### 3.2.2 Bemerkungen:

- (i) Die Aussage (i) des Konvergenzsatzes wurde für kompakte Pullback-Attraktoren invertierbarer zufälliger dynamischer Systeme in KELLER, OCHS [24] bewiesen. In SIEGMUND [36] wird eine zu (3.2) ähnliche Beziehung verwendet, um eine Approximation im Hausdorff-Abstand zu erhalten.
- (ii) Eine Verkleinerung der Schrittweite  $T$  hat in der Regel eine Verkleinerung von  $\delta$  zur Folge. Bei praktischen Anwendungen sollte  $T$  also möglichst groß gewählt werden.
- (iii) Die Bedingung (3.2) bedeutet anschaulich, dass beim Zeitschritt  $T$  ausgehend von der Faser  $A(\theta_{-jT} p_0)$  keine Information außerhalb der kompakten Menge  $Q$  benötigt wird, um die Faser  $A(\theta_{-(j-1)T} p_0)$  in  $Q$  zu erhalten. In DELLNITZ, HOHMANN [17] wird zu dieser Thematik ein autonomer Attraktor betrachtet, der ein heterokliner Orbit ist (siehe Abbildung 3.3).

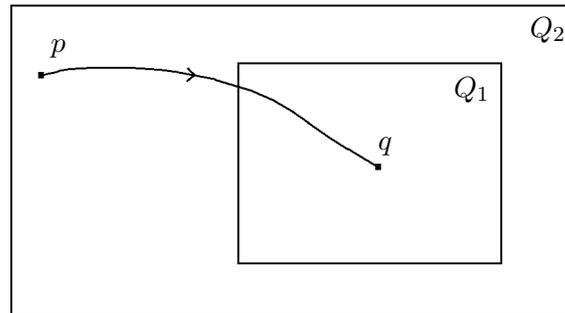


Abbildung 3.3: Heterokliner Orbit als autonomer Attraktor

Ist  $Q_1$  die Hauptbox, so ist sicherlich die Bedingung (3.2) verletzt, da die Dynamik auf dem Attraktor in die Box  $Q_1$  hineinführt. Wählen wir  $Q_2$ , so erfolgt die Approximation nach dem Konvergenzsatz im Hausdorff-Abstand. In DELLNITZ, HOHMANN [17] wird gezeigt, dass ein zur Hauptbox relativer globaler Attraktor im Hausdorff-Abstand approximiert wird. Bei Wahl von  $Q_1$  ist dieser relative globale Attraktor nicht der Teil des heteroklinen Orbits in  $Q_1$ , sondern lediglich die einpunktige Menge  $\{q\}$ .

- (iv) In dem Konvergenzsatz werden eventuelle Diskretisierungsfehler durch ein Integrationsverfahren nicht berücksichtigt.

Das folgende Korollar besagt, dass bei geeigneter Wahl von  $Q$  und  $T$  die Konvergenz im Hausdorff-Abstand erfolgt.

**3.2.3 Korollar (Konvergenz im Hausdorff-Abstand):** Zusätzlich zu den Voraussetzungen in Satz 3.2.1 sei  $Q$  ein Erzeuger von  $A$  und  $T > \mathcal{T}(Q, Q)$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es dann ein  $\kappa \in \mathbb{N}$  und ein  $\delta > 0$ , so dass für alle  $k \geq \kappa$  die Beziehung

$$d_H(\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k} p_0)Q, A(p_0) \cap Q) < \varepsilon$$

im Fall von  $\text{diam } \mathcal{B} \leq \delta$  erfüllt ist.

**Beweis:** Wir zeigen, dass die Beziehung (3.2) aus Satz 3.2.1 erfüllt ist. Da  $Q$  ein Erzeuger von  $A$  und  $T > \mathcal{T}(Q, Q)$  ist, folgt für alle  $j \in \{1, \dots, k\}$  die Beziehung

$$\varphi(T, \theta_{-jT} p_0)(A(\theta_{-jT} p_0) \cap Q) \supset A(\theta_{-(j-1)T} p_0) \cap Q,$$

die sich äquivalent zu

$$\varphi(T, \theta_{-jT} p_0)(A(\theta_{-jT} p_0) \cap Q) \cap Q \supset A(\theta_{-(j-1)T} p_0) \cap Q$$

umformen lässt. Weiterhin gilt wegen der Invarianz von  $A$

$$\begin{aligned} \varphi(T, \theta_{-jT} p_0)(A(\theta_{-jT} p_0) \cap Q) \cap Q &\subset \varphi(T, \theta_{-jT} p_0)(A(\theta_{-jT} p_0)) \cap Q \\ &= A(\theta_{-(j-1)T} p_0) \cap Q. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\varphi(T, \theta_{-jT} p_0)(A(\theta_{-jT} p_0) \cap Q) \cap Q = A(\theta_{-(j-1)T} p_0) \cap Q.$$

Der Satz 3.2.1 liefert die Behauptung, da  $A(p_0) \cap Q \neq \emptyset$  ( $Q$  ist ein Erzeuger von  $A$ ) und  $\hat{\varphi}(k, \hat{\theta}_{-k} p_0)Q \supset A(p_0) \cap Q \neq \emptyset$  gilt.  $\square$

**3.2.4 Bemerkung:** Es ist stets möglich, die Fasern eines Pullback-Attraktors in einer kompakten Menge  $Q$  im Hausdorff-Abstand zu approximieren. Dies kann durch Erweiterung von  $Q$  zu einem Erzeuger (siehe Bemerkung 2.2.4 (ii)) und durch Vergrößerung der Schrittweite  $T$  erreicht werden.

Bevor wir uns mit dem Unterteilungsalgorithmus beschäftigen, betrachten wir ein Beispiel zur Illustration der Konvergenz des Fortsetzungsalgorithmus. Die Berechnungen wurden mit dem Computerprogramm GAIO (siehe Kapitel 4) durchgeführt.

**3.2.5 Beispiel:** Gegeben sei die autonome Differenzgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f(x, y) := \begin{pmatrix} 0, 5x - y^2 \\ 2y \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

auf dem Phasenraum  $X = \mathbb{R}^2$ . Durch die lineare Transformation  $T : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , die durch

$$T(k, x, y) := \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{4}k) & \sin(\frac{1}{4}k) \\ -\sin(\frac{1}{4}k) & \cos(\frac{1}{4}k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

definiert ist, wandeln wir (3.9) in eine nichtautonome Differenzengleichung um. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T(k+1, f(T^{-1}(k, x, y))). \quad (3.10)$$

Für diese Differenzengleichung berechnen wir nun mit dem Fortsetzungsalgorithmus den Pullback-Attraktor in der Hauptbox  $Q = Q((0, 0), (4, 4))$ . Die Schrittweite setzen wir auf  $T = 1$ . Als Zerlegung wählen wir  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(Q, 18)$  mit  $2^{18}$  Boxen und  $\text{diam}(\mathcal{B}) \approx 0,022$ .

Die folgende Bilderserie veranschaulicht die Approximation durch den Algorithmus.

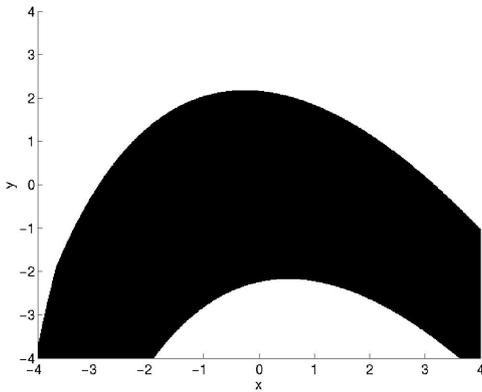


Abbildung 3.4: Faser  $p = -7$   
131.120 Boxen

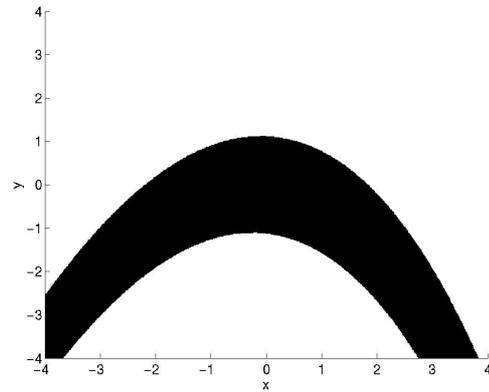


Abbildung 3.5: Faser  $p = -6$   
66.895 Boxen

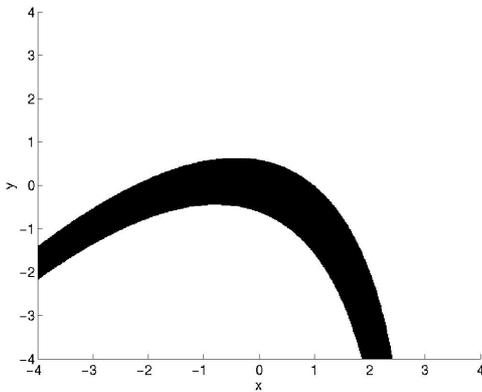


Abbildung 3.6: Faser  $p = -5$   
30.510 Boxen

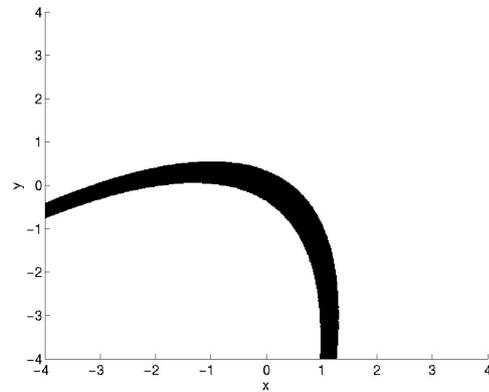


Abbildung 3.7: Faser  $p = -4$   
14.915 Boxen

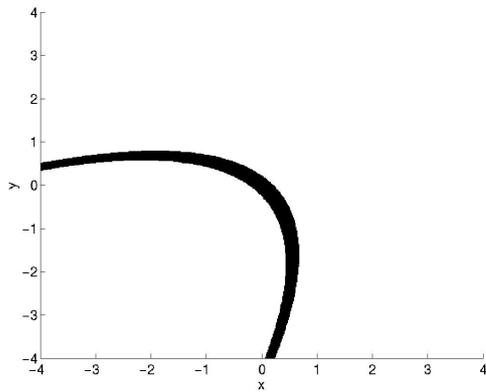


Abbildung 3.8: Faser  $p = -3$   
7.888 Boxen

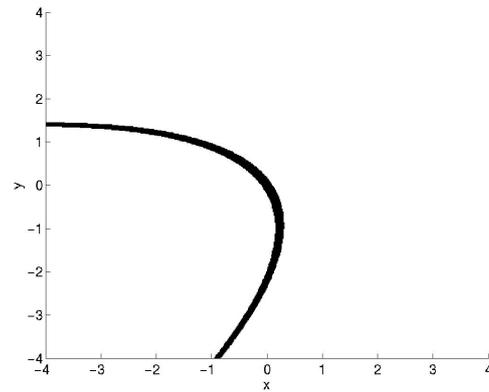


Abbildung 3.9: Faser  $p = -2$   
4.650 Boxen

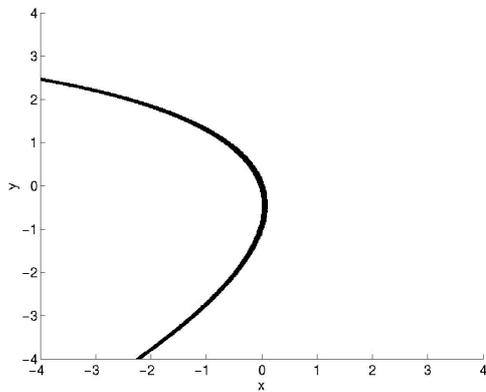


Abbildung 3.10: Faser  $p = -1$   
3.203 Boxen

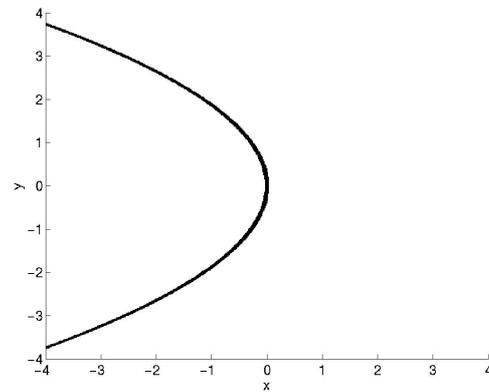


Abbildung 3.11: Faser  $p = 0$   
2.608 Boxen

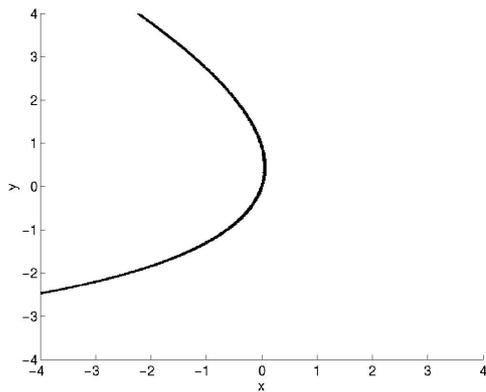


Abbildung 3.12: Faser  $p = 1$   
1.802 Boxen

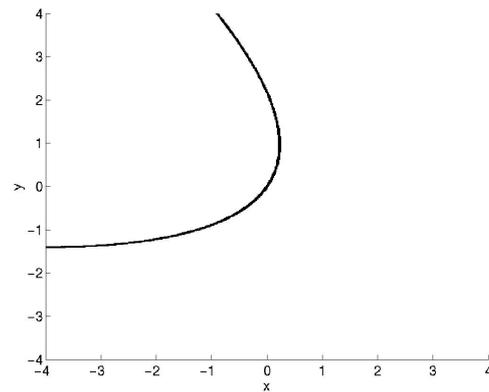


Abbildung 3.13: Faser  $p = 2$   
1.392 Boxen

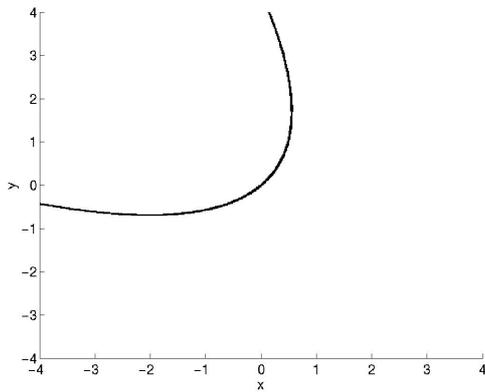


Abbildung 3.14: Faser  $p = 3$   
1.218 Boxen

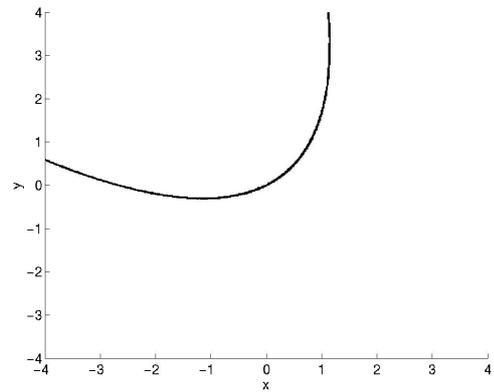


Abbildung 3.15: Faser  $p = 4$   
1.200 Boxen

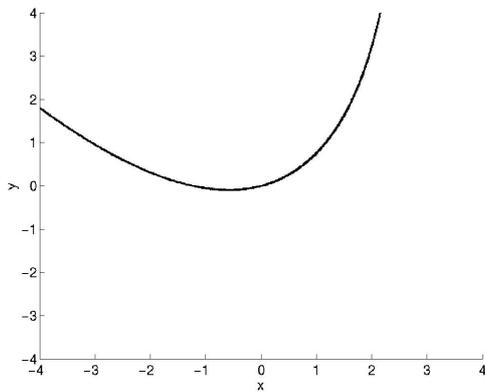


Abbildung 3.16: Faser  $p = 5$   
1.302 Boxen

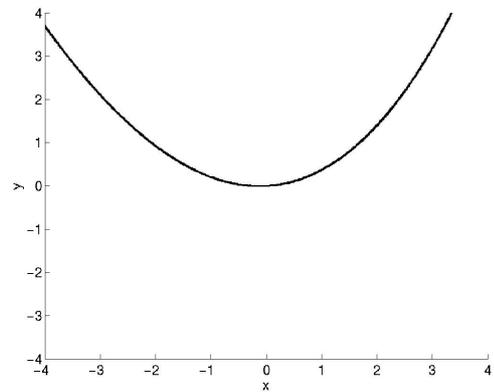


Abbildung 3.17: Faser  $p = 6$   
1.546 Boxen

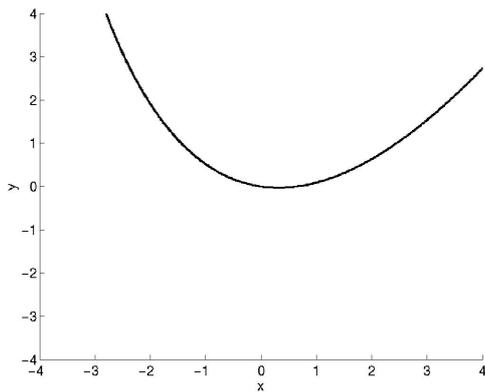


Abbildung 3.18: Faser  $p = 7$   
1.384 Boxen

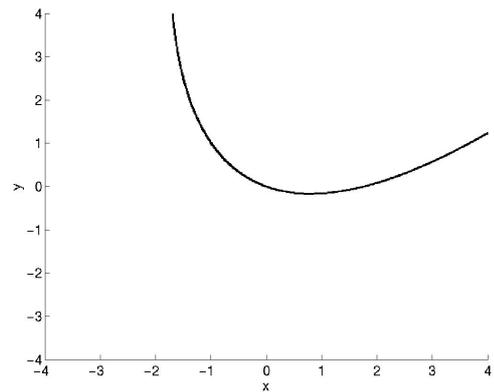


Abbildung 3.19: Faser  $p = 8$   
1.193 Boxen

### 3.3 Der Unterteilungsalgorithmus

In diesem Abschnitt formulieren wir eine Verallgemeinerung des Fortsetzungsalgorithmus, den Unterteilungsalgorithmus. Der wesentliche Unterschied zum Fortsetzungsalgorithmus besteht darin, dass wir nicht nur eine, sondern mehrere Zerlegungen der Hauptbox betrachten.

Gegeben seien eine kompakte Menge  $Q$  mit  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$  und eine Schrittweite  $T > 0$  in  $\mathbb{T}$ . Weiterhin seien

$$\mathcal{B}^{(i)} = \{B_j^{(i)} : j \in \{1, \dots, |\mathcal{B}^{(i)}|\}\} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

Zerlegungen von  $Q$ . Wir setzen voraus, dass  $\mathcal{B}^{(i+1)}$  feiner als  $\mathcal{B}^{(i)}$  ist. Das zur Zerlegung  $\mathcal{B}^{(i)}$  gehörige Box-NDS bezeichnen wir mit  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi}_i)$ . Der Phasenraum dieses Box-NDS ist  $\mathcal{P}(\mathcal{B}^{(i)})$ . Seine Elemente sind die Mengen  $B_I^{(i)}$  mit  $I \subset \{1, \dots, |\mathcal{B}^{(i)}|\}$ .

Im Gegensatz zum Fortsetzungsalgorithmus starten wir mit Unterteilungsschritten: Hierbei verfeinern wir schrittweise die Zerlegung und wenden das entsprechende Box-NDS an. Genauer gilt:

**3.3.1 Unterteilungsalgorithmus:** Zur Berechnung von  $A(\theta_{kT}p_0) \cap Q$  für  $p_0 \in P$  und  $k \in \{0, \dots, k_1\}$  wähle man einen Startwert  $k_0 < 1 - m$  in  $\mathbb{Z}$  und setze  $B_{I_{k_0}}^{(1)} := Q$ . Die Approximationen der Mengen  $A(\theta_{kT}p_0) \cap Q$  für  $k \in \{0, \dots, k_1\}$ , die durch  $B_{I_k}^{(m)}$  gegeben sind, erhält man wie folgt:

(i) *Startschritte:*

(a) *Unterteilungsschritte:* Für  $k \in \{k_0, \dots, k_0 + m - 2\}$

- wähle man  $\bar{I}_k \subset \{1, \dots, |\mathcal{B}^{(k-k_0+2)}|\}$  mit  $B_{\bar{I}_k}^{(k-k_0+2)} = B_{I_k}^{(k-k_0+1)}$ . Dies ist möglich, da  $\mathcal{B}^{(k-k_0+2)}$  feiner als  $\mathcal{B}^{(k-k_0+1)}$  ist;
- berechne man  $B_{I_{k+1}}^{(k-k_0+2)} = \hat{\varphi}_{k-k_0+2}(1, \hat{\theta}_k p_0) B_{\bar{I}_k}^{(k-k_0+2)}$ .

(b) *Weitere Startschritte:* Für  $k \in \{k_0 + m - 1, \dots, -1\}$  berechne man

$$B_{I_{k+1}}^{(m)} = \hat{\varphi}_m(1, \hat{\theta}_k p_0) B_{I_k}^{(m)}.$$

(ii) *Fortsetzungsschritte:* Für  $k \in \{0, \dots, k_1 - 1\}$  berechne man

$$B_{I_{k+1}}^{(m)} = \hat{\varphi}_m(1, \hat{\theta}_k p_0) B_{I_k}^{(m)}.$$

**3.3.2 Bemerkung:** Der Fortsetzungsalgorithmus ist ein Spezialfall des Unterteilungsalgorithmus.

Unter Rückführung auf den Fortsetzungsalgorithmus ergibt sich folgendes Konvergenzresultat für den Unterteilungsalgorithmus.

**3.3.3 Satz (Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus):** Seien  $(\theta, \varphi)$  ein stetiges nichtautonomes dynamisches System mit einem Pullback-Attraktor  $A$  und  $Q \subset \mathbb{R}^N$  eine kompakte Menge, für die  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$  gilt. Weiterhin seien zu einer Schrittweite  $T > 0$  in  $\mathbb{T}$  die Zerlegungen  $\mathcal{B}^{(i)}$  und die dazugehörigen Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi}_i)$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) definiert. Für ein fest gewähltes  $p_0 \in P$  gelten dann folgende Aussagen:

- (i) Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\kappa < 1 - m$  und ein  $\delta > 0$ , so dass für alle Startwerte  $k_0$  des Unterteilungsalgorithmus, für die  $k_0 \leq \kappa$  gilt, die Beziehung

$$d(B_{I_0}^{(m)} | A(p_0) \cap Q) < \varepsilon$$

folgt, sofern  $\text{diam } \mathcal{B}^{(m)} \leq \delta$ ,  $B_{I_0}^{(m)} \neq \emptyset$  und  $A(p_0) \cap Q \neq \emptyset$ .

- (ii) Falls zusätzlich für alle  $j \in \{1, \dots, -k_0\}$  die Beziehung

$$\varphi(T, \theta_{-jT} p_0)(A(\theta_{-jT} p_0) \cap Q) \cap Q = A(\theta_{-(j-1)T} p_0) \cap Q \quad (3.11)$$

erfüllt ist, folgt  $A(p_0) \cap Q \subset B_{I_0}^{(m)}$  und es gilt

$$d_H(B_{I_0}^{(m)}, A(p_0) \cap Q) < \varepsilon.$$

**Beweis:** (i) Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wir betrachten zunächst speziell die Zerlegung  $\mathcal{B}^{(m)}$  und das dazugehörige Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi}_m)$ . Aus Satz 3.2.1 (i) folgt dann die Existenz von Konstanten  $\tilde{\kappa} \in \mathbb{N}$  und  $\delta > 0$ , so dass

$$d(\hat{\varphi}_m(\tilde{\kappa}, \hat{\theta}_{-\tilde{\kappa}} p_0) Q | A(p_0) \cap Q) < \varepsilon \quad (3.12)$$

gilt, sofern  $\text{diam } \mathcal{B}^{(m)} \leq \delta$ ,  $\hat{\varphi}_m(\tilde{\kappa}, \hat{\theta}_{-\tilde{\kappa}} p_0) Q \neq \emptyset$  und  $A(p_0) \cap Q \neq \emptyset$ . Nach Voraussetzung sind diese drei Bedingungen für alle Startwerte  $k_0 \leq -\tilde{\kappa} - m + 1$  erfüllt, da

$$\emptyset \neq B_{I_0}^{(m)} = \hat{\varphi}_m(\tilde{\kappa}, \hat{\theta}_{-\tilde{\kappa}} p_0) B_{I_{\tilde{\kappa}}}^{(m)} \subset \hat{\varphi}_m(\tilde{\kappa}, \hat{\theta}_{-\tilde{\kappa}} p_0) Q$$

gilt. Wir setzen daher  $\kappa := -\tilde{\kappa} - m + 1$  und wählen  $k_0 \leq \kappa$  als Startwert für den Unterteilungsalgorithmus. Aus (3.12) folgt

$$\begin{aligned} d(B_{I_0}^{(m)} | A(p_0) \cap Q) &= d(\hat{\varphi}_m(\tilde{\kappa}, \hat{\theta}_{-\tilde{\kappa}} p_0) B_{I_{\tilde{\kappa}}}^{(m)} | A(p_0) \cap Q) \\ &\leq d(\hat{\varphi}_m(\tilde{\kappa}, \hat{\theta}_{-\tilde{\kappa}} p_0) Q | A(p_0) \cap Q) < \varepsilon. \end{aligned}$$

- (ii) Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass die Beziehung

$$A(\theta_{(k_0+l)T} p_0) \cap Q \subset B_{I_{k_0+l}}^{(\min\{l+1, m\})} \quad (3.13)$$

für alle  $l \in \{0, \dots, -k_0\}$  erfüllt ist. Zunächst ( $l = 0$ ) gilt  $A(\theta_{k_0 T} p_0) \cap Q \subset B_{I_{k_0}}^{(1)} = Q$ . Nehmen wir nun an, dass (3.13) für ein beliebiges und festes  $l \in \{0, \dots, -k_0 - 1\}$  erfüllt ist. Dann

gilt

$$\begin{aligned}
A(\theta_{(k_0+l+1)Tp_0}) \cap Q &\stackrel{(3.11)}{=} \varphi(T, \theta_{(k_0+l)Tp_0})(A(\theta_{(k_0+l)Tp_0}) \cap Q) \cap Q \\
&\stackrel{(3.13)}{\subset} \varphi(T, \theta_{(k_0+l)Tp_0})(B_{I_{k_0+l}}^{(\min\{l+1, m\})}) \cap Q \\
&\stackrel{3.1.6}{\subset} \hat{\varphi}_{\min\{l+2, m\}}(1, \hat{\theta}_{k_0+l} p_0)(B_{I_{k_0+l}}^{(\min\{l+1, m\})}) \\
&= B_{I_{k_0+l+1}}^{(\min\{l+2, m\})}.
\end{aligned}$$

Speziell ( $l = -k_0$ ) gilt  $A(p_0) \cap Q \subset B_{I_0}^{(m)}$ . Hieraus folgt

$$d(A(p_0) \cap Q | B_{I_0}^{(m)}) = 0,$$

was unter Verwendung von (i) die Behauptung impliziert.  $\square$

Das folgende Korollar besagt, dass - wie beim Fortsetzungsalgorithmus - die Approximation im Hausdorff-Abstand bei geeigneter Wahl von  $Q$  und  $T$  erreicht werden kann.

**3.3.4 Korollar (Konvergenz im Hausdorff-Abstand):** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen in Satz 3.3.3 sei  $Q$  ein Erzeuger von  $A$  und es gelte  $T > \mathcal{T}(Q, Q)$ . Für jedes  $\varepsilon > 0$  gibt es dann ein  $\kappa < 1 - m$  und ein  $\delta > 0$ , so dass für alle Startwerte  $k_0$  des Unterteilungsalgorithmus, für die  $k_0 \leq \kappa$  gilt, die Beziehung*

$$d_H(B_{I_0}^{(m)}, A(p) \cap Q) < \varepsilon$$

*im Fall von  $\text{diam } \mathcal{B}^{(m)} \leq \delta$  erfüllt ist.*

**Beweis:** analog Korollar 3.2.3.  $\square$

**3.3.5 Beispiel:** Wir betrachten noch einmal die nichtautonome Differenzgleichung (3.10) aus Beispiel 3.2.5. Diesmal berechnen wir den nichtautonomen Attraktor mit dem Unterteilungsalgorithmus. Hierzu wählen wir die Zerlegungen  $\mathcal{B}_i := \mathcal{B}(Q, i + 7)$  ( $i \in \{1, \dots, 11\}$ ) der Hauptbox  $Q = [-4, 4] \times [-4, 4]$ . Die folgende Bilderserie veranschaulicht die Approximation durch den Unterteilungsalgorithmus:

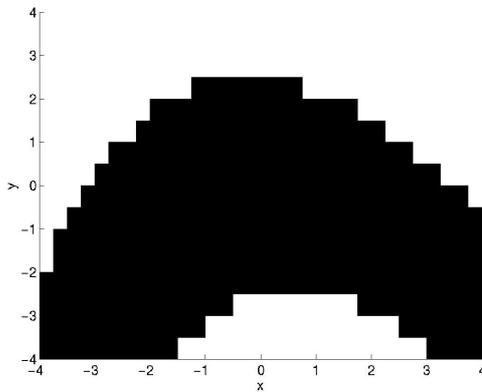


Abbildung 3.20: Faser  $p = -7$   
295 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 9)$

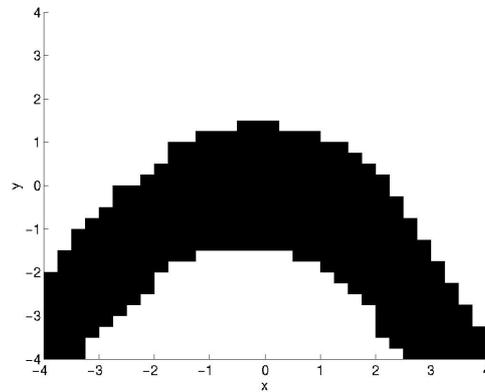


Abbildung 3.21: Faser  $p = -6$   
350 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 10)$

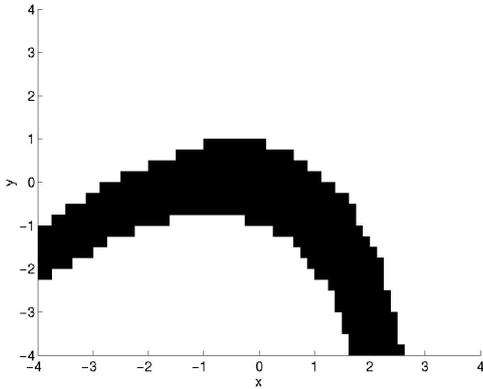


Abbildung 3.22: Faser  $p = -5$   
375 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 11)$

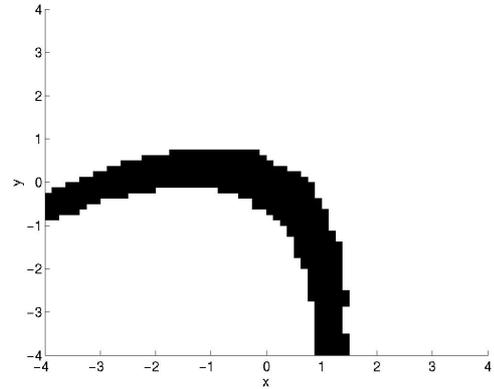


Abbildung 3.23: Faser  $p = -4$   
424 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 12)$

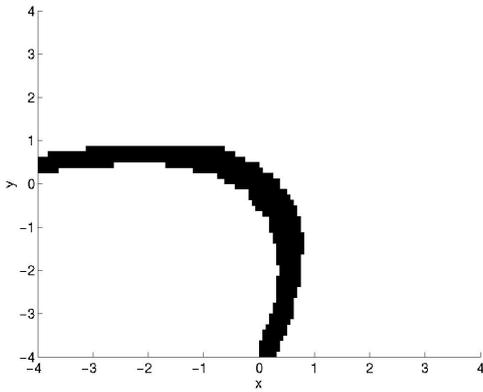


Abbildung 3.24: Faser  $p = -3$   
510 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 13)$

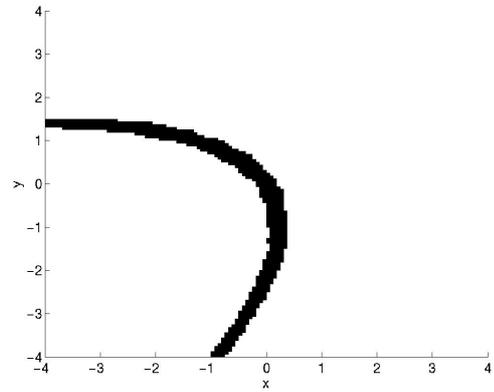


Abbildung 3.25: Faser  $p = -2$   
676 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 14)$

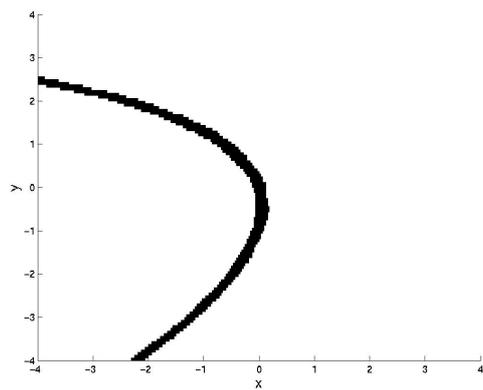


Abbildung 3.26: Faser  $p = -1$   
953 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 15)$

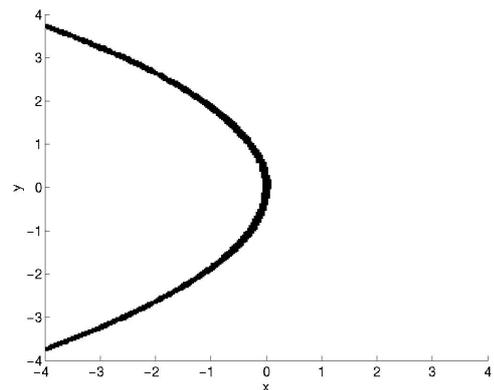


Abbildung 3.27: Faser  $p = 0$   
1.406 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 16)$

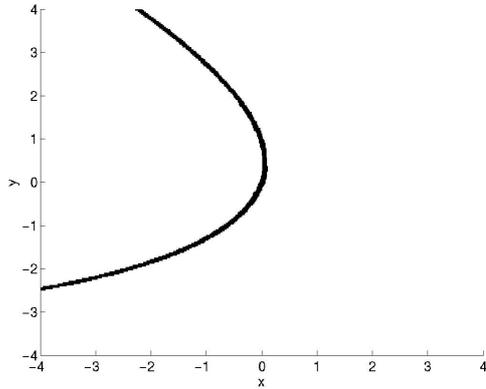


Abbildung 3.28: Faser  $p = 1$   
1.637 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 17)$

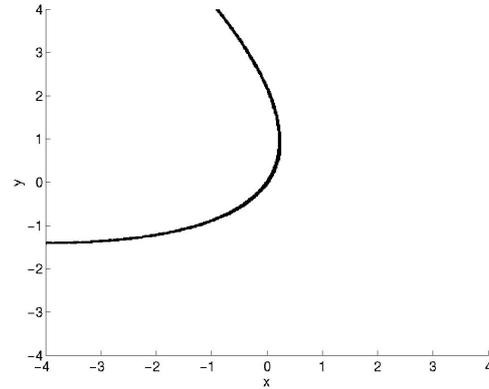


Abbildung 3.29: Faser  $p = 2$   
1.899 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

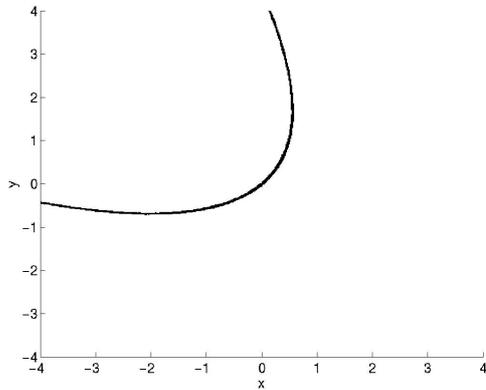


Abbildung 3.30: Faser  $p = 3$   
1.417 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

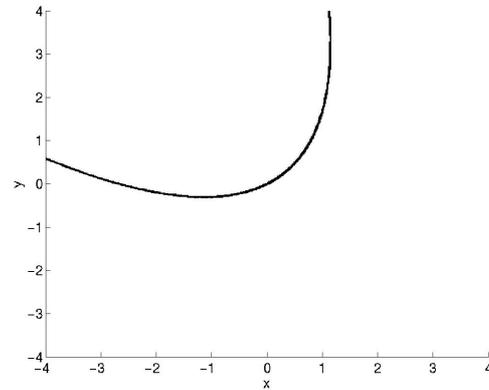


Abbildung 3.31: Faser  $p = 4$   
1.321 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

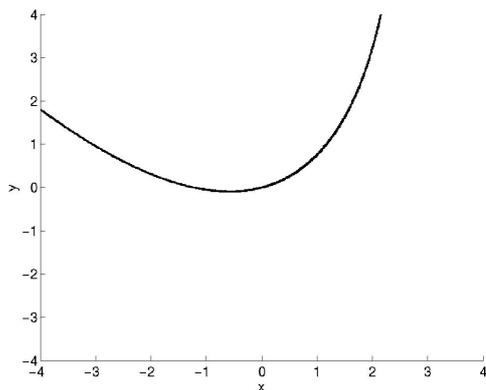


Abbildung 3.32: Faser  $p = 5$   
1.372 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

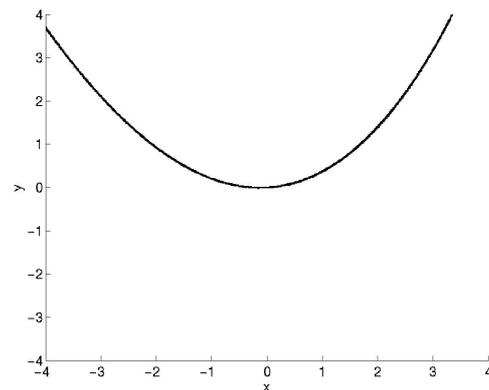


Abbildung 3.33: Faser  $p = 6$   
1.588 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

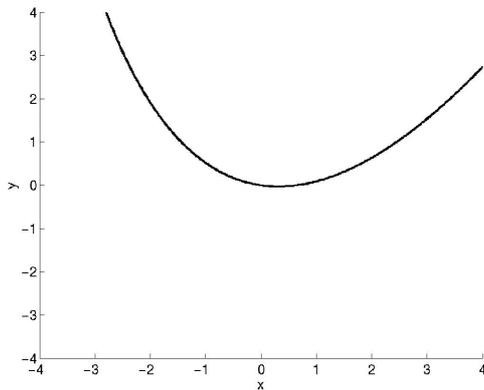


Abbildung 3.34: Faser  $p = 7$   
1.412 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

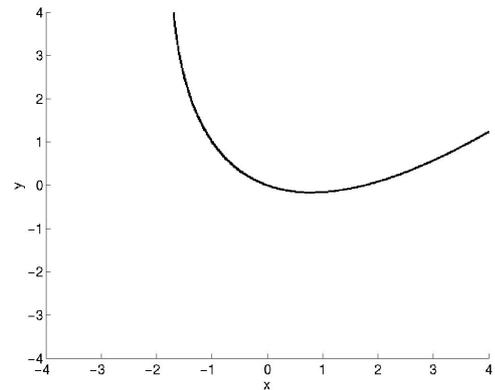


Abbildung 3.35: Faser  $p = 8$   
1.193 Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$

Wir vergleichen nun anhand dieses Beispiels den Fortsetzungsalgorithmus mit dem Unterteilungsalgorithmus. Hierzu betrachten wir die Anzahl der Boxen der Approximation normiert auf die Zerlegung  $\mathcal{B}(Q, 18)$  zu den Berechnungszeitpunkten (siehe Tabelle 3.1). Zunächst ist klar, dass die Überdeckung des Attraktors beim Unterteilungsalgorithmus immer eine Obermenge der Approximation durch den Fortsetzungsalgorithmus ist, da in den ersten Schritten die Zerlegungen beim Fortsetzungsalgorithmus feiner sind. Sind die Unterteilungsschritte jedoch beendet, so erkennt man, dass sich die Anzahl der Boxen relativ schnell angleicht. Eine Analyse der notwendigen Rechenoperationen zeigt, dass beim Fortsetzungsalgorithmus 533.777 Boxen abgebildet werden mussten, beim Unterteilungsalgorithmus jedoch nur 15.891 Boxen. Selbst wenn man für größere Boxen mehr Testpunkte wählt (siehe Abschnitt 4.1.3), ergibt sich mit dem Unterteilungsalgorithmus eine erhebliche Zeitersparnis.

Faser	Fortsetzungsalgorithmus	Unterteilungsalgorithmus
$p = -8$	262.144 Boxen	262.144 Boxen
$p = -7$	131.120 Boxen	151.040 Boxen
$p = -6$	66.895 Boxen	89.600 Boxen
$p = -5$	30.510 Boxen	48.000 Boxen
$p = -4$	14.915 Boxen	27.136 Boxen
$p = -3$	7.888 Boxen	16.320 Boxen
$p = -2$	4.650 Boxen	10.816 Boxen
$p = -1$	3.203 Boxen	7.624 Boxen
$p = 0$	2.608 Boxen	5.624 Boxen
$p = 1$	1.802 Boxen	1.637 Boxen
$p = 2$	1.392 Boxen	1.899 Boxen
$p = 3$	1.218 Boxen	1.417 Boxen

<b>Faser</b>	<b>Fortsetzungsalgorithmus</b>	<b>Unterteilungsalgorithmus</b>
$p = 4$	1.200 Boxen	1.321 Boxen
$p = 5$	1.302 Boxen	1.372 Boxen
$p = 6$	1.546 Boxen	1.588 Boxen
$p = 7$	1.384 Boxen	1.412 Boxen
$p = 8$	1.193 Boxen	1.193 Boxen

Tabelle 3.1: Anzahl der Boxen von  $\mathcal{B}(Q, 18)$  in den entsprechenden Fasern

## Kapitel 4

# Realisierung der Approximation mit GAIO

In der vorliegenden Diplomarbeit wurden die im vorigen Kapitel vorgestellten Algorithmen mit dem Computerprogramm GAIO (**G**lobal **A**nalysis of **I**nvariant **O**bjects) für nichtautonome dynamische Systeme, die von Differenzen- oder Differenzialgleichungen erzeugt werden, numerisch umgesetzt. GAIO wird seit 1995 von Michael Dellnitz und Oliver Junge entwickelt. Zu GAIO gibt es bisher keine vollständige Dokumentation. In DELLNITZ, FROYLAND, JUNGE [18] werden jedoch die wichtigsten Befehle von GAIO und einige bereits implementierte Algorithmen erläutert. Des Weiteren besitzt die MATLAB-Version von GAIO eine Online-Referenz.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden wir etwas näher die grundlegende Struktur und die Syntax von GAIO erörtern. In dieser Einführung werden nur elementare und für die Implementierung der Algorithmen wichtige Sachverhalte dargestellt. Da GAIO von Haus aus nur autonome Differenzen- und Differenzialgleichungen unterstützt, stellt sich die Frage, wie die nichtautonome Situation in GAIO zu integrieren ist. In Abschnitt 4.2 werden wir hierzu zwei verschiedene Ansätze diskutieren und die entsprechenden Quelltexte zur Umsetzung des Unterteilungsalgorithmus angeben.

### 4.1 Grundlegendes zu GAIO

GAIO ist ein kommandozeilenorientiertes Computerprogramm; die Steuerung erfolgt über eingegebene Befehle, die sofort ausgeführt werden. Es bietet sich jedoch an, ganze Befehlsketten in separaten Dateien auszulagern und dann in GAIO als Skript auszuführen. GAIO besitzt eine Schnittstelle zur Programmiersprache PYTHON und zu MATLAB. PYTHON und MATLAB stellen leistungsfähige Routinen zur Verfügung, die die Arbeit mit GAIO sehr erleichtern.

Betrachten wir uns noch einmal den Unterteilungsalgorithmus 3.3.1 aus dem letzten Kapitel. Bei diesem Algorithmus werden, vereinfacht gesagt, Mengen, die zu Zerlegungen der kompakten Menge  $Q$  gehören, durch ein nichtautonomes dynamisches System abgebildet. Die Fähigkeiten, die ein Computerprogramm zur Bewerkstelligung dieser Aufgabe haben

sollte, sind:

- Das Programm unterstützt Differenzen- und Differenzialgleichungen.
- Das Programm ermittelt Näherungslösungen dieser Gleichungen.
- Das Programm bildet kompakte Mengen ab.
- Das Programm verwaltet Zerlegungen der Menge  $Q$ .

In GAIO werden diese Punkte durch vier verschiedene Objekte realisiert:

Die dem System zugrundeliegende Differenzen- oder Differenzialgleichung wird über das Objekt „Modell“ gesteuert. Die Handhabung dieses Objekts erläutern wir in Abschnitt 4.1.1.

Die Berechnung von Näherungslösungen der Gleichungen geschieht in GAIO über das Objekt „Integrator“. Hierauf gehen wir näher in Abschnitt 4.1.2 ein.

Die Abbildung kompakter Mengen ist numerisch nicht exakt zu realisieren, sofern die Menge unendlich viele Elemente enthält. Durch die Auswahl endlich vieler abzubildender Punkte kann dieses Problem umgangen werden. Diese Punkte werden durch eine Funktion im Objekt „Punkte“ erzeugt. In Abschnitt 4.1.3 besprechen wir die Eigenschaften dieses Objekts.

In Abschnitt 4.1.4 beschreiben wir das Objekt „Baum“, mit dem Zerlegungen der Menge  $Q$  verwaltet werden.

Jedes dieser Objekte besitzt *Attribute* und *Methoden*. Attribute sind Eigenschaften des jeweiligen Objekts; Methoden sind entweder Funktionen oder Prozeduren. Die vier Objekte sind in GAIO in einer gewissen Weise miteinander verknüpft. Ein Attribut eines Integrator-Objekts ist ein Modell-Objekt; einem Integrator wird also ein Modell zugeordnet. Ebenso muss einem Baum ein Integrator zugewiesen werden, und damit über den Integrator auch ein Modell. Des Weiteren ist mit jedem Baum auch ein Punkte-Objekt verknüpft. Eine Übersicht über diese Struktur zeigt die Abbildung 4.1.

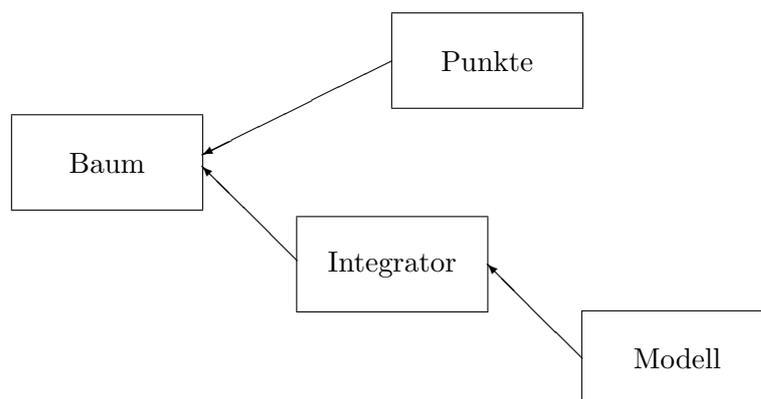


Abbildung 4.1: Struktur der Objekte in GAIO

### 4.1.1 Das Objekt „Modell“

GAIO benötigt zunächst Informationen über die autonome Differenzen- oder Differenzialgleichung. Diese Daten müssen in einer separaten Datei als Quelltext der Programmiersprache C gespeichert sein. Wir erläutern nun den Aufbau einer solchen Datei anhand eines einfachen Beispiels:

```

1  #include <math.h>

2  char *typ = "ode";
3  char *name = "Beispiel";
4  int dim = 2;
5  int paramDim = 2;
6  char *paramNames[] = {"a", "b"};
7  double a = -1;
8  double b = 1;
9  double c[2] = {0, 0};
10 double r[2] = {1, 1};
11 double tFinal = 1;

12 void rhs(double *x, double *u, double *y)
13 { y[0] = a * x[0];
14   y[1] = b * x[1]; }
```

Die erste Zeile ist bei jedem Modell identisch; es werden unter anderem Deklarationen elementarer mathematischer Funktionen aus der Datei `math.h` eingebunden. In Zeile 2 wird der Gleichungstyp festgelegt: „ode“ steht hier für eine gewöhnliche Differenzialgleichung, „map“ für eine Differenzengleichung. Die folgende Zeile dient der Benennung der Gleichung. Die Variable `dim` in Zeile 4 gibt die Dimension des Phasenraumes an; der Wert von `paramDim` entspricht der Anzahl der Parameter des Systems. Diesen Parametern werden in Zeile 6 durch das Feld `paramNames` Namen und in den beiden folgenden Zeilen Standardwerte zugewiesen. In den Zeilen 9 und 10 wird der 2-Quader, in dem die Gleichung betrachtet wird, definiert. `c` steht für den Mittelpunktvektor, `r` für den Radiusvektor (siehe Definition 3.1.2). Die Größe `tfinal`, die in Zeile 11 eingeführt wird, gibt die Integrationsschrittweite an; es handelt sich hierbei um die Variable  $T$  aus Kapitel 3. Die Zeilen 13 und 14 enthalten nun schließlich die Informationen über die rechte Seite der Gleichung: `y[i]` ist die  $i$ -te Koordinatenfunktion und `x[i]` die  $i$ -te Veränderliche der rechten Seite.

Hat man ein neues Modell erstellt und die entsprechende C-Datei in ein „shared object“ kompiliert, so kann man in GAIO sofort darauf zugreifen: Durch den Befehl „`m = Model(name)`“ wird ein Modell-Objekt `m`, dem das Modell `name` zugrundeliegt, definiert. In der folgenden Tabelle sind wichtige Attribute und Methoden für das Objekt „Modell“ dargestellt:

<b>Attribute</b>	
<code>m.typ</code>	Art des Modells („ode“: gewöhnliche Differenzialgleichung, „map“: Differenzengleichung)

<code>m.name</code>	Name des Modells
<code>m.dim</code>	Dimension des Phasenraums
<code>m.paramDim</code>	Anzahl der freien Parameter
<code>m.tfinal</code>	Integrationsschrittweite
<code>m.center</code>	Mittelpunkt des Quaders $Q$
<code>m.radius</code>	Radius des Quaders $Q$
Methoden	
<code>m.rhs(X)</code>	berechnet den Funktionswert der rechte Seite im Punkt $X$

Tabelle 4.1: Attribute und Methoden des Objekts „Modell“

### 4.1.2 Das Objekt „Integrator“

In GAIO sind bereits viele Verfahren zur Berechnung von Näherungslösungen dynamischer Systeme implementiert. Die nachfolgende Tabelle führt einige unterstützte Integrationsroutinen auf (siehe HAIRER, NØRSETT, WANNER [20]):

Name	Beschreibung
Map	Iterationen der rechten Seite (Differenzgleichungen)
Euler	Euler-Verfahren
RungeKutta4	Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung
DormandPrince853	Dormand-Prince-8(5,3)-Verfahren mit Schrittweitensteuerung

Tabelle 4.2: Integrationsverfahren in GAIO

Durch den Befehl „`i = Integrator(name)`“ wird ein Integrator-Objekt `i` mit dem Integrationsverfahren `name` definiert. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über wichtige Attribute und Methoden für das Objekt „Integrator“:

Attribute	
<code>i.name</code>	Name des Integrationsverfahrens
<code>i.tfinal</code>	Integrationsschrittweite
<code>i.h</code>	kleine Schrittweite
<code>i.model</code>	zugeordnetes Modell-Objekt
Methoden	
<code>i.map(X)</code>	berechnet eine Näherung von $\varphi(i.tfinal, X)$

Tabelle 4.3: Attribute und Methoden des Objekts „Integrator“

### 4.1.3 Das Objekt „Punkte“

Es ist numerisch nicht möglich, ganze  $N$ -Quader abzubilden. Statt dessen wird eine repräsentative Auswahl endlich vieler Punkte abgebildet. Wie die folgende Tabelle zeigt, gibt es in GAIO verschiedene Möglichkeiten, diese Punkte zu generieren:

Name	Beschreibung
Center	Mittelpunkt
Data	liest die Testpunkte aus einer Datei
Edges	Punkte an den Ecken der Box
Grid	reguläres Gitter
InnerGrid	reguläres Gitter unter Vermeidung von Ecken
MonteCarlo	zufällige Wahl der Punkte

Tabelle 4.4: Punktgeneratoren in GAIO

Durch den Befehl „`p = Points(name, dim, n)`“ wird `p` als Punkte-Objekt definiert. Als Parameter werden der Name des Punktgenerators, die Dimension des Phasenraums und die Anzahl der pro Box zu erzeugenden Punkte übergeben. Die folgende Tabelle stellt wichtige Attribute und Methoden für das Objekt „Punkte“ dar:

Attribute	
<code>p.name</code>	Name des Punktgenerators
<code>p.dim</code>	Dimension des Phasenraums
<code>p.noOfPoints</code>	Anzahl der zu erzeugenden Punkte
Methoden	
<code>p.get(C,R)</code>	gibt eine Matrix von Punkten für die Box $Q(C, R)$ aus

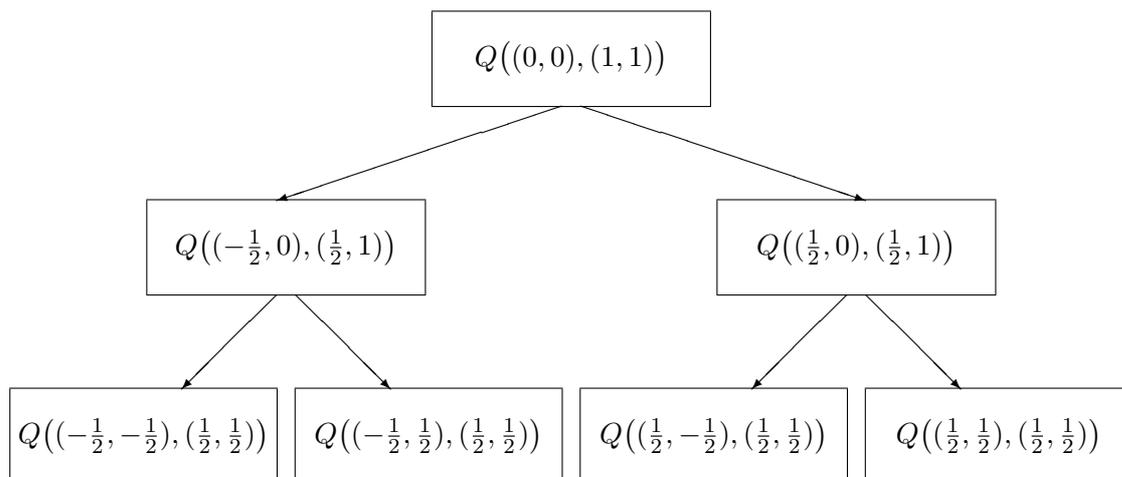
Tabelle 4.5: Attribute und Methoden des Objekts „Punkte“

#### 4.1.4 Das Objekt „Baum“

Durch das Baum-Objekt werden in GAIO die in Definition 3.1.3 eingeführten Zerlegungen  $\mathcal{B}(Q, i)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) für einen Quader  $Q = Q(c, r)$  verwaltet. Die Definition erfolgt durch den Befehl „`t = Tree(c, r)`“.

Die Zerlegungen  $\mathcal{B}(Q, i)$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) entsprechen den einzelnen Ebenen des Baumes. In jeder Ebene  $i$  des Baumes ist ein Teil der  $2^i$  Boxen aktiviert. Jede aktivierte Box hat einen *Zustand* und eine *Farbe*. Der Zustand einer Box ist durch eine Zahl  $z$  festgelegt, die sich in der Form  $z = \sum_{j=n}^m f(j)2^j$  mit  $f(j) \in \{0, 1\}$  ( $j \in \{n, \dots, m\}$ ) eindeutig darstellen lässt. Ist  $f(j) = 1$  für ein  $j \in \{n, \dots, m\}$ , so sagen wir gleichbedeutend dazu, dass das Flag  $2^j$  der entsprechenden Box gesetzt ist. Gilt für endlich viele Zahlen  $j_1, \dots, j_l \in \mathbb{Z}$  die Beziehung  $f(j_i) = 1$  ( $i \in \{1, \dots, l\}$ ), so bedeutet dies, dass das Flag  $\sum_{i=1}^l 2^{j_i}$  gesetzt ist. Die Farbe einer Box ist eine bestimmte Zahl, die von einem Programm, das die Boxen grafisch darstellt, interpretiert wird.

Die folgende Abbildung illustriert die ersten Ebenen des Baumes, der zu der Hauptbox  $Q((0, 0), (1, 1))$  und den Zerlegungen  $\mathcal{B}(Q, i)$  mit  $s(i) = ((i+1) \bmod 2) + 1$  ( $i \in \mathbb{N}$ ) gehört.

Abbildung 4.2: Baum der Box  $Q((0,0), (1,1))$ 

In der folgenden Tabelle sind wichtige Attribute und Methoden des Objekts „Baum“ dargestellt:

<b>Attribute</b>	
<code>t.dim</code>	Dimension des Phasenraums
<code>t.depth</code>	tiefste Baumebene, in der Boxen aktiviert sind
<code>t.center</code>	Mittelpunkt der Hauptbox $Q$
<code>t.radius</code>	Radius der Hauptbox $Q$
<code>t.sd</code>	Vektor, der angibt, in welche Richtung die Unterteilung erfolgt (entspricht bis auf Koordinatenverschiebung endlichem Teil der Folge $s$ aus Definition 3.1.3)
<code>t.integrator</code>	zugeordnetes Integrator-Objekt
<code>t.domain_points</code>	zugeordnetes Punkte-Objekt für Urbildpunkte
<code>t.image_points</code>	zugeordnetes Punkte-Objekt für Bildpunkte
<b>Methoden</b>	
<code>t.boxes(d)</code>	gibt die aktivierten Boxen der Ebene $d$ im Format $[c, r, \text{Flag}, \text{Color}]$ aus
<code>t.change_flags(w, f, g, d)</code>	ändert die Flags von $f$ zu $g$ (siehe <code>set_flags</code> )
<code>t.count(d)</code>	gibt die Anzahl der aktivierten Boxen in Ebene $d$ aus
<code>t.delete(d)</code>	löscht alle Boxen der Ebene $d$
<code>t.expand(d[, f, f1, f2])</code>	bildet die Boxen der Ebene $d$ ab, die das Flag $f$ gesetzt haben; nicht aktivierte (aktivierte) Boxen, auf die abgebildet wird, erhalten das Flag $f1$ ( $f2$ )
<code>t.insert(x, d[, f0, f1, c])</code>	aktiviert die Boxen in Ebene $d$ , die die Punkte $x$ enthalten; optional: jede neue Box erhält das Flag $f0$ (Standard: 2), andere das Flag $f1$ (Standard: 0); über $c$ kann man den Boxen eine Farbe zuteilen
<code>t.remove(f)</code>	entfernt alle Boxen der tiefsten Ebene, die das Flag $f$ nicht gesetzt haben und eventuell zugehörige Elternboxen aus höheren Ebenen

<code>t.set_flags(w,f,d)</code>	setzt das Flag <code>f</code> in der <code>i</code> -ten Box in Ebene <code>d</code> , falls das <code>i</code> -te Zeichen der Zeichenkette <code>w</code> '1' ist; ist <code>w='all'</code> , so werden alle Boxen berücksichtigt
<code>t.subdivide(f)</code>	teilt die Boxen in der tiefsten Ebene, die das Flag <code>f</code> gesetzt haben ( <code>t.depth</code> wird um 1 erhöht)
<code>t.unset_flags(w,f,d)</code>	setzt das Flag <code>f</code> zurück (siehe <code>set_flags</code> )
<code>t.unsubdivide(f)</code>	fasst Boxen der tiefsten Ebene zusammen, die das Flag <code>f</code> gesetzt haben ( <code>t.depth</code> wird um 1 erniedrigt)

Tabelle 4.6: Attribute und Methoden des Objekts „Baum“

## 4.2 Implementierung des Unterteilungsalgorithmus

In diesem Abschnitt erörtern wir Möglichkeiten zur Implementierung des Unterteilungsalgorithmus in GAIO. Diese Überlegungen decken auch den Fortsetzungsalgorithmus ab, denn dieser ist ein Spezialfall des Unterteilungsalgorithmus (siehe Bemerkung 3.3.2).

Wir werden dies auf zwei verschiedene Arten realisieren. Bei der in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Variante führt GAIO seine Berechnungen im erweiterten Phasenraum durch, wohingegen in Abschnitt 4.2.2 die Umsetzung im Phasenraum erfolgt.

### 4.2.1 Implementierung im erweiterten Phasenraum

Da GAIO nur autonome Systeme unterstützt, ist es naheliegend, die Berechnungen in GAIO mit den entsprechend der Sätze 1.2.2 und 1.3.2 autonomisierten Systemen durchzuführen. In diesem Abschnitt erläutern wir diese Vorgehensweise und prüfen sie auf Korrektheit.

Sei hierzu  $(\theta : \mathbb{T} \times P \rightarrow P, \varphi : D \subset \mathbb{T} \times P \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N)$  ein stetiges nichtautonomes dynamisches System, das von einer nichtautonomen Differenzen- oder Differenzialgleichung

$$x' = f(k, x) \quad \text{oder} \quad \dot{x} = f(t, x)$$

erzeugt ist (siehe Beispiel 1.5.2). Insbesondere gilt  $P = \mathbb{Z}$  oder  $P = \mathbb{R}$  und

$$\theta(t, p) = t + p \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T} \text{ und } p \in P.$$

Weiterhin sei  $A$  ein lokaler oder globaler Pullback-Attraktor von  $(\theta, \varphi)$ . Wir betrachten nun den in Abschnitt 1.5 eingeführten Schiefproduktfluss

$$\psi : D \subset \mathbb{T} \times P \times \mathbb{R}^N \rightarrow P \times \mathbb{R}^N$$

von  $(\theta, \varphi)$ , das dynamische System, das gemäß Satz 1.5.3 von der autonomisierten Differenzen- oder Differenzialgleichung erzeugt wird.

Das folgende Lemma beschreibt einen Zusammenhang zwischen  $(\theta, \varphi)$  und  $\psi$ .

**4.2.1 Lemma:** Für beliebige  $t \in \mathbb{T}$ ,  $p \in P$  und  $M \subset \mathbb{R}^N$  mit  $D_{\max}(p, M) = \mathbb{T}$  gilt

$$\{p + t\} \times \varphi(t, p)M = \psi(t, \{p\} \times M). \quad (4.1)$$

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned}
& (\tilde{p}, x) \in \{p + t\} \times \varphi(t, p)M \\
& \Leftrightarrow \exists y \in M : (\tilde{p}, x) = (p + t, \varphi(t, p, y)) \\
& \Leftrightarrow \exists y \in M : (\tilde{p}, x) = (\theta(t, p), \varphi(t, p, y)) = \psi(t, p, y) \\
& \Leftrightarrow (\tilde{p}, x) \in \psi(t, \{p\} \times M). \quad \square
\end{aligned}$$

Wie in Kapitel 3 wählen wir eine kompakte Menge  $Q \subset \mathbb{R}^N$  mit  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$ , eine  $n$ -elementige Zerlegung  $\mathcal{B} = \{B_j : j \in \{1, \dots, n\}\}$  von  $Q$  und eine Schrittweite  $T > 0$  in  $\mathbb{T}$ . Für ein festes  $p_0 \in P$  definieren wir die Mengen

$$\tilde{B}_{ij} := \{p_0 + iT\} \times B_j \quad \text{für alle } i \in \mathbb{Z} \text{ und } j \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

Weiterhin setzen wir

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{\tilde{B}_{ij} : (i, j) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}\}$$

und

$$\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{B}}) := \{\tilde{B}_I := \bigcup_{(i,j) \in I} \tilde{B}_{ij} : I \subset \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}\}.$$

Wir definieren nun ein spezielles dynamisches System, das in enger Beziehung zu dem in Definition 3.1.4 eingeführten Box-NDS steht.

**4.2.2 Definition:** Gegeben seien eine kompakte Menge  $Q \subset \mathbb{R}^N$  mit  $P \times Q \in \mathcal{D}_P(A)$ , eine  $n$ -elementige Zerlegung  $\mathcal{B}$  von  $Q$ , eine Schrittweite  $T > 0$  in  $\mathbb{T}$  und ein Punkt  $p_0 \in P$ . Die Abbildung  $\hat{\psi} : \mathbb{Z}_0^+ \times \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathcal{P}(\tilde{\mathcal{B}})$  wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(0, \tilde{B}_I) &:= \tilde{B}_I \quad \text{für alle } I \subset \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}, \\
\hat{\psi}(1, \tilde{B}_I) &:= \tilde{B}_J \quad \text{für alle } I \subset \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\},
\end{aligned}$$

wobei  $J := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\} : \psi(T, \tilde{B}_I) \cap \tilde{B}_{ij} \neq \emptyset\}$ ,  
sowie induktiv für  $k \geq 2$  und  $I \subset \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}$

$$\hat{\psi}(k, \tilde{B}_I) := \hat{\psi}(1, \hat{\psi}(k-1, \tilde{B}_I)).$$

Die Abbildung  $\hat{\psi}$  nennen wir Box-DS.

Es gilt folgender Zusammenhang zwischen dem Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi})$  und dem Box-DS  $\hat{\psi}$ :

**4.2.3 Satz (Zusammenhang zwischen Box-NDS und Box-DS):** Für beliebig vorgegebene  $I \subset \{1, \dots, n\}$  und  $k \in \mathbb{Z}$  gilt

$$\hat{\varphi}(1, p_0 + kT)B_I = B_J \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\psi}(1, \tilde{B}_{\{k\} \times I}) = \tilde{B}_{\{k+1\} \times J}. \quad (4.3)$$

**Beweis:** Mit  $p := p_0 + kT$  gilt

$$\begin{aligned}
& \hat{\varphi}(1, p)B_I = B_J \\
\Leftrightarrow & J = \{j \in \{1, \dots, n\} : \varphi(T, p)B_I \cap B_j \neq \emptyset\} \\
\Leftrightarrow & J = \{j \in \{1, \dots, n\} : (\{p + T\} \times \varphi(T, p)B_I) \cap (\{p + T\} \times B_j) \neq \emptyset\} \\
\stackrel{(4.1)}{\Leftrightarrow} & J = \{j \in \{1, \dots, n\} : \psi(T, \tilde{B}_{\{k\} \times I}) \cap \tilde{B}_{k+1, j} \neq \emptyset\} \\
\Leftrightarrow & \{k + 1\} \times J = \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\} : \psi(T, \tilde{B}_{\{k\} \times I}) \cap \tilde{B}_{ij} \neq \emptyset\} \\
\Leftrightarrow & \hat{\psi}(1, \tilde{B}_{\{k\} \times I}) = \tilde{B}_{\{k+1\} \times J}. \quad \square
\end{aligned}$$

Bevor wir den Unterteilungsalgorithmus aus Kapitel 3 über das autonomisierte System beschreiben, benötigen wir noch einige Notation.

Für  $i \in \{1, \dots, m\}$  seien

$$\mathcal{B}^{(i)} = \{B_j^{(i)} : j \in \{1, \dots, |\mathcal{B}^{(i)}|\}\}$$

Zerlegungen von  $Q$ . Wir setzen voraus, dass  $\mathcal{B}^{(i+1)}$  feiner als  $\mathcal{B}^{(i)}$  ist. Die zur Zerlegung  $\mathcal{B}^{(i)}$  gehörigen Box-NDS und Box-DS bezeichnen wir mit  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi}_i)$  und  $\hat{\psi}_i$ . Der Phasenraum des Box-NDS  $(\hat{\theta}, \hat{\varphi}_i)$  ist  $\mathcal{P}(\mathcal{B}^{(i)}) = \{B_I^{(i)} : I \subset \{1, \dots, n\}\}$ ; der des Box-DS  $\hat{\psi}_i$  ist  $\mathcal{P}(\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}) = \{\tilde{B}_I^{(i)} : I \subset \mathbb{Z} \times \{1, \dots, n\}\}$ .

Unter Anwendung von Satz 4.2.3 kann der Unterteilungsalgorithmus folgendermaßen formuliert werden:

**4.2.4 Unterteilungsalgorithmus:** Zur Berechnung von  $A(p_0 + kT) \cap Q$  für die Werte  $k \in \{0, \dots, k_1\}$  wähle man einen Startwert  $k_0 < 1 - m$  in  $\mathbb{Z}$  und setze  $B_{I_{k_0}}^{(1)} := Q$ .

Die Approximationen der Mengen  $A(p_0 + kT) \cap Q$  für  $k \in \{0, \dots, k_1\}$ , die durch  $B_{I_k}^{(m)}$  gegeben sind, erhält man wie folgt:

(i) *Startschritte:*

(a) *Unterteilungsschritte:* Für  $k \in \{k_0, \dots, k_0 + m - 2\}$

- wähle man  $\bar{I}_k \subset \{1, \dots, |\mathcal{B}^{(k-k_0+2)}|\}$  mit  $B_{\bar{I}_k}^{(k-k_0+2)} = B_{I_k}^{(k-k_0+1)}$ . Dies ist möglich, da  $\mathcal{B}^{(k-k_0+2)}$  feiner als  $\mathcal{B}^{(k-k_0+1)}$  ist;

- berechne man  $\tilde{B}_{\{k+1\} \times I_{k+1}}^{(k-k_0+2)} = \hat{\psi}_{k-k_0+2}(1, \tilde{B}_{\{k\} \times \bar{I}_k}^{(k-k_0+2)})$ .

(b) *Weitere Startschritte:* Für  $k \in \{k_0 + m - 1, \dots, -1\}$  berechne man

$$\tilde{B}_{\{k+1\} \times I_{k+1}}^{(m)} = \hat{\psi}_m(1, \tilde{B}_{\{k\} \times I_k}^{(m)}).$$

(ii) *Fortsetzungsschritte:* Für  $k \in \{0, \dots, k_1 - 1\}$  berechne man

$$\tilde{B}_{\{k+1\} \times I_{k+1}}^{(m)} = \hat{\psi}_m(1, \tilde{B}_{\{k\} \times I_k}^{(m)}).$$

Bei der Implementierung dieses Algorithmus in GAIO sind folgende Punkte zu beachten:

- Die kompakte Teilmenge  $Q$  des Phasenraums ist ein  $N$ -Quader  $Q(c, r)$ . Des Weiteren sind die betrachteten Zerlegungen von  $Q$  von der Form

$$\mathcal{B}^{(i)} = \mathcal{B}(Q, q - 1 + i) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

mit einer Konstante  $q \in \mathbb{Z}_0^+$ .

- Die Hauptbox im erweiterten Phasenraum ist ein  $(N + 1)$ -Quader  $[p_1, p_2] \times Q$ . Hierbei ist

$$p_1 := p_0 + (k_0 - \frac{1}{2})T \quad \text{und} \quad p_2 := p_1 + 2^{l_1}T$$

mit einem  $l_1 \in \mathbb{N}$  und  $p_2 \geq p_0 + (k_1 + \frac{1}{2})T$  zu wählen. Bevor die Berechnungen durchgeführt werden können, muss die Hauptbox  $l_1$ -mal in der ersten Koordinatenrichtung unterteilt werden. Die erste Mittelpunktskoordinate jedes Quaders dieser Zerlegung hat dann die Darstellung  $p_0 + kT$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$ . Weitere Unterteilungen sind nur noch im Phasenraum vorzunehmen.

- Wie aus der Definition 4.2.2 ersichtlich ist, sollen von GAIO durch den Schiefproduktfluss  $\psi$  Mengen der Form  $\tilde{B}_{ij} = \{p_0 + iT\} \times B_j$  mit einem  $N$ -Quader  $B_j$  abgebildet werden. Diese Mengen sind echte Teilmengen der in GAIO verwalteten  $(N + 1)$ -Quader  $[p_0 + (i - \frac{1}{2})T, p_0 + (i + \frac{1}{2})T] \times B_j$ . Keine der in GAIO implementierten Punktgeneratoren wählt ausschließlich Punkte dieser Box, deren erste Koordinate den Wert  $p_0 + iT$  hat. Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde daher eine Punktroutine mit Namen 'MonteCarlo\_na' integriert, die diese Besonderheit berücksichtigt und zudem die Punkte zufällig verteilt.

Wir betrachten nun den Quellcode der MATLAB-Version von GAIO zur Implementierung des Unterteilungsalgorithmus im erweiterten Phasenraum. Die Variablen  $T, N, p_1, p_2, c_1, \dots, c_N, r_1, \dots, r_N, q, m, k_0$  und  $k_1$  sind durch Zahlenwerte zu ersetzen. Die abkürzenden Schreibweisen wie etwa  $x_1 \dots x_N$  wurden hier nur verwendet, um die Dimension allgemein zu halten und sind in GAIO nicht zulässig.

```

1  md = Model('Beispiel');
2  i = Integrator('RungeKutta4');
3  i.model = md;
4  md.tFinal = T;
5  t = Tree([0.5 * (p1 + p2) c1 ... cN], [0.5 * (p2 - p1) r1 ... rN]);
6  t.integrator = i;
7  t.domain_points = Points('MonteCarlo_na', N + 1, '100');
8  t.image_points = Points('Center', N + 1, '1');
9  t.sd = [0 0 ... 0 1 2 ... N ... 1 2 ... N];

10 t.insert([p1 c1 ... cN], 11);

11 % q Unterteilungen der Box Q
12 for k = 1:q,
13     t.set_flags('all', 8);

```

```

14     t.subdivide(8);
15     end;

16     % Unterteilungsschritte
17     for k = 1:(m - 1),
18         t.set_flags('all', 8);
19         t.subdivide(8);
20         t.set_flags('all', 4);
21         t.expand(k + q + l1);
22         t.remove(2);
23     end;

24     % weitere Startschritte und Fortsetzungsschritte
25     for k = 1:(k1 - k0 - m + 1),
26         t.change_flags('all', 2, 4);
27         t.expand(m - 1 + q + l1);
28         t.remove(2);
29     end;

```

Die Zeilen 1 bis 8 dienen der Definition der vier Objekte „Modell“, „Integrator“, „Punkt“ und „Baum“. In Zeile 9 wird die Reihenfolge der Unterteilungen festgelegt. Hierbei sollte „0“ an den ersten  $l_1$  Stellen stehen, da die ersten  $l_1$  Unterteilungen in der ersten Koordinatenrichtung erfolgen. In der nächsten Zeile wird die Box, die den Punkt  $(p_1, c_1, \dots, c_N)$  enthält, in der Bauebene  $l_1$  aktiviert. Es handelt sich hierbei um den Quader  $[p_1, p_1 + T] \times Q$ , der Kopie von  $Q$ , die in der Zeit am weitesten hinten liegt. Die Zeilen 11 bis 15 dienen der Unterteilung der Box  $Q$ , bis die Zerlegung erreicht ist, bei der der Unterteilungsalgorithmus startet. In den Zeilen 16 bis 23 werden die Unterteilungsschritte ausgeführt. Hierbei werden nach jeder Unterteilung alle Boxen durch den Schiefproduktfluss abgebildet; nur die getroffenen Boxen bleiben aktiviert. Bei den weiteren Startschritten und Fortsetzungsschritten in den Zeilen 24 bis 29 wird genauso vorgegangen; es entfallen lediglich die Unterteilungen.

#### 4.2.2 Implementierung im Phasenraum

Ein weitere Möglichkeit zur Umsetzung des Unterteilungsalgorithmus ist die Implementierung im Phasenraum. Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt hat man nun das Problem, dass beim Auswerten der rechten Seite nur das Element des Phasenraums, jedoch nicht der aktuelle Zeitpunkt übergeben wird. Dies kann umgangen werden, indem man die entsprechenden Zeiten als Parameter des Modells weiterreicht. Bei Differenzengleichungen ist diese Idee (sofern  $T = 1$ ) ohne Modifikation anwendbar; bei Differenzialgleichungen muss man jedoch beachten, dass die Integrationsverfahren in GAIO die rechte Seite zu mehreren Zeitpunkten auswerten und daher dieser Trick einer Erweiterung bedarf: Man wählt als Modell eine Differenzengleichung, deren rechte Seite die Zeit- $T$ -Abbildung  $\varphi(T, p, x)$  für  $p \in P$  und  $x \in \mathbb{R}^N$  ist. Hierzu muss die Integrationsroutine in die Modelldatei ausgelagert werden.

Eine solche Modelldatei für die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + \sin(t) \\ \dot{y} &= y + \cos(t)\end{aligned}$$

mit integriertem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung (siehe HAIRER, NØRSETT, WANNER [20]) hat die folgende Gestalt:

```

1  #include <math.h>

2  char *typ = "map";
3  char *name = "Beispiel";
4  int dim = 2;
5  int paramDim = 3;
6  char *paramNames[] = {"Startzeit", "h", "T"};
7  double Startzeit = 0;
8  double h = 0.01;
9  double T = 0.5;
10 double c[2] = {0, 0};
11 double r[2] = {1, 1};
12 double tFinal = 1;

13 void real_rhs(double *x, double *y)
14 { y[0] = 1;
15   y[1] = -x[1] + sin(x[0]);
16   y[2] = x[2] + cos(x[0]); }

17 void rkSchritt(double *x, double *y, double sw)
18 { int i;
19   double z[3], k1[3], k2[3], k3[3], k4[3];
20   real_rhs(x, k1);
21   for (i = 0; i < 3; i++) z[i] = x[i] + sw / 2 * k1[i];
22   real_rhs(z, k2);
23   for (i = 0; i < 3; i++) z[i] = x[i] + sw / 2 * k2[i];
24   real_rhs(z, k3);
25   for (i = 0; i < 3; i++) z[i] = x[i] + sw * k3[i];
26   real_rhs(z, k4);
27   for (i = 0; i < 3; i++) y[i] = x[i] + (sw / 6) *
28     (k1[i] + 2 * k2[i] + 2 * k3[i] + k4[i]); }

29 void rhs(double *x, double *u, double *y)
30 { int i, j, n;
31   double xx[3], yy[3];
32   n = tFinal / h;
33   xx[0] = Startzeit; xx[1] = x[0]; xx[2] = x[1];
34   for (i = 0; i < (n+1); i++)
35     { rkSchritt(xx, yy, (double)(T / (n+1)));

```

```

36     for (j = 0; j < 3; j++) xx[j] = yy[j]; }
37     y[0] = yy[1];
38     y[1] = yy[2];
39     return; }

```

In den Zeilen 1 bis 12 werden die für die Modelldateien üblichen Variablen deklariert. Hierbei sind vor allem die Parameter, die in Zeile 6 eingeführt werden, wichtig. **Startzeit** bezeichnet den Wert  $p \in P$ , für den  $\varphi(T, p, x)$  ausgewertet werden soll; die Variable **h** entspricht der kleinen Schrittweite beim Runge-Kutta-Verfahren. In den Zeilen 13 bis 16 ist die rechte Seite des Systems in autonomisierter Form erklärt. Das Runge-Kutta-Verfahren ist in den Zeilen 17 bis 28 implementiert. In den Zeilen 29 bis 39 werden die Runge-Kutta-Schritte gesteuert und schließlich der Funktionswert der Zeit- $T$ -Abbildung übergeben.

Zur Implementierung des Unterteilungsalgorithmus im Phasenraum müssen wir beachten, dass  $Q$  ein  $N$ -Quader  $Q(c, r)$  ist und dass die betrachteten Zerlegungen von  $Q$  von der Form

$$\mathcal{B}^{(i)} = \mathcal{B}(Q, q - 1 + i) \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, m\}$$

mit einer Konstante  $q \in \mathbb{Z}_0^+$  sind.

Wir betrachten nun den Quellcode der MATLAB-Version von GAIO zur Implementierung des Unterteilungsalgorithmus im Phasenraum. Die Variablen  $T$ ,  $N$ ,  $c_1, \dots, c_N$ ,  $r_1, \dots, r_N$ ,  $q$ ,  $m$ ,  $p_0$ ,  $k_0$  und  $k_1$  sind durch Zahlenwerte zu ersetzen.

```

1  md = Model('Beispiel');
2  i = Integrator('Map');
3  i.model = md;
4  md.T = T;
5  t = Tree([c1 ... cN], [r1 ... rN]);
6  t.integrator = i;
7  t.domain_points = Points('MonteCarlo', N, '100');
8  t.image_points = Points('Center', N, '1');

9  % q Unterteilungen der Box Q
10 for k = 1:q,
11     t.set_flags('all', 8);
12     t.subdivide(8);
13 end;

14 % Unterteilungsschritte
15 for k = 1:(m - 1),
16     t.set_flags('all', 8);
17     t.subdivide(8);
18     md.Startzeit = p0 + (k0 + k - 1) * T;
19     t.set_flags('all', 4);
20     t.expand(k + q, 0, 2, 2);

```

```
21     t.remove(2);
22     end;

23     % weitere Startschritte und Fortsetzungsschritte
24     for k = 1:(k1 - k0 - m + 1),
25         t.change_flags('all', 2, 4);
26         md.Startzeit = p0 + (k0 + k + m - 2) * T;
27         t.expand(m + q - 1, 0, 2, 2);
28         t.remove(2);
29     end;
```

Die Zeilen 1 bis 8 dienen der Definition der vier Objekte „Modell“, „Integrator“, „Punkt“ und „Baum“. In den Zeilen 9 bis 13 wird die Box  $Q$  unterteilt, bis die Zerlegung erreicht ist, bei der der Unterteilungsalgorithmus startet. In den Zeilen 14 bis 22 werden die Unterteilungsschritte ausgeführt. Hierbei werden nach jeder Unterteilung alle Boxen durch das nichtautonome dynamische System abgebildet; nur die getroffenen Boxen bleiben aktiviert. Bei den weiteren Startschritten und Fortsetzungsschritten in den Zeilen 23 bis 29 wird genauso vorgegangen; es entfallen lediglich die Unterteilungen.

# Kapitel 5

## Theorie der nichtautonomen Mannigfaltigkeiten

Nichtautonome Mannigfaltigkeiten von Systemen nichtautonomer Differenzen- und Differenzialgleichungen sind Teilmengen des erweiterten Phasenraums, die aus Lösungsgraphen mit bestimmtem Wachstumsverhalten bestehen. Bei dieser dynamischen Charakterisierung spielt der Begriff der Quasibeschränktheit, den wir in Abschnitt 5.1 einführen, eine große Rolle. In den Abschnitten 5.2 und 5.4 zitieren wir Existenzresultate für nichtautonome Mannigfaltigkeiten und Faserungen aus der Literatur und erweitern sie für unsere Bedürfnisse. Darüber hinaus konstruieren wir in den Abschnitten 5.3 und 5.5 Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten.

In diesem Kapitel verzichten wir weitgehend auf Beispiele und Bemerkungen und verweisen auf AULBACH [4], AULBACH, WANNER [11] für Differenzengleichungen und AULBACH, WANNER [9, 10] für Differenzialgleichungen (siehe auch SIEGMUND [33]).

### 5.1 Quasibeschränkte Funktionen

Exponentielle Konzepte spielen in der Theorie der Differenzengleichungen und der gewöhnlichen Differenzialgleichungen eine große Rolle; beispielsweise sind Exponentialfunktionen Lösungen der skalaren und linearen Differenzen- und Differenzialgleichungen

$$x' = ax \quad (a \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad \dot{x} = ax \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Durch den Begriff der Quasibeschränktheit lassen sich Funktionen durch ihr Wachstumsverhalten klassifizieren. Hierbei spielt es eine Rolle, ob die Funktionen schwächer als bestimmte Exponentialfunktionen wachsen. Bei der Definition der Quasibeschränktheit unterscheiden wir zwischen Funktionen mit diskretem Definitionsbereich und Funktionen, die auf einem reellen Intervall erklärt sind.

Der bei Differenzengleichungen verwendete Begriff ist wie folgt definiert:

**5.1.1 Definition:** Gegeben sei eine Zahl  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , ein  $\mathbb{Z}$ -Intervall  $I$  und eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

(i)  $g$  heißt  $\gamma^+$ -quasibeschränkt, falls  $\sup I = \infty$  und für ein  $\kappa \in I$  die Menge  $\{\|g(k)\|\gamma^{-k} : k \geq \kappa\}$  nach oben beschränkt ist. In diesem Fall definieren wir

$$\|g\|_{\kappa, \gamma}^+ := \sup \{\|g(k)\|\gamma^{-k} : k \geq \kappa\}.$$

(ii)  $g$  heißt  $\gamma^-$ -quasibeschränkt, falls  $\inf I = -\infty$  und für ein  $\kappa \in I$  die Menge  $\{\|g(k)\|\gamma^{-k} : k \leq \kappa\}$  nach oben beschränkt ist. In diesem Fall definieren wir

$$\|g\|_{\kappa, \gamma}^- := \sup \{\|g(k)\|\gamma^{-k} : k \leq \kappa\}.$$

(iii)  $g$  heißt  $\gamma^\pm$ -quasibeschränkt, falls  $I = \mathbb{Z}$  und die Menge  $\{\|g(k)\|\gamma^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}$  nach oben beschränkt ist. In diesem Fall definieren wir

$$\|g\|_{\gamma}^\pm := \sup \{\|g(k)\|\gamma^{-k} : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Im Kontext von Differenzialgleichungen verwenden wir den folgenden Begriff der Quasibeschränktheit:

**5.1.2 Definition:** Gegeben sei eine Zahl  $\gamma \in \mathbb{R}$ , ein Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  und eine Funktion  $g : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ .

(i)  $g$  heißt  $\gamma^+$ -quasibeschränkt, falls  $\sup I = \infty$  und für ein  $\tau \in I$  die Menge  $\{\|g(t)\|e^{-\gamma t} : t \geq \tau\}$  nach oben beschränkt ist. In diesem Fall definieren wir

$$\|g\|_{\tau, \gamma}^+ := \sup \{\|g(t)\|e^{-\gamma t} : t \geq \tau\}.$$

(ii)  $g$  heißt  $\gamma^-$ -quasibeschränkt, falls  $\inf I = -\infty$  und für ein  $\tau \in I$  die Menge  $\{\|g(t)\|e^{-\gamma t} : t \leq \tau\}$  nach oben beschränkt ist. In diesem Fall definieren wir

$$\|g\|_{\tau, \gamma}^- := \sup \{\|g(t)\|e^{-\gamma t} : t \leq \tau\}.$$

(iii)  $g$  heißt  $\gamma^\pm$ -quasibeschränkt, falls  $I = \mathbb{R}$  und die Menge  $\{\|g(t)\|e^{-\gamma t} : t \in \mathbb{R}\}$  nach oben beschränkt ist. In diesem Fall definieren wir

$$\|g\|_{\gamma}^\pm := \sup \{\|g(t)\|e^{-\gamma t} : t \in \mathbb{R}\}.$$

## 5.2 Nichtautonome Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir das folgende System von Differenzgleichungen:

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + F(k, x, y) \\ y' &= B(k)y + G(k, x, y). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Hierbei sind  $A : I \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}$ ,  $F : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  und  $G : I \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  Abbildungen mit einem nach rechts unbeschränkten  $\mathbb{Z}$ -Intervall  $I$ . Weiterhin setzen wir voraus, dass  $F(k, 0, 0) = 0$  und  $G(k, 0, 0) = 0$  für alle  $k \in I$  und dass die Matrix  $B(k)$  für alle  $k \in I$  invertierbar ist. Ferner gelte:

- (1) Voraussetzungen an den Linearteil: Die Übergangsmatrizen  $\Phi$  und  $\Psi$  der linearen Differenzgleichungen  $x' = A(k)x$  und  $y' = B(k)y$  erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|\Phi(l, m)\| &\leq K\alpha^{l-m} \quad \text{für alle } l \geq m, \\ \|\Psi(l, m)\| &\leq K\beta^{l-m} \quad \text{für alle } l \leq m\end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $K \geq 1$  und  $\alpha < \beta$ .

- (2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Für alle  $k \in I$  und  $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  gilt

$$\begin{aligned}\|F(k, x, y) - F(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\|, \\ \|G(k, x, y) - G(k, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\|,\end{aligned}$$

wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung  $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$  erfüllt.

Die allgemeine Lösung von (5.1) bezeichnen wir mit

$$\lambda(k; \kappa, \xi, \eta) = (\lambda_1(k; \kappa, \xi, \eta), \lambda_2(k; \kappa, \xi, \eta)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$

Schließlich wählen wir eine Konstante  $\delta \in (2KL, \frac{\beta - \alpha}{2}]$ . Dies ist möglich, da die Voraussetzung  $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$  die Beziehung  $2KL < \frac{\beta - \alpha}{2}$  impliziert.

### 5.2.1 Hauptsatz über invariante Faserbündel

Der folgende Satz beschreibt die Existenz nichtautonomer Mannigfaltigkeiten für die Differenzgleichung (5.1):

**5.2.1 Satz (Existenz nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen)**: Für das System von Differenzgleichungen (5.1) gelten folgende Aussagen:

- (a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s_0 : I \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , deren Graph

$$S_0 := \{(\kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi)) : \kappa \in I, \xi \in \mathbb{R}^N\}$$

die zwei verschiedenen Charakterisierungen

$$\begin{aligned}S_0 &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda_2(\cdot; \kappa, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\} \\ &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\}\end{aligned}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $s_0$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\kappa \in I$  und  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$  gilt  $s_0(\kappa, 0) = 0$  und

$$\|s_0(\kappa, \xi_1) - s_0(\kappa, \xi_2)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

(ii) Für alle  $\kappa \in I$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^N$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi))\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \left( K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)} \right) \|\xi\| \gamma^{-\kappa}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \kappa, \xi, s_0(\kappa, \xi))\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi\| \gamma^{-\kappa}. \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $S_0$  ist ein invariantes Faserbündel von (5.1) im folgenden Sinne: Ist  $(\kappa, \xi, \eta) \in S_0$ , so gilt  $(k, \lambda(k; \kappa, \xi, \eta)) \in S_0$  für alle  $k \geq \kappa$ . Ist (5.1) invertierbar, so gilt diese Aussage auch für alle  $k < \kappa$ .

(b) Im Fall  $I = \mathbb{Z}$  gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung  $r_0 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , deren Graph

$$R_0 := \{(\kappa, r_0(\kappa, \eta), \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{R}^M\}$$

die zwei verschiedenen Charakterisierungen

$$\begin{aligned} R_0 &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \text{Es existiert eine Lösung } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta) : \\ &\quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \text{ von (5.1) mit } \lambda^*(\kappa; \kappa, \xi, \eta) = (\xi, \eta), \text{ und} \\ &\quad \lambda_1^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\} \\ &= \{(\kappa, \xi, \eta) : \text{Es existiert eine Lösung } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta) : \\ &\quad \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \text{ von (5.1) mit } \lambda^*(\kappa; \kappa, \xi, \eta) = (\xi, \eta), \text{ und} \\ &\quad \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Hierbei ist die Lösung  $\lambda^*(\cdot; \kappa, \xi, \eta)$  eindeutig bestimmt. Die Abbildung  $r_0$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^M$  gilt  $r_0(\kappa, 0) = 0$  und

$$\|r_0(\kappa, \eta_1) - r_0(\kappa, \eta_2)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

(ii) Für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^M$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta), \eta)\|_{\kappa, \gamma}^- &\leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta\| \gamma^{-\kappa}, \\ \|\lambda_2^*(\cdot; \kappa, r_0(\kappa, \eta), \eta)\|_{\kappa, \gamma}^- &\leq \left( K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)} \right) \|\eta\| \gamma^{-\kappa}. \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $R_0$  ist ein invariantes Faserbündel von (5.1) im oben beschriebenen Sinne.

(c) Im Fall  $I = \mathbb{Z}$  haben die beiden invarianten Faserbündel  $S_0$  und  $R_0$  nur die triviale Lösung gemeinsam, es gilt also

$$S_0 \cap R_0 = \{(\kappa, 0, 0) : \kappa \in \mathbb{Z}\}.$$

Mit anderen Worten: Die triviale Lösung ist die einzige  $\gamma^\pm$ -quasibeschränkte Lösung von (5.1).

**Beweis:** In AULBACH [4, Theorem 4.1, S. 524] ist dieser Satz für den Spezialfall  $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$  bewiesen; insbesondere gelten dort die Charakterisierungen von  $S_0$  und  $R_0$  nur für den Wert  $\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Zum Nachweis der Verallgemeinerung geben wir ein beliebiges  $\delta \in (2KL, \frac{\beta - \alpha}{2}]$  vor und betrachten die Werte

$$\begin{aligned}\alpha_1(q) &= q + \alpha \\ \beta_1(q) &= q + \alpha + 2\delta \quad \text{für alle } q \in [0, \beta - \alpha - 2\delta].\end{aligned}$$

Wir wenden nun Theorem 4.1 aus AULBACH [4] mit den Konstanten  $\alpha_1(q)$  und  $\beta_1(q)$  anstelle von  $\alpha$  und  $\beta$  an. Sicherlich gelten die Voraussetzungen an den Linearteil (1) auch für die Werte  $\alpha_1(q)$  und  $\beta_1(q)$ , da  $\alpha_1(q) \geq \alpha$  und  $\beta_1(q) \leq \beta$  für alle  $q \in [0, \beta - \alpha - 2\delta]$ . Die Bedingung an die Lipschitz-Konstante  $L$  des Systems ist wegen  $\frac{\beta_1 - \alpha_1}{4K} = \frac{2\delta}{4K} > \frac{4KL}{4K} = L$  erfüllt.

Für jedes  $q \in [0, \beta - \alpha - 2\delta]$  erhalten wir demnach eine Funktion  $s_0^q : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , deren Graph die in (a) angegebene Charakterisierung für  $\gamma = \gamma(q) = \frac{\alpha_1(q) + \beta_1(q)}{2} = q + \alpha + \delta$  erfüllt. Da  $\gamma_1^+$ -Quasibeschränktheit  $\gamma_2^+$ -Quasibeschränktheit impliziert, falls  $\gamma_1 < \gamma_2$ , ist die Funktion  $s_0 = s_0^q$  unabhängig von  $q$ . Wir können  $\gamma$  daher, wie behauptet, aus der Menge  $\{q + \alpha + \delta \in \mathbb{R} : q \in [0, \beta - \alpha - 2\delta]\} = [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  wählen.

Die Aussagen für die Funktion  $r_0$  lassen sich analog herleiten. Die entsprechenden Abschätzungen in (a), (i), (ii) und (b), (i), (ii) erhält man, indem man in Theorem 4.1 aus AULBACH [4] die Werte  $\beta - \alpha$  durch  $\beta_1(q) - \alpha_1(q) = 2\delta$  ersetzt.  $\square$

### 5.2.2 Faserung des erweiterten Phasenraums

In diesem Unterabschnitt konstruieren wir zunächst  $S$ - und bei Invertierbarkeit von (5.1)  $R$ -Faserbündel durch beliebige Lösungen der Differenzgleichung (5.1). Anschließend geben wir Bedingungen an, die garantieren, dass jedes  $S$ - und  $R$ -Faserbündel nichtleeren Schnitt mit dem  $R_0$ - und  $S_0$ -Faserbündel hat.

**5.2.2 Lemma (Faserbündel durch Lösungen):** Für das System von Differenzgleichungen (5.1) mit  $I = \mathbb{Z}$  gelten folgende Aussagen:

(a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s : \{(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M : \kappa \geq \kappa_0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , so dass für jeden festen Punkt  $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  der Graph

$$S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} := \{(\kappa, \xi, s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) : \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \geq \kappa_0, \xi \in \mathbb{R}^N\}$$

die Charakterisierung

$$S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} = \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt, } \kappa \geq \kappa_0\}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $s$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$  mit  $\kappa \geq \kappa_0$ ,  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta_0 \in \mathbb{R}^M$  gilt

$$\|s(\kappa, \xi_1, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) - s(\kappa, \xi_2, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

(ii) Für alle  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$  mit  $\kappa \geq \kappa_0$ ,  $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\eta_0 \in \mathbb{R}^M$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \kappa, \xi, s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \lambda_1(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \\ \left(K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)}\right) \|\xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \gamma^{-\kappa}, & \\ \|\lambda_2(\cdot; \kappa, \xi, s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \lambda_2(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \\ \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \gamma^{-\kappa}. & \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $S_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$  ist ein invariantes Faserbündel von (5.1), das sogenannte  $S$ -Faserbündel durch  $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$  oder durch die Lösung  $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ .

(b) Ist die Differenzgleichung (5.1) invertierbar, so existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $r : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , so dass für jeden festen Punkt  $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  der Graph

$$R_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} := \{(\kappa, r(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{R}^M\}$$

die Charakterisierung

$$R_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} = \{(\kappa, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $r$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^M$  gilt

$$\|r(\kappa, \eta_1, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) - r(\kappa, \eta_2, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

(ii) Für alle  $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{Z}$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\eta, \eta_0 \in \mathbb{R}^M$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \kappa, r(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \eta) - \lambda_1(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\kappa, \gamma}^- &\leq \\ &\frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta - \lambda_2(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \gamma^{-\kappa}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \kappa, r(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \eta) - \lambda_2(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\kappa, \gamma}^+ &\leq \\ &\left( K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)} \right) \|\eta - \lambda_2(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)\| \gamma^{-\kappa}. \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $R_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}$  ist ein invariantes Faserbündel von (5.1), das sogenannte  $R$ -Faserbündel durch  $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$  oder durch die Lösung  $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ .

**Beweis:** In AULBACH, WANNER [11, Proposition 2.2,2.3] sind für den Fall  $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$  alle Aussagen bis auf (a), (ii) und (b), (ii) nachgewiesen. Die Erweiterung auf  $\delta \in (2KL, \frac{\beta - \alpha}{2}]$  ergibt sich unmittelbar, wenn man in den Beweisen statt der speziellen Version des Hauptsatzes über invariante Faserbündel den im vorigen Abschnitt erweiterten Satz 5.2.1 heranzieht. Zur Aussage (a), (ii):

Im Beweis in AULBACH, WANNER [11, Proposition 2.2] wird die für alle  $k \geq \kappa_0$  und  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  erklärte Differenzgleichung der gestörten Bewegung zur Lösung  $\lambda(\cdot; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$  betrachtet:

$$\begin{aligned} x' &= A(k)x + \tilde{F}_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}(k, x, y) \\ y' &= B(k)y + \tilde{G}_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}(k, x, y) \end{aligned} \quad (5.2)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}(k, x, y) &:= F(k, x + \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad F(k, \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) \\ \tilde{G}_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}(k, x, y) &:= G(k, x + \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), y + \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \\ &\quad G(k, \lambda_1(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0), \lambda_2(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)). \end{aligned}$$

Nach AULBACH, WANNER [11] erfüllt diese Differenzgleichung die Voraussetzungen des Satzes 5.2.1. Wir erhalten daher eine Funktion  $s_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0} : \{(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N : \kappa \geq \kappa_0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , deren Graph das  $S_0$ -Faserbündel von (5.2) ist. Für  $\kappa \geq \kappa_0$  wird definiert:

$$s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) := s_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}(\kappa, \xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) + \lambda_2(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0).$$

Wegen Satz 1.2.7 ist die für alle  $k \geq \kappa$  erklärte Funktion

$$\mu(k) := \lambda(k; \kappa, \xi, s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) - \lambda(k; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)$$

eine Lösung von (5.2) mit

$$\begin{aligned} \mu(\kappa) &= \begin{pmatrix} \xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \\ s(\kappa, \xi, \kappa_0, \xi_0, \eta_0) - \lambda_2(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0) \\ s_{\kappa_0, \xi_0, \eta_0}(\kappa, \xi - \lambda_1(\kappa; \kappa_0, \xi_0, \eta_0)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also eine Lösung von (5.2) auf dem  $S_0$ -Faserbündel, woraus sich mit Satz 5.2.1 (a), (ii) die Behauptung (a), (ii) ergibt.

Der Nachweis von (b), (ii) erfolgt analog unter Verwendung von AULBACH, WANNER [11, Proposition 2.3].  $\square$

In der folgenden Definition wird der Begriff der Faser eingeführt. Horizontale Fasern sind  $S$ -Faserbündel durch Punkte von  $R_0$ . Vertikale Fasern sind  $R$ -Faserbündel durch Punkte von  $S_0$ .

### 5.2.3 Definition:

(i) Die Abbildung  $f_H : \{(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^M : \kappa \geq \kappa_0\} \rightarrow \mathbb{R}^M$ , die durch

$$f_H(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0) := s(\kappa, \xi, \kappa_0, r_0(\kappa_0, \eta_0), \eta_0)$$

definiert ist, nennt man die horizontale Faserung von (5.1). Die für jedes  $(\kappa_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^M$  definierte Menge

$$F_H(\kappa_0, \eta_0) := \{(\kappa, \xi, f_H(\kappa, \xi, \kappa_0, \eta_0)) : \kappa \in \mathbb{Z}, \kappa \geq \kappa_0, \xi \in \mathbb{R}^N\}$$

nennt man horizontale Faser durch  $(\kappa_0, \eta_0)$ .

(ii) Ist die Differenzgleichung (5.1) invertierbar, so ist die vertikale Faserung von (5.1) durch die Abbildung  $f_V : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit

$$f_V(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0) := r(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0, s_0(\kappa_0, \xi_0))$$

gegeben. Die für jedes  $(\kappa_0, \xi_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$  definierte Menge

$$F_V(\kappa_0, \xi_0) := \{(\kappa, f_V(\kappa, \eta, \kappa_0, \xi_0), \eta) : \kappa \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{R}^M\}$$

nennt man vertikale Faser durch  $(\kappa_0, \xi_0)$ .

Der folgende Satz besagt, dass jeder Punkt des erweiterten Phasenraums auf genau einer horizontalen und im Fall der Invertierbarkeit auf einer vertikalen Faser liegt.

**5.2.4 Satz (Faserung des erweiterten Phasenraums):** Wir nehmen an, dass für das System (5.1) mit  $I = \mathbb{Z}$  die Lipschitz-Konstante  $L$  der Ungleichung

$$0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K^2} (2 + K - \sqrt{4 + K^2})$$

genügt. Dann existiert eine stetige Abbildung  $\mathcal{F}_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  mit der folgenden Eigenschaft: Jeder Punkt  $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  liegt auf genau einer horizontalen Faser, nämlich auf  $F_H(\kappa_0, \eta)$  mit  $\eta = \mathcal{F}_1(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ . Darüber hinaus gilt für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}, \xi \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta \in \mathbb{R}^M$  die Abschätzung

$$\|\mathcal{F}_1(\kappa, \xi, \eta)\| \leq \frac{1}{1 - \mathcal{C}(L)^2} (\|\xi\| + \|\eta\|),$$

wobei die Konstante  $\mathcal{C}(L)$  durch

$$\mathcal{C}(L) := \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)}$$

definiert ist. Ist darüber hinaus die Differenzgleichung (5.1) invertierbar, so gibt es eine Abbildung  $\mathcal{F}_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit der folgenden Eigenschaft: Jeder Punkt  $(\kappa_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  liegt auf genau einer vertikalen Faser, nämlich auf  $F_V(\kappa_0, \xi)$  mit  $\xi = \mathcal{F}_2(\kappa_0, \xi_0, \eta_0)$ . Des Weiteren gilt für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta \in \mathbb{R}^M$  die Abschätzung

$$\|\mathcal{F}_2(\kappa, \xi, \eta)\| \leq \frac{1}{1 - \mathcal{C}(L)^2} (\|\xi\| + \|\eta\|).$$

**Beweis:** In AULBACH, WANNER [11, Theorem 3.2,3.5] ist dieser Satz für den Spezialfall  $\delta = \frac{\beta - \alpha}{2}$  gezeigt. Die Erweiterung auf  $\delta \in (2KL, \frac{\beta - \alpha}{2}]$  ergibt sich unmittelbar, wenn man im Beweis in AULBACH, WANNER [11, Theorem 3.2,3.5] statt der speziellen Version das erweiterte Lemma 5.2.2 heranzieht.  $\square$

### 5.3 Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen

Wir verallgemeinern nun die Situation aus Abschnitt 5.2 und betrachten das folgende System von Differenzgleichungen:

$$\begin{aligned} x'_1 &= B_1(k)x_1 + F_1(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 &= B_2(k)x_2 + F_2(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x'_n &= B_n(k)x_n + F_n(k, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Hierbei sind  $B_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ ,  $F_i : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_i}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) Abbildungen mit  $F_i(k, 0, 0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ( $N = N_1 + \dots + N_n$ ). Weiterhin setzen wir voraus, dass die Matrizen  $B_i(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $i \in \{2, \dots, n\}$  invertierbar sind. Ferner gelte:

- (1) Voraussetzungen an den Linearteil: Es gibt reelle Konstanten  $K \geq 1$  und  $\alpha_i < \beta_i$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) mit  $\beta_i \leq \alpha_{i+1}$  ( $i \in \{1, \dots, n-2\}$ ), so dass die Übergangsmatrizen  $\Phi_i$  der linearen Differenzgleichungen  $x'_i = B_i(k)x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi_i(l, m)\| &\leq K\alpha_i^{l-m} \quad \text{für alle } l \geq m, \\ \|\Phi_{i+1}(l, m)\| &\leq K\beta_i^{l-m} \quad \text{für alle } l \leq m \end{aligned}$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  erfüllen.

(2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Es gilt die Abschätzung

$$\|F_i(k, x_1, \dots, x_n) - F_i(k, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\| \leq L \sum_{j=1}^n \|x_j - \bar{x}_j\| = L \|x - \bar{x}\|$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $x = (x_1, \dots, x_n), \bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^N$ , wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung  $0 \leq L < \min \left\{ \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K(n-1)} : i \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$  erfüllt.

Wir wählen Konstanten  $\delta_i \in (2KL(n-1), \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}]$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ).

**5.3.1 Satz (Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten):** Für das System (5.3) gibt es invariante Faserbündel  $\mathcal{W}_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) mit folgender Charakterisierung:

(a)  $\mathcal{W}_{1,n} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$ .

(b) Für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  und  $\gamma \in [\alpha_i + \delta_i, \beta_i - \delta_i]$  gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{1,i} &= \{(\kappa, \xi) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\}, \\ \mathcal{W}_{i+1,n} &= \{(\kappa, \xi) : \text{Es existiert eine Lösung } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ von (5.3)} \\ &\quad \text{mit } \lambda^*(\kappa; \kappa, \xi) = \xi, \text{ und } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

(c) Für alle  $1 < i \leq j < n$  gilt  $\mathcal{W}_{i,j} = \mathcal{W}_{1,j} \cap \mathcal{W}_{i,n}$ . Daher ist für jede Wahl von  $\gamma_1 \in [\alpha_j + \delta_j, \beta_j - \delta_j]$  und  $\gamma_2 \in [\alpha_{i-1} + \delta_{i-1}, \beta_{i-1} - \delta_{i-1}]$

$$\mathcal{W}_{i,j} = \{(\kappa, \xi) : \text{Es existiert eine Lösung } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ von (5.3)} \\ \text{mit } \lambda^*(\kappa; \kappa, \xi) = \xi, \text{ und } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma_1^+ \text{- und } \gamma_2^- \text{-quasibeschränkt}\}$$

erfüllt.

**Beweis:** Zunächst setzen wir abkürzend für  $1 \leq i \leq j \leq n$

$$B_{i,j}(k) := \begin{pmatrix} B_i(k) & & & 0 \\ & B_{i+1}(k) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_j(k) \end{pmatrix}, \quad x_{i,j} := \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix}$$

und

$$F_{i,j}(k, x) := \begin{pmatrix} F_i(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ F_{i+1}(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_j(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad N_{i,j} := \sum_{k=i}^j N_k.$$

(a) Sicherlich ist  $\mathcal{W}_{1,n} = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$  ein invariantes Faserbündel von (5.3).

(b) Für eine fest gewählte Zahl  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  lässt sich das System (5.3) als zweigeteiltes



**5.3.2 Definition:** Wir nennen das System von Differenzengleichungen (5.3) hyperbolisch, falls es ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $1 \in (\alpha_i, \beta_i)$  gibt. Die nichtautonome Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,i}$  heißt dann stabile Mannigfaltigkeit;  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  wird als die instabile Mannigfaltigkeit des Systems bezeichnet.

## 5.4 Nichtautonome Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir das folgende System von Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(t)x + F(t, x, y) \\ \dot{y} &= B(t)y + G(t, x, y).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Hierbei sind  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{M \times M}$ ,  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  und  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  stetige Abbildungen mit  $F(t, 0, 0) = 0$  und  $G(t, 0, 0) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ferner gelte:

- (1) Voraussetzungen an den Linearteil: Die Übergangsmatrizen  $\Phi$  und  $\Psi$  der linearen Differenzialgleichungen  $\dot{x} = A(t)x$  und  $\dot{y} = B(t)y$  erfüllen die Abschätzungen

$$\begin{aligned}\|\Phi(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Psi(t, s)\| &\leq Ke^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s\end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $K \geq 1$  und  $\alpha < \beta$ .

- (2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $(x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  gilt

$$\begin{aligned}\|F(t, x, y) - F(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\|, \\ \|G(t, x, y) - G(t, \bar{x}, \bar{y})\| &\leq L\|x - \bar{x}\| + L\|y - \bar{y}\|,\end{aligned}$$

wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung  $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$  erfüllt.

Aufgrund des Satzes 1.3.7 existieren alle Lösungen auf  $\mathbb{R}$ . Die allgemeine Lösung von (5.4) bezeichnen wir mit

$$\lambda(t; \tau, \xi, \eta) = (\lambda_1(t; \tau, \xi, \eta), \lambda_2(t; \tau, \xi, \eta)) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$

Schließlich wählen wir eine Konstante  $\delta \in (2KL, \frac{\beta - \alpha}{2}]$ . Dies ist möglich, da die Voraussetzung  $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K}$  die Beziehung  $2KL < \frac{\beta - \alpha}{2}$  impliziert.

### 5.4.1 Hauptsatz über Integralmannigfaltigkeiten

Der folgende Satz beschreibt die Existenz nichtautonomer Mannigfaltigkeiten für die Differenzialgleichung (5.4):

**5.4.1 Satz (Existenz nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen):** Für das System von Differenzialgleichungen (5.4) gelten folgende Aussagen:

(a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ , deren Graph

$$S_0 := \{(\tau, \xi, s_0(\tau, \xi)) : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N\}$$

die zwei verschiedenen Charakterisierungen

$$\begin{aligned} S_0 &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda_2(\cdot; \tau, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\} \\ &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $s_0$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$  gilt  $s_0(\tau, 0) = 0$  und

$$\|s_0(\tau, \xi_1) - s_0(\tau, \xi_2)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

(ii) Für alle  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^N$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi))\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \left( K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)} \right) \|\xi\| e^{-\gamma \tau}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, s_0(\tau, \xi))\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi\| e^{-\gamma \tau}. \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $S_0$  ist eine Integralmannigfaltigkeit von (5.4) im folgenden Sinne: Ist  $(\tau, \xi, \eta) \in S_0$ , so gilt  $(t, \lambda(t; \tau, \xi, \eta)) \in S_0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

(b) Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung  $r_0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , deren Graph

$$R_0 := \{(\tau, r_0(\tau, \eta), \eta) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}^M\}$$

die zwei verschiedenen Charakterisierungen

$$\begin{aligned} R_0 &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda_1(\cdot; \tau, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\} \\ &= \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $r_0$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\tau \in \mathbb{R}$  und  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^M$  gilt  $r_0(\tau, 0) = 0$  und

$$\|r_0(\tau, \eta_1) - r_0(\tau, \eta_2)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

(ii) Für alle  $\tau \in \mathbb{R}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^M$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned}\|\lambda_1(\cdot; \tau, r_0(\tau, \eta), \eta)\|_{\tau, \gamma}^- &\leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta\| e^{-\gamma\tau}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \tau, r_0(\tau, \eta), \eta)\|_{\tau, \gamma}^- &\leq \left( K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)} \right) \|\eta\| e^{-\gamma\tau}.\end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $R_0$  ist eine Integralmannigfaltigkeit von (5.4) im oben beschriebenen Sinne.

(c) Die beiden Integralmannigfaltigkeiten  $S_0$  und  $R_0$  haben nur die triviale Lösung gemeinsam, es gilt also

$$S_0 \cap R_0 = \{(\tau, 0, 0) : \tau \in \mathbb{R}\}.$$

Mit anderen Worten: Die triviale Lösung ist die einzige  $\gamma^\pm$ -quasibeschränkte Lösung von (5.4).

**Beweis:** siehe AULBACH, WANNER [9, Theorem 4.1, S. 78]; die Abschätzungen in (a), (ii) und (b), (ii) sind dem Beweis dieses Satz entnommen.  $\square$

#### 5.4.2 Faserung des erweiterten Phasenraums

In diesem Unterabschnitt konstruieren wir zunächst  $S$ - und  $R$ -Integralmannigfaltigkeiten durch beliebige Lösungen der Differentialgleichung (5.4). Anschließend geben wir Bedingungen an, die garantieren, dass jede  $S$ - bzw.  $R$ -Integralmannigfaltigkeit nichtleeren Schnitt mit der  $R_0$ - bzw.  $S_0$ -Integralmannigfaltigkeit hat.

**5.4.2 Lemma (Integralmannigfaltigkeiten durch Lösungen):** Für das System von Differentialgleichungen (5.4) gelten folgende Aussagen:

(a) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ , so dass für jeden festen Punkt  $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  der Graph

$$S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} := \{(\tau, \xi, s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0)) : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N\}$$

die Charakterisierung

$$S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} = \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $s$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta_0 \in \mathbb{R}^M$  gilt

$$\|s(\tau, \xi_1, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - s(\tau, \xi_2, \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi_1 - \xi_2\|.$$

(ii) Für alle  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi, \xi_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\eta_0 \in \mathbb{R}^M$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \tau, \xi, s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0)) - \lambda_1(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \\ \left(K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)}\right) \|\xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| e^{-\gamma\tau}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \tau, \xi, s(\tau, \xi, \tau_0, \xi_0, \eta_0)) - \lambda_2(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \\ \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\xi - \lambda_1(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| e^{-\gamma\tau}. \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $S_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$  ist eine Integralmannigfaltigkeit von (5.4), die sogenannte  $S$ -Integralmannigfaltigkeit durch  $(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$  oder durch die Lösung  $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ .

(b) Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $r : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$ , so dass für jeden festen Punkt  $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  der Graph

$$R_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} := \{(\tau, r(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0, \eta_0), \eta) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}^M\}$$

die Charakterisierung

$$R_{\tau_0, \xi_0, \eta_0} = \{(\tau, \xi, \eta) : \lambda(\cdot; \tau, \xi, \eta) - \lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\}$$

für jede Wahl von  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  erfüllt. Die Abbildung  $r$  ist stetig und es gilt:

(i) Für alle  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta_0, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^M$  gilt

$$\|r(\tau, \eta_1, \tau_0, \xi_0, \eta_0) - r(\tau, \eta_2, \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| \leq \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta_1 - \eta_2\|.$$

(ii) Für alle  $\tau, \tau_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ ,  $\eta, \eta_0 \in \mathbb{R}^M$  und  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda_1(\cdot; \tau, r(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0, \eta_0), \eta) - \lambda_1(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\tau, \gamma}^- &\leq \\ \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)} \|\eta - \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| e^{-\gamma\tau}, \\ \|\lambda_2(\cdot; \tau, r(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0, \eta_0), \eta) - \lambda_2(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\|_{\tau, \gamma}^+ &\leq \\ \left(K + \frac{K^3 L^2}{\delta(\delta - 2KL)}\right) \|\eta - \lambda_2(\tau; \tau_0, \xi_0, \eta_0)\| e^{-\gamma\tau}. \end{aligned}$$

(iii) Der Graph  $R_{\tau_0, \xi_0, \eta_0}$  ist eine Integralmannigfaltigkeit von (5.4), die sogenannte  $R$ -Integralmannigfaltigkeit durch  $(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$  oder durch die Lösung  $\lambda(\cdot; \tau_0, \xi_0, \eta_0)$ .

**Beweis:** In AULBACH, WANNER [10, Theorem 2.1] ist dieser Satz bis auf (a), (ii) und (b), (ii) bewiesen. Analog zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 5.2.2 lassen sich die verbleibenden Aussagen nachweisen.  $\square$

In der folgenden Definition wird der Begriff der Faser eingeführt. Horizontale Fasern sind  $S$ -Integralmannigfaltigkeiten durch Punkte von  $R_0$ . Vertikale Fasern sind  $R$ -Integralmannigfaltigkeiten durch Punkte von  $S_0$ .

#### 5.4.3 Definition:

(i) Die Abbildung  $f_H : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$ , die durch

$$f_H(\tau, \xi, \tau_0, \eta_0) := s(\tau, \xi, \tau_0, r_0(\tau_0, \eta_0), \eta_0)$$

definiert ist, nennt man die horizontale Faserung von (5.4). Die für jedes  $(\tau_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$  definierte Menge

$$F_H(\tau_0, \eta_0) := \{(\tau, \xi, f_H(\tau, \xi, \tau_0, \eta_0)) : \tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N\}$$

nennt man horizontale Faser durch  $(\tau_0, \eta_0)$ .

(ii) Die Abbildung  $f_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die durch

$$f_V(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0) := r(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0, s_0(\tau_0, \xi_0))$$

definiert ist, nennt man die vertikale Faserung von (5.4). Die für jedes  $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$  definierte Menge

$$F_V(\tau_0, \xi_0) := \{(\tau, f_V(\tau, \eta, \tau_0, \xi_0), \eta) : \tau \in \mathbb{R}, \eta \in \mathbb{R}^M\}$$

nennt man vertikale Faser durch  $(\tau_0, \xi_0)$ .

Der folgende Satz besagt, dass jeder Punkt des erweiterten Phasenraums auf genau einer horizontalen und vertikalen Faser liegt.

**5.4.4 Satz (Faserung des erweiterten Phasenraums):** Wir nehmen an, dass für das System (5.4) die Lipschitz-Konstante  $L$  der Ungleichung

$$0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{4K^2} (2 + K - \sqrt{4 + K^2})$$

genügt. Dann existieren stetige Abbildungen  $\mathcal{F}_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M$  und  $\mathcal{F}_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^N$  mit der folgenden Eigenschaft: Jeder Punkt  $(\tau_0, \xi_0, \eta_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$  liegt auf genau einer horizontalen Faser und auf genau einer vertikalen Faser, nämlich auf  $F_H(\tau_0, \eta)$  mit  $\eta = \mathcal{F}_1(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$  und auf  $F_V(\tau_0, \xi)$  mit  $\xi = \mathcal{F}_2(\tau_0, \xi_0, \eta_0)$ . Darüber hinaus gilt für alle  $\tau \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^N$  und  $\eta \in \mathbb{R}^M$  die Abschätzung

$$\max \{ \|\mathcal{F}_1(\tau, \xi, \eta)\|, \|\mathcal{F}_2(\tau, \xi, \eta)\| \} \leq \frac{1}{1 - \mathcal{C}(L)^2} (\|\xi\| + \|\eta\|),$$

wobei die Konstante  $\mathcal{C}(L)$  durch

$$C(L) := \frac{K^2 L(\delta - KL)}{\delta(\delta - 2KL)}$$

definiert ist.

**Beweis:** siehe AULBACH, WANNER [10, Theorem 3.3].  $\square$

## 5.5 Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen

Wir verallgemeinern nun die Situation aus Abschnitt 5.4 und betrachten das folgende System von Differenzialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= B_1(t)x_1 + F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= B_2(t)x_2 + F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= B_n(t)x_n + F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Hierbei sind  $B_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_i \times N_i}$ ,  $F_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N_i}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) stetige Abbildungen mit  $F_i(t, 0, 0) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ( $N = N_1 + \dots + N_n$ ). Ferner gelte:

- (1) Voraussetzungen an den Linearteil: Es gibt reelle Konstanten  $K \geq 1$  und  $\alpha_i < \beta_i$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) mit  $\beta_i \leq \alpha_{i+1}$  ( $i \in \{1, \dots, n-2\}$ ), so dass die Übergangsmatrizen  $\Phi_i$  der linearen Differenzialgleichungen  $\dot{x}_i = B_i(t)x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi_i(t, s)\| &\leq Ke^{\alpha_i(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Phi_{i+1}(t, s)\| &\leq Ke^{\beta_i(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  erfüllen.

- (2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Es gilt die Abschätzung

$$\|F_i(t, x_1, \dots, x_n) - F_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\| \leq L \sum_{j=1}^n \|x_j - \bar{x}_j\| = \|x - \bar{x}\|$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^N$ , wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung  $0 \leq L < \min \left\{ \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K(n-1)} : i \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$  erfüllt.

Wir wählen Konstanten  $\delta_i \in (2KL(n-1), \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}]$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ).

**5.5.1 Satz (Hierarchien nichtautonomer Mannigfaltigkeiten):** Für das System (5.5) gibt es Integralmannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) mit folgender Charakterisierung:

(a)  $\mathcal{W}_{1,n} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ .

(b) Für alle  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  und  $\gamma \in [\alpha_i + \delta_i, \beta_i - \delta_i]$  gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{1,i} &= \{(\tau, \xi) : \lambda(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\}, \\ \mathcal{W}_{i+1,n} &= \{(\tau, \xi) : \lambda(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma^-\text{-quasibeschränkt}\}.\end{aligned}$$

(c) Für  $1 < i \leq j < n$  gilt  $\mathcal{W}_{i,j} = \mathcal{W}_{1,j} \cap \mathcal{W}_{i,n}$ . Daher ist für jede Wahl von  $\gamma_1 \in [\alpha_j + \delta_j, \beta_j - \delta_j]$  und  $\gamma_2 \in [\alpha_{i-1} + \delta_{i-1}, \beta_{i-1} - \delta_{i-1}]$

$$\mathcal{W}_{i,j} = \{(\tau, \xi) : \lambda(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma_1^+\text{- und } \gamma_2^-\text{-quasibeschränkt}\}$$

erfüllt.

**Beweis:** analog Satz 5.3.1. □

Die folgende Darstellung veranschaulicht die Lagebeziehungen der Integralmannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{i,j}$ :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{W}_{1,1} & \subset & \mathcal{W}_{1,2} & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{W}_{1,n-1} & \subset & \mathcal{W}_{1,n} \\ & & \cup & & & & \cup & & \cup \\ & & \mathcal{W}_{2,2} & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{W}_{2,n-1} & \subset & \mathcal{W}_{2,n} \\ & & & & & & \cup & & \cup \\ & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & \mathcal{W}_{n-1,n-1} & \subset & \mathcal{W}_{n-1,n} \\ & & & & & & & & \cup \\ & & & & & & & & \mathcal{W}_{n,n} \end{array}$$

**5.5.2 Definition:** Wir nennen das System von Differenzialgleichungen (5.5) hyperbolisch, falls es ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  mit  $0 \in (\alpha_i, \beta_i)$  gibt. Die nichtautonome Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,i}$  heißt dann stabile Mannigfaltigkeit;  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  wird als die instabile Mannigfaltigkeit des Systems bezeichnet.

## Kapitel 6

# Approximation nichtautonomer Mannigfaltigkeiten

Ziel dieses Kapitels ist die Herleitung theoretischer Resultate zur numerischen Berechnung von nichtautonomen Mannigfaltigkeiten. Hierbei betrachten wir zunächst, wie bereits in den Abschnitten 5.3 und 5.5, ein System von Differenzgleichungen

$$\begin{aligned}x'_1 &= B_1(k)x_1 + F_1(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \\x'_2 &= B_2(k)x_2 + F_2(k, x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\x'_n &= B_n(k)x_n + F_n(k, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{6.1}$$

oder von Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= B_1(t)x_1 + F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= B_2(t)x_2 + F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= B_n(t)x_n + F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}\tag{6.2}$$

mit den in diesen Abschnitten gemachten Voraussetzungen an den Linearteil und die Nichtlinearität. Zur Approximation der nach den Sätzen 5.3.1 und 5.5.1 existenten nichtautonomen Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) nutzen wir die in Kapitel 3 gewonnenen Erkenntnisse zur Berechnung von Pullback-Attraktoren, indem wir Zusammenhänge zwischen Pullback-Attraktoren transformierter Systeme und den nichtautonomen Mannigfaltigkeiten nachweisen. Grundlegend für unsere Betrachtungen sind die in Abschnitt 6.1 behandelten Resultate zur Approximation stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten. Durch Spektraltransformationen führen wir in Abschnitt 6.2 die Berechnung beliebiger Mannigfaltigkeiten auf diesen Spezialfall zurück. Der Fragestellung nach der Approximierbarkeit nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Systemen, die nicht den Voraussetzungen aus Kapitel 5 genügen, widmen wir uns im letzten Abschnitt dieses Kapitels.

## 6.1 Approximation stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten

Wir setzen zunächst voraus, dass das System (6.1) bzw. (6.2) hyperbolisch ist. Für eine Zahl  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  gilt daher  $1 \in (\alpha_i, \beta_i)$  bzw.  $0 \in (\alpha_i, \beta_i)$ . In diesem Abschnitt geben wir Bedingungen an, die hinreichend für die Approximierbarkeit der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit sind. Diese betreffen die Beschaffenheit der Spektrallücke  $(\alpha_i, \beta_i)$ , die Größe der Lipschitz-Konstante  $L$  und die Invertierbarkeit des Systems.

Bevor wir die Hauptresultate dieses Abschnitts formulieren und beweisen, setzen wir für beliebige Werte  $1 \leq i \leq j \leq n$

$$B_{i,j} := \begin{pmatrix} B_i & & & 0 \\ & B_{i+1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_j \end{pmatrix}, \quad F_{i,j} := \begin{pmatrix} F_i \\ F_{i+1} \\ \vdots \\ F_j \end{pmatrix}, \quad x_{i,j} := \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_j \end{pmatrix},$$

$N_{i,j} := \sum_{k=i}^j N_k$ ,  $N := N_{1,n}$ ,  $B := B_{1,n}$  und  $F := F_{1,n}$ . Für das System (6.1) schreiben wir auch

$$x' = B(k)x + F(k, x) = f(k, x).$$

Für (6.2) gebrauchen wir auch die Notation

$$\dot{x} = B(t)x + F(t, x) = f(t, x).$$

**6.1.1 Satz (Approximation stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen):** Für das System (6.1) setzen wir voraus, dass es ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  mit

$$1 \in (\alpha_i + 2KL(n-1), \beta_i - 2KL(n-1)) \quad (6.3)$$

gibt und dass die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung

$$0 \leq L < \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K^2(n-1)} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}) \quad (6.4)$$

erfüllt. Dann ist die instabile Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  der globale Pullback-Attraktor von (6.1). Ist darüber hinaus das System (6.1) invertierbar, so besteht folgender Zusammenhang zwischen dem Pullback-Attraktor  $A$  des zeitinvertierten Systems

$$x' = f^{-1}(-k-1, x) \quad (6.5)$$

und der stabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,i}$  von System (6.1):

$$A(k) = \mathcal{W}_{1,i}(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis:** Wir schreiben (6.1) in der Form

$$\begin{aligned} x'_{1,i} &= B_{1,i}(k)x_{1,i} + F_{1,i}(k, x_{1,i}, x_{i+1,n}) \\ x'_{i+1,n} &= B_{i+1,n}(k)x_{i+1,n} + F_{i+1,n}(k, x_{1,i}, x_{i+1,n}). \end{aligned}$$

Im Beweis von Satz 5.3.1 haben wir gezeigt, dass dieses zweigeteilte System die Voraussetzungen des Abschnitts 5.2 mit den Konstanten  $K$ ,  $\alpha := \alpha_i$ ,  $\beta := \beta_i$  und der Lipschitz-Konstante  $L(n-1)$  erfüllt. Unter Anwendung von Satz 5.2.1 ergab sich  $\mathcal{W}_{1,i} = S_0$  und  $\mathcal{W}_{i+1,n} = R_0$ . Aufgrund der Voraussetzung (6.4) existiert gemäß Satz 5.2.4 eine stetige Abbildung  $\mathcal{F}_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N_{1,i}} \times \mathbb{R}^{N_{i+1,n}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{i+1,n}}$  und im Fall der Invertierbarkeit der Differenzgleichung (6.1) eine stetige Abbildung  $\mathcal{F}_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N_{1,i}} \times \mathbb{R}^{N_{i+1,n}} \rightarrow \mathbb{R}^{N_{1,i}}$  mit den in diesem Satz beschriebenen Eigenschaften.

1. Schritt: Wir zeigen, dass  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  der globale Pullback-Attraktor von (6.1) ist.

- (i) Die Invarianz von  $\mathcal{W}_{i+1,n} = R_0$  folgt aus Satz 5.2.1 (b), (iii).
- (ii)  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  ist nach Satz 5.2.1 (b) der Graph der stetigen Abbildung  $r_0$ , also eine abgeschlossene nichtautonome Menge.
- (iii) Zum Nachweis, dass  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $\overline{U_1(0)} \subset \mathbb{R}^N$  ist, sei  $C \subset \mathbb{R}^N$  eine beliebige kompakte Menge. Da  $C$  beschränkt ist, gibt es ein  $M > 0$  mit  $\|x\| < M$  für alle  $x \in C$ . Die Voraussetzung (6.3) impliziert die Existenz einer Zahl  $\delta \in (2KL(n-1), \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}]$  mit  $\gamma := \beta_i - \delta > 1$ . Daher gibt es ein  $\mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C) > 0$ , so dass für alle  $k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C)$

$$\left( \frac{K^2L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} + K + \frac{K^3L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) M\gamma^{-k} < 1 \quad (6.6)$$

gilt. Seien  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(\xi, \eta) = (r_0(k_0, \eta), \eta) \in C \cap \mathcal{W}_{i+1,n}(k_0)$  beliebig gewählt. Dann gilt für alle  $k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C)$

$$\begin{aligned} & \|\lambda^*(k_0 - k; k_0, r_0(k_0, \eta), \eta)\| \\ &= \|\lambda_1^*(k_0 - k; k_0, r_0(k_0, \eta), \eta)\| + \|\lambda_2^*(k_0 - k; k_0, r_0(k_0, \eta), \eta)\| \\ &\stackrel{5.2.1 (b), (ii)}{\leq} \left( \frac{K^2L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} + K + \frac{K^3L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) \underbrace{\|\eta\|}_{< M} \gamma^{-k} \\ &\stackrel{(6.6)}{<} 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle  $k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C)$

$$\begin{aligned} \{(\xi, \eta)\} &= \lambda(k_0; k_0 - k, \{\lambda^*(k_0 - k; k_0, r_0(k_0, \eta), \eta)\}) \\ &\subset \lambda(k_0; k_0 - k, \overline{U_1(0)}). \end{aligned}$$

Da  $(\xi, \eta) \in C \cap \mathcal{W}_{i+1,n}(k_0)$  beliebig gewählt war, gilt

$$C \cap \mathcal{W}_{i+1,n}(k_0) \subset \lambda(k_0; k_0 - k, \overline{U_1(0)}) \quad \text{für alle } k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C).$$

$\mathcal{W}_{i+1,n}$  ist daher kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $\overline{U_1(0)}$ .

(iv) Abschließend weisen wir nach, dass  $\mathbb{Z} \times C \in \mathcal{D}_P(\mathcal{W}_{i+1,n})$  für jede kompakte Menge

$C \subset \mathbb{R}^N$  erfüllt ist. Seien hierzu  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und eine kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^N$  beliebig gewählt. Die Voraussetzung (6.3) impliziert die Existenz einer Zahl  $\delta \in (2KL(n-1), \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}]$  mit  $\gamma := \alpha_i + \delta < 1$ . Zunächst gilt für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
& \|r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)) - \xi\| \\
& \leq \|r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta))\| + \|\xi\| \\
5.2.1 \text{ (b), (i)} \quad & \leq \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \|\mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)\| + \|\xi\| \\
5.2.4 \quad & \leq \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \frac{1}{1 - \mathcal{C}(L(n-1))^2} (\|\xi\| + \|\eta\|) + \|\xi\| \\
& \leq M_1
\end{aligned}$$

mit  $M_1 > 0$ , da  $C$  beschränkt ist. Weiterhin ist für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \in \mathbb{Z}$  die Beziehung

$$s(k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), k, \xi, \eta) = \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)$$

erfüllt, denn wegen Satz 5.2.4 gilt für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \in \mathbb{Z}$

$$(k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)) \in S_{k, \xi, \eta} = F_H(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)).$$

Hieraus ergibt sich für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \leq k_0$

$$\begin{aligned}
& \|\lambda(k_0; k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)) - \lambda(k_0; k, \xi, \eta)\| \\
= & \|\lambda_1(k_0; k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), s(k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), k, \xi, \eta)) - \\
& \lambda_1(k_0; k, \xi, \eta)\| + \\
& \|\lambda_2(k_0; k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), s(k, r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)), k, \xi, \eta)) - \\
& \lambda_2(k_0; k, \xi, \eta)\| \\
5.2.2 \text{ (a), (ii)} \quad & \leq \left( K + \frac{K^3 L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) \|r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)) - \xi\| \gamma^{k_0-k} + \\
& \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \|r_0(k, \mathcal{F}_1(k, \xi, \eta)) - \xi\| \gamma^{k_0-k} \\
& \leq \left( K + \frac{K^3 L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} + \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) M_1 \gamma^{k_0-k} \\
=: & M_2 \gamma^{k_0-k}
\end{aligned}$$

mit  $M_2 > 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann gibt es ein  $\tilde{k} > 0$  mit  $M_2 \gamma^{\tilde{k}} < \varepsilon$ . Daher gilt für jedes  $(\xi, \eta) \in C$  und jedes  $k \geq \tilde{k}$

$$\begin{aligned}
& d(\lambda(k_0; k_0 - k, \xi, \eta), \mathcal{W}_{i+1, n}(k_0)) \\
& \leq \|\lambda(k_0; k_0 - k, r_0(k_0 - k, \mathcal{F}_1(k_0 - k, \xi, \eta)), \mathcal{F}_1(k_0 - k, \xi, \eta)) - \lambda(k_0; k_0 - k, \xi, \eta)\| \\
& \leq M_2 \gamma^k < \varepsilon,
\end{aligned}$$

woraus durch Maximumsbildung über die Menge  $C$  (siehe Lemma 1.1.1) sofort

$$d(\lambda(k_0; k_0 - k, C) | \mathcal{W}_{i+1, n}(k_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq \tilde{k}$$

folgt.  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  ist daher der globale Pullback-Attraktor von (6.1).

2. Schritt: Wir zeigen, dass im Fall der Invertierbarkeit von (6.1) durch

$$A(k) := \mathcal{W}_{1,i}(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

der globale Pullback-Attraktor der Differenzgleichung (6.5) erklärt ist. Ist  $\lambda$  die allgemeine Lösung von (6.1), so ist die allgemeine Lösung von (6.5) durch

$$\tilde{\lambda}(k; k_0, x) := \lambda(-k; -k_0, x) \quad \text{für alle } k, k_0 \in \mathbb{Z} \text{ und } x \in \mathbb{R}^N$$

gegeben, denn für fest gewählte  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathbb{R}^N$  ist  $\tilde{\lambda}(\cdot; k_0, x)$  wegen

$$\begin{aligned} f^{-1}(-k-1, \tilde{\lambda}(k; k_0, x)) &= f^{-1}(-k-1, \lambda(-k; -k_0, x)) \\ &= \lambda(-k-1; -k_0, x) \\ &= \tilde{\lambda}(k+1; k_0, x) \end{aligned}$$

eine Lösung von (6.5) mit

$$\tilde{\lambda}(k_0; k_0, x) = \lambda(-k_0; -k_0, x) = x.$$

(i) Zum Nachweis der Invarianz von  $A$  seien  $\kappa, k \in \mathbb{Z}$  und  $x \in A(\kappa) = \mathcal{W}_{1,i}(-\kappa)$  beliebig gewählt. Die Invarianz von  $\mathcal{W}_{1,i}$  unter System (6.1) (Satz 5.2.1 (a), (iii)) impliziert

$$\tilde{\lambda}(k; \kappa, x) = \lambda(-k; -\kappa, x) \in \mathcal{W}_{1,i}(-k) = A(k).$$

$A$  ist daher invariant unter System (6.5).

(ii)  $\mathcal{W}_{1,i}$  ist nach Satz 5.2.1 (a) der Graph der stetigen Abbildung  $s_0$ , also ist  $\mathcal{W}_{1,i}$  und damit  $A$  eine abgeschlossene nichtautonome Menge.

(iii) Zum Nachweis, dass  $A$  kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $\overline{U_1(0)} \subset \mathbb{R}^N$  ist, sei  $C \subset \mathbb{R}^N$  eine beliebige kompakte Menge. Da  $C$  beschränkt ist, gibt es ein  $M > 0$  mit  $\|x\| < M$  für alle  $x \in C$ . Aufgrund (6.3) existiert eine Zahl  $\delta \in (2KL(n-1), \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}]$  mit  $\gamma := \alpha_i + \delta < 1$ . Daher gibt es ein  $\mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C) > 0$ , so dass für alle  $k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C)$

$$\left( \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} + K + \frac{K^3 L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) M \gamma^k < 1 \quad (6.7)$$

gilt. Seien  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $(\xi, \eta) = (\xi, s_0(-k_0, \xi)) \in C \cap A(k_0)$  beliebig gewählt. Dann gilt für alle  $k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C)$

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\lambda}(k_0 - k; k_0, \xi, s_0(-k_0, \xi))\| \\ &= \|\lambda_1(k - k_0; -k_0, \xi, s_0(-k_0, \xi))\| + \|\lambda_2(k - k_0; -k_0, \xi, s_0(-k_0, \xi))\| \\ &\stackrel{5.2.1 (a), (ii)}{\leq} \left( K + \frac{K^3 L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} + \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) \underbrace{\|\xi\|}_{< M} \gamma^k \\ &\stackrel{(6.7)}{<} 1. \end{aligned}$$

Daraus folgt für alle  $k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C)$

$$\begin{aligned} \{(\xi, \eta)\} &\stackrel{(1.8)}{=} \tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, \{\tilde{\lambda}(k_0 - k; k_0, \xi, s_0(-k_0, \xi))\}) \\ &\subset \tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, \overline{U_1(0)}). \end{aligned}$$

Da  $(\xi, \eta) \in C \cap \mathcal{W}_{1,i}(-k_0)$  beliebig gewählt war, gilt

$$C \cap A(k_0) \subset \tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, \overline{U_1(0)}) \quad \text{für alle } k > \mathcal{T}(\overline{U_1(0)}, C).$$

$A$  ist daher kompakt erzeugbar mit Erzeuger  $\overline{U_1(0)}$ .

(iv) Abschließend weisen wir nach, dass  $\mathbb{Z} \times C \in \mathcal{D}_P(A)$  für jede kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^N$  erfüllt ist. Seien hierzu  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und eine kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^N$  beliebig gewählt. Die Voraussetzung (6.3) impliziert die Existenz einer Zahl  $\delta \in (2KL(n-1), \frac{\beta_i - \alpha_i}{2}]$  mit  $\gamma := \beta_i - \delta > 1$ . Zunächst gilt für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\|s_0(k, \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta)) - \eta\| \\ &\leq \|s_0(k, \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta))\| + \|\eta\| \\ 5.2.1 \text{ (a), (i)} &\leq \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \|\mathcal{F}_2(k, \xi, \eta)\| + \|\eta\| \\ 5.2.4 &\leq \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \frac{1}{1 - \mathcal{C}(L(n-1))^2} (\|\xi\| + \|\eta\|) + \|\eta\| \\ &\leq M_1 \end{aligned}$$

mit einem  $M_1 > 0$ , da  $C$  beschränkt ist. Weiterhin ist für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \in \mathbb{Z}$  die Beziehung

$$r(k, s_0(k, \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta)), k, \xi, \eta) = \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta)$$

erfüllt, denn wegen Satz 5.2.4 gilt für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \in \mathbb{Z}$

$$(k, \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta), s_0(k, \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta))) \in R_{k, \xi, \eta} = F_V(k, \mathcal{F}_2(k, \xi, \eta)).$$

Hieraus ergibt sich für alle  $(\xi, \eta) \in C$  und  $k \leq k_0$

$$\begin{aligned} &\|\tilde{\lambda}(k_0; k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta), s_0(-k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta))) - \tilde{\lambda}(k_0; k, \xi, \eta)\| \\ = &\|\lambda_1(-k_0; -k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta), s_0(-k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta))) - \lambda_1(-k_0; -k, \xi, \eta)\| + \\ &\|\lambda_2(-k_0; -k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta), s_0(-k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta))) - \lambda_2(-k_0; -k, \xi, \eta)\| \\ 5.2.2 \text{ (b), (ii)} &\leq \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \|s_0(-k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta)) - \eta\| \gamma^{k-k_0} + \\ &\left( K + \frac{K^3 L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) \|s_0(-k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta)) - \eta\| \gamma^{k-k_0} \\ &\leq \left( K + \frac{K^3 L^2(n-1)^2}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} + \frac{K^2 L(n-1)(\delta - KL(n-1))}{\delta(\delta - 2KL(n-1))} \right) M_1 \gamma^{k-k_0} \\ =: &M_2 \gamma^{k-k_0} \end{aligned}$$

mit  $M_2 > 0$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Dann gibt es ein  $\tilde{k} > 0$  mit  $M_2\gamma^{-\tilde{k}} < \varepsilon$ . Daher gilt für jedes  $(\xi, \eta) \in C$  und jedes  $k \geq \tilde{k}$

$$\begin{aligned} & d(\tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, \xi, \eta), A(k_0)) \\ & \leq \|\tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta), s_0(-k, \mathcal{F}_2(-k, \xi, \eta))) - \tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, \xi, \eta)\| \\ & \leq M_2\gamma^{-k} < \varepsilon, \end{aligned}$$

woraus durch Maximumsbildung über die kompakte Menge  $C$  sofort

$$d(\tilde{\lambda}(k_0; k_0 - k, C) | A(k_0)) < \varepsilon \quad \text{für alle } k \geq \tilde{k}$$

folgt.  $A$  ist daher der globale Pullback-Attraktor von (6.5).

Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.  $\square$

Für die Differenzialgleichung (6.2) erhalten wir das folgende analoge Resultat:

**6.1.2 Satz (Approximation stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen):** Für das System (6.2) setzen wir voraus, dass es ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  mit

$$0 \in (\alpha_i + 2KL(n-1), \beta_i - 2KL(n-1))$$

gibt und dass die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung

$$0 \leq L < \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K^2(n-1)} (2 + K - \sqrt{4 + K^2})$$

erfüllt. Dann ist die instabile Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  der globale Pullback-Attraktor von (6.2). Des Weiteren besteht folgender Zusammenhang zwischen dem Pullback-Attraktor  $A$  des zeitinvertierten Systems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -f(-t, x) \\ &= -B(-t)x - F(-t, x) \end{aligned} \tag{6.8}$$

und der stabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,i}$  von System (6.2):

$$A(t) = \mathcal{W}_{1,i}(-t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** analog Satz 6.1.1. Der zweite Schritt des Beweises kann vereinfacht werden, indem (6.8) als Standardsystem nachgewiesen und die erste Aussage des Satzes angewendet wird.  $\square$

### 6.1.3 Bemerkungen:

- (i) Mit der in Kapitel 3 dargelegten Theorie zur Approximation von Pullback-Attraktoren ist unter den in den Sätzen 6.1.1 und 6.1.2 gemachten Voraussetzungen die numerische Berechnung der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten der Differenzialgleichung (6.1) und der Differenzialgleichung (6.2) möglich. Die Approximation erfolgt in einer Nullumgebung bei hinreichend großer Schrittweite des Verfahrens im Hausdorff-Abstand, da jede kompakte Nullumgebung Erzeuger der Pullback-Attraktoren ist (siehe Korollar 3.2.3 und 3.3.4).

- (ii) Die globalen Pullback-Attraktoren in den Sätzen 6.1.1 und 6.1.2 sind jeweils auch globale Forward-Attraktoren, da die Attraktion gleichmäßig ist (siehe Bemerkung 2.2.7 (iii)).

Das folgende Beispiel zeigt, dass es instabile Mannigfaltigkeiten gibt, die nicht globale Pullback-Attraktoren sind.

**6.1.4 Beispiel:** Das ebene autonome System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^2 \end{aligned}$$

besitzt das erste Integral  $F(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}x^3$ , d.h. für alle  $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$  und  $t \in D_{max}(\xi, \eta)$  gilt  $F(\varphi(t, \xi, \eta)) = F(\xi, \eta)$ . Dies folgt aus

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(\varphi(t, \xi, \eta)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(\varphi(t, \xi, \eta))\dot{\varphi}_1(t, \xi, \eta) + \frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t, \xi, \eta))\dot{\varphi}_2(t, \xi, \eta) \\ &= (\varphi_1(t, \xi, \eta)^2 - \varphi_1(t, \xi, \eta))\varphi_2(t, \xi, \eta) + \\ &\quad \varphi_2(t, \xi, \eta)(\varphi_1(t, \xi, \eta) - \varphi_1(t, \xi, \eta)^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die autonome globale instabile Mannigfaltigkeit

$$W^u := \{x \in \mathbb{R}^2 : \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x) = 0\}$$

der hyperbolischen Ruhelage  $x_0 := (0, 0)$  kein globaler Attraktor ist. Zunächst gilt für alle  $x \in W^u$

$$\begin{aligned} F(x) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} F(\varphi(t, x)) \\ &= F\left(\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi(t, x)\right) \\ &= F(0) = 0. \end{aligned}$$

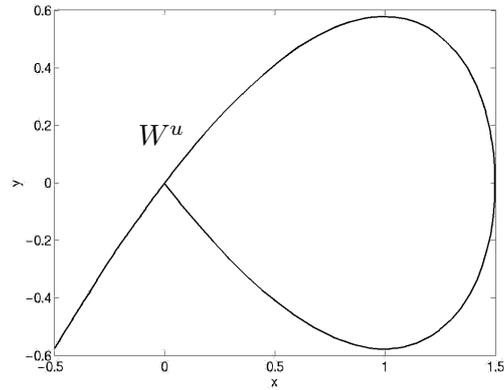


Abbildung 6.1: Homokliner Orbit als Teil der instabilen Mannigfaltigkeit

Für die zweite Ruhelage  $x_1 := (1, 0)$  gilt  $F(x_1) = -\frac{1}{6}$ . Da  $F$  stetig ist, folgt

$$d(\varphi(t, \{x_1\})|W^u) = d(x_1, W^u) > 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

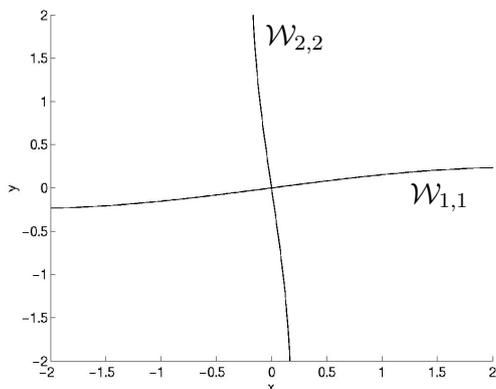
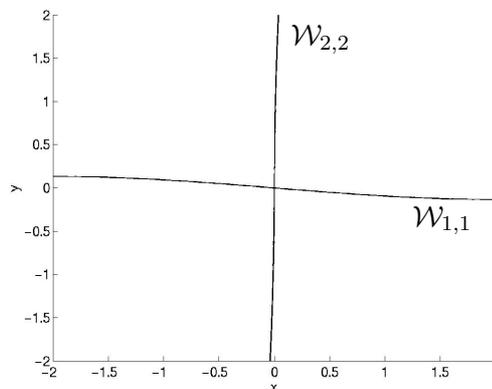
was  $\{x_1\} \notin \mathcal{D}(W^u)$  impliziert.

Wir betrachten nun ein Beispiel für die Berechnung einer stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines zweidimensionalen Standardsystems.

**6.1.5 Beispiel:** Die nichtautonome Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \frac{38}{100} \cos(t)(\sin(x) + \sin(y)) \\ \dot{y} &= y + \frac{38}{100} \sin(t) \sin(x) \end{aligned} \tag{6.9}$$

erfüllt aufgrund des Mittelwertsatzes die Standardvoraussetzungen aus Abschnitt 5.5 mit den Konstanten  $n = 2, K = 1, \alpha_1 = -1, \beta_1 = 1$  und der Lipschitz-Konstante  $L = \frac{38}{100}$ . Wegen  $L < 0.382 \approx \frac{\beta_1 - \alpha_1}{4K^2(n-1)}(2 + K - \sqrt{4 + K^2})$  ist Satz 6.1.2 anwendbar.

Abbildung 6.2: Faser  $t = -2$ Abbildung 6.3: Faser  $t = 2$ 

Die Abbildungen 6.2 und 6.3 veranschaulichen die mit dem Unterteilungsalgorithmus approximierten  $-2$ - und  $2$ -Fasern der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,1}$  und  $\mathcal{W}_{2,2}$  im 2-Quader  $Q((0, 0), (2, 2))$  mit der Zerlegung  $\mathcal{B}(Q, 20)$ . In der Abbildung 6.4 sind darüber hinaus diese nichtautonomen Mannigfaltigkeiten im erweiterten Phasenraum innerhalb des 3-Quaders  $Q((0, 0, 0), (2, 2, \pi))$  visualisiert. Wie man diesem Bild entnehmen kann, sind die  $-\pi$ - und  $\pi$ -Fasern der Mannigfaltigkeiten identisch. Dies deckt sich mit dem in AULBACH, WANNER [9, Corollary 4.4]) bewiesenen Resultat, nachdem sich die Periodizität von (6.9) auf die Mannigfaltigkeiten überträgt.

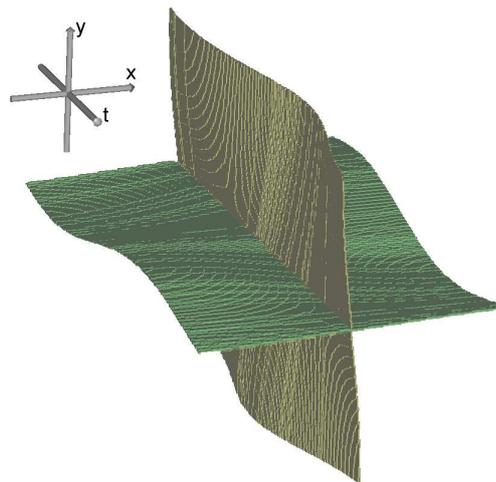


Abbildung 6.4: Mannigfaltigkeiten im erweiterten Phasenraum

## 6.2 Approximation sämtlicher Mannigfaltigkeiten durch Spektraltransformationen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es unter bestimmten Voraussetzungen möglich ist, beliebige Mannigfaltigkeiten des Systems (6.1) und (6.2) zu berechnen. Hierbei führen wir Spektraltransformationen durch und wenden die Resultate des vorigen Abschnitts an.

**6.2.1 Satz (Hauptsatz zur Approximation nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzgleichungen):** Für das System (6.1) setzen wir voraus, dass es ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  und eine reelle Konstante  $c > 0$  mit

$$1 \in (c(\alpha_i + 2KL(n-1)), c(\beta_i - 2KL(n-1)))$$

gibt und dass die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung

$$0 \leq L < \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K^2(n-1)} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}) \quad (6.10)$$

erfüllt. Betrachten wir das durch die Spektraltransformation  $y = c^{k-k_0}x$  ( $k_0 \in \mathbb{Z}$ ) entstandene System

$$\begin{aligned} y' &= c^{k+1-k_0} f(k, c^{k_0-k}y) \\ &= cB(k)y + c^{k+1-k_0} F(k, c^{k_0-k}y), \end{aligned} \quad (6.11)$$

so gilt folgende Beziehung zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_1$  von System (6.11) und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  von System (6.1):

$$A_1(k) = c^{k-k_0} \mathcal{W}_{i+1,n}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Ist darüber hinaus das System (6.1) invertierbar, so gilt folgender Zusammenhang zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_2$  des zu (6.11) zeitinvertierten Systems

$$y' = c^{-k-k_0-1} f^{-1}(-k-1, c^{k_0+k}y) \quad (6.12)$$

und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,i}$  von System (6.1):

$$A_2(k) = c^{-k-k_0} \mathcal{W}_{1,i}(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis:** Das durch die Transformation  $y = c^{k-k_0}x$  entstandene System (6.11) erfüllt die Voraussetzungen aus Abschnitt 5.3 mit den Konstanten  $K, c\alpha_j, c\beta_j$  ( $j \in \{1, \dots, n-1\}$ ) und der Lipschitz-Konstante  $cL$ , denn es gilt:

- Die Übergangsmatrizen  $\tilde{\Phi}_j$  der linearen Systeme  $y'_j = cB_j(k)y_j$  ( $j \in \{1, \dots, n\}$ ) erfüllen

$$\begin{aligned} \|\tilde{\Phi}_j(l, m)\| &= \|c^{l-m} \Phi_j(l, m)\| \leq K(c\alpha_j)^{l-m} \quad \text{für alle } l \geq m, \\ \|\tilde{\Phi}_{j+1}(l, m)\| &= \|c^{l-m} \Phi_{j+1}(l, m)\| \leq K(c\beta_j)^{l-m} \quad \text{für alle } l \leq m \end{aligned}$$

für alle  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

- Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  gilt  $F(k, c^{k_0-k}0, \dots, c^{k_0-k}0) = 0 \in \mathbb{R}^N$ . Des Weiteren ist für alle  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $l \in \{1, \dots, n\}$  und  $y = (y_1, \dots, y_n)$ ,  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) \in \mathbb{R}^N$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} &\|c^{k+1-k_0} F_l(k, c^{k_0-k}y_1, \dots, c^{k_0-k}y_n) - c^{k+1-k_0} F_l(k, c^{k_0-k}\bar{y}_1, \dots, c^{k_0-k}\bar{y}_n)\| \\ &\leq c^{k+1-k_0} L \sum_{j=1}^n \|c^{k_0-k}y_j - c^{k_0-k}\bar{y}_j\| = cL \sum_{j=1}^n \|y_j - \bar{y}_j\| = cL\|y - \bar{y}\| \end{aligned}$$

erfüllt, wobei die Lipschitz-Konstante  $cL$  der Bedingung

$$0 \leq cL < \min \left\{ \frac{c\beta_i - c\alpha_i}{4K(n-1)} : i \in \{1, \dots, n-1\} \right\}$$

genügt.

Wegen  $1 \in (c\alpha_i + 2KcL(n-1), c\beta_i - 2KcL(n-1))$  ist Satz 6.1.1 anwendbar. Die instabile Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{W}}_{i+1,n}$  von System (6.11) ist daher identisch mit dem globalen Pullback-Attraktor von (6.11). Für die erste Aussage des Satzes muss also nur noch nachgewiesen werden, dass

$$\tilde{\mathcal{W}}_{i+1,n}(k) = c^{k-k_0} \mathcal{W}_{i+1,n}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \quad (6.13)$$

gilt. Zunächst stellen wir fest, dass bei gegebener Lösung  $\mu : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  ( $I$  ein  $\mathbb{Z}$ -Intervall) von (6.1) durch

$$\tilde{\mu}(k) := c^{k-k_0} \mu(k) \quad \text{für alle } k \in I$$

eine Lösung von (6.11) gegeben ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} c^{k+1-k_0} f(k, c^{k_0-k} \tilde{\mu}(k)) &= c^{k+1-k_0} f(k, \mu(k)) \\ &= c^{k+1-k_0} \mu(k+1) = \tilde{\mu}(k+1) \end{aligned}$$

für alle  $k$  mit  $\{k, k+1\} \subset I$ . Ebenso liefert die Definition  $\mu(k) := c^{k_0-k} \tilde{\mu}(k)$  für alle  $k \in I$  eine Lösung von (6.1), sofern  $\tilde{\mu} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$  eine Lösung von (6.11) ist. Für ein beliebig gewähltes  $k \in \mathbb{Z}$  gilt daher unter Anwendung von Satz 5.2.1

$$\begin{aligned} x \in \tilde{\mathcal{W}}_{i+1,n}(k) &\Leftrightarrow \text{Es existiert eine } 1^- \text{-quasibeschränkte Lösung } \tilde{\mu} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \\ &\quad \text{von (6.11) mit } \tilde{\mu}(k) = x \\ &\Leftrightarrow \text{Es existiert eine Lösung } \tilde{\mu} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ von (6.11) mit } \tilde{\mu}(k) = x, \\ &\quad \text{und } c^{k_0-\cdot} \tilde{\mu}(\cdot) \text{ ist } \left(\frac{1}{c}\right)^- \text{-quasibeschränkt} \\ &\Leftrightarrow \text{Es existiert eine } \left(\frac{1}{c}\right)^- \text{-quasibeschränkte Lösung } \mu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \\ &\quad \text{von (6.1) mit } \mu(k) = c^{k_0-k} x \\ &\Leftrightarrow c^{k_0-k} x \in \mathcal{W}_{i+1,n}(k) \\ &\Leftrightarrow x \in c^{k-k_0} \mathcal{W}_{i+1,n}(k), \end{aligned}$$

womit die Aussage (6.13) bewiesen ist. Ebenso zeigt man, dass für die stabile Mannigfaltigkeit  $\tilde{\mathcal{W}}_{1,i}$  von System (6.11) die Beziehung

$$\tilde{\mathcal{W}}_{1,i}(k) = c^{k-k_0} \mathcal{W}_{1,i}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist. Im Fall der Invertierbarkeit von System (6.1) gilt nach Satz 6.1.1 für den Pullback-Attraktor  $A_2$  von System (6.12)

$$A_2(k) = \tilde{\mathcal{W}}_{1,i}(-k) = c^{-k-k_0} \mathcal{W}_{1,i}(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z},$$

falls (6.12) das gemäß Satz 6.1.1 zu (6.11) zeitinvertierte System ist. Um dies nachzuweisen, setzen wir

$$G(k, y) := c^{k+1-k_0} f(k, c^{k_0-k} y) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ und } y \in \mathbb{R}^N.$$

Die Funktion  $G$  ist die rechte Seite von (6.11). Es gilt

$$G^{-1}(k, y) = c^{k-k_0} f^{-1}(k, c^{k_0-k-1} y) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \text{ und } y \in \mathbb{R}^N.$$

Das zeitinvertierte System hat daher die Gestalt

$$y' = G^{-1}(-k-1, y) = c^{-k-k_0-1} f^{-1}(-k-1, c^{k_0+k} y).$$

Damit sind alle Behauptungen des Satzes bewiesen.  $\square$

Für die Differenzialgleichung (6.2) erhalten wir das folgende analoge Resultat:

**6.2.2 Satz (Hauptsatz zur Approximation nichtautonomer Mannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen):** Für das System (6.2) setzen wir voraus, dass es ein  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  und eine reelle Konstante  $c$  mit

$$0 \in (c + \alpha_i + 2KL(n-1), c + \beta_i - 2KL(n-1))$$

gibt und dass die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung

$$0 \leq L < \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K^2(n-1)} (2 + K - \sqrt{4 + K^2})$$

erfüllt. Betrachten wir das durch die Spektraltransformation  $y = e^{c(t-t_0)} x$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ ) entstandene System

$$\begin{aligned} \dot{y} &= cy + e^{c(t-t_0)} f(t, e^{-c(t-t_0)} y) \\ &= (B(t) + c \mathbf{1})y + e^{c(t-t_0)} F(t, e^{-c(t-t_0)} y), \end{aligned} \quad (6.14)$$

so gilt folgende Beziehung zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_1$  von System (6.14) und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  von System (6.2):

$$A_1(t) = e^{c(t-t_0)} \mathcal{W}_{i+1,n}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Des Weiteren besteht folgender Zusammenhang zwischen dem Pullback-Attraktor  $A_2$  des zu (6.14) zeitinvertierten Systems

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -cy - e^{-c(t+t_0)} f(-t, e^{c(t+t_0)} y) \\ &= -((B(-t) + c \mathbf{1})y + e^{-c(t+t_0)} F(-t, e^{c(t+t_0)} y)) \end{aligned}$$

und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,i}$  von System (6.2):

$$A_2(t) = e^{-c(t+t_0)} \mathcal{W}_{1,i}(-t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** analog Satz 6.2.1.  $\square$

**6.2.3 Bemerkungen:**

(i) Genügt die Lipschitz-Konstante  $L$  der Beziehung

$$0 \leq L < \min \left\{ \frac{\beta_i - \alpha_i}{4K^2(n-1)} (2 + K - \sqrt{4 + K^2}) : i \in \{1, \dots, n-1\} \right\},$$

und ist das betrachtete System invertierbar, so sind sämtliche Mannigfaltigkeiten mit der in Kapitel 3 dargelegten Theorie zur Approximation von Pullback-Attraktoren berechenbar. Die Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{1,i}$  und  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  ( $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ) lassen sich mittels der Sätze 6.2.1 bzw. 6.2.2 approximieren, denn zu jedem  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  gibt es eine Zahl  $c(i)$  mit

$$1 \in (c(i)(\alpha_i + 2KL(n-1)), c(i)(\beta_i - 2KL(n-1)))$$

bzw.

$$0 \in (c(i) + \alpha_i + 2KL(n-1), c(i) + \beta_i - 2KL(n-1)).$$

Die Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{i,j}$  ( $1 < i \leq j < n$ ) ergeben sich, wie in den Sätzen 5.3.1 bzw. 5.5.1 bewiesen wurde, als Schnitt von  $\mathcal{W}_{i,n}$  mit  $\mathcal{W}_{1,j}$ .

- (ii) Die Sätze 6.2.1 und 6.2.2 sind Verallgemeinerungen der Resultate aus Abschnitt 6.1 (man betrachte  $c = 1$  bzw.  $c = 0$ ).
- (iii) Die Transformationen in den Sätzen 6.2.1 und 6.2.2 heißen Spektraltransformationen, da sie bei linearen Systemen eine von  $c$  abhängige Veränderung der Spektralintervalle bewirken (zur Spektraltheorie für lineare Differenzgleichungen siehe AULBACH, SIEGMUND [7, 8], für lineare Differenzialgleichungen siehe SIEGMUND [33, 34]).

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Spektraltransformation  $y = c^{k-k_0}x$  aus Satz 6.2.1 nur zur Berechnung der  $k_0$ -Faser von  $\mathcal{W}_{i+1,n}$  und  $\mathcal{W}_{1,i}$  angewendet werden darf, da eine Skalierung der Boxen nach Approximation des Pullback-Attraktors zu falschen Ergebnissen führt. Entsprechendes gilt auch für Satz 6.2.2.

**6.2.4 Beispiel:** Für die autonome Differenzgleichung

$$\begin{aligned} x' &= 2x \\ y' &= 5y \end{aligned} \tag{6.15}$$

wollen wir mit dem Fortsetzungsalgorithmus die 0-Faser

$$\mathcal{W}_{2,2}(0) = \{0\} \times \mathbb{R}$$

der stark instabilen Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{2,2}$  berechnen. Hierzu wenden wir eine Spektraltransformation mit einer beliebigen Konstante  $k_0 \in \mathbb{Z}$  und  $c := \frac{1}{4}$  an. Das transformierte System lautet

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2}x \\ y' &= \frac{5}{4}y. \end{aligned} \tag{6.16}$$

Wir setzen  $Q := Q((0, 0), (1, 1))$ ,  $\mathcal{B} := \mathcal{B}(Q, 10)$  und  $T := 1$ . Eine Approximation der 0-Faser des Pullback-Attraktors von (6.16) ist durch

$$\hat{\varphi}(k, -k)Q = \left[-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right] \times [-1, 1] \quad \text{für alle } k \geq 4 \quad (6.17)$$

gegeben. Ist  $k_0 \neq 0$ , so müsste diese Menge nach Satz 6.2.2 noch mit  $c^{k_0}$  skaliert werden, um  $\mathcal{W}_{2,2}$  zu erhalten. Im Fall von  $k_0 \leq -4$  ergäbe sich  $Q$ . Ist  $k_0 \geq 4$ , so ist das Ergebnis nach der Rücktransformation lediglich  $[-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}] \times [-\frac{1}{16}, \frac{1}{16}]$  (siehe Abbildung 6.5).

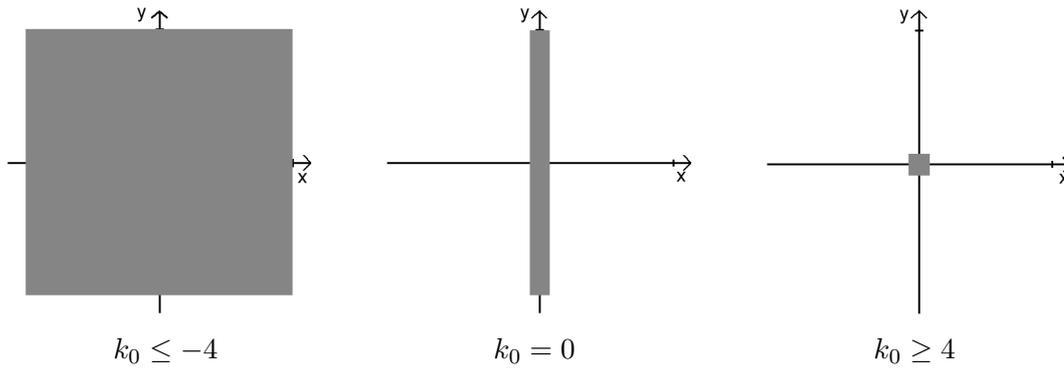


Abbildung 6.5: Ergebnisse nach der Rücktransformation

Diese völlig unterschiedlichen Resultate haben ihren Grund darin, dass eine Rücktransformation die Spektraltransformation in einer bestimmten Weise rückgängig macht. Wird die Spektraltransformation zur Berechnung der  $k_0$ -Faser der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{2,2}$  angewendet (siehe Abbildung 6.5, Fall  $k_0 = 0$ ), so ist dies mathematisch einwandfrei, denn in diesem Fall stimmt der Pullback-Attraktor mit  $\mathcal{W}_{2,2}$  in der  $k_0$ -Faser überein.

### 6.3 Anwendbarkeit der Theorie bei Nicht-Standardsystemen

Die meisten Systeme aus den Anwendungen erfüllen die Standardvoraussetzungen aus den Abschnitten 5.3 und 5.5 nicht. Dies liegt entweder daran, dass der Linearteil nicht entkoppelt ist oder dass die Nichtlinearität des Systems nicht der globalen Lipschitz-Bedingung genügt. In den Abschnitten 6.3.1 und 6.3.2 erweitern wir die Theorie zur Approximation nichtautonomer Mannigfaltigkeiten auf Systeme von Differenzen- und Differenzialgleichungen mit gekoppeltem Linearteil. In Abschnitt 6.3.3 erörtern wir Abschneidetechniken, um lokale Mannigfaltigkeiten zu erhalten und diese zu approximieren.

#### 6.3.1 Systeme von Differenzgleichungen mit gekoppeltem Linearteil

In diesem Abschnitt betrachten wir die Differenzgleichung

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = B(k) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(k, x_1, x_2) \\ F_2(k, x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (6.18)$$

Hierbei sind  $B : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $F_1 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1}$  und  $F_2 : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  Abbildungen ( $N = N_1 + N_2$ ). Weiterhin setzen wir voraus, dass  $F_1(k, 0, 0) = 0$  und  $F_2(k, 0, 0) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und dass die Matrix  $B(k)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  invertierbar ist. Ferner gelte:

- (1) Voraussetzungen an den Linearteil: Für den Linearteil von (6.18) gibt es einen invarianten Projektor  $P : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  mit  $\text{rk } P = N_1$ , so dass die Übergangsmatrix  $\Phi$  der linearen Differenzgleichung  $x' = B(k)x$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(l, m)P(m)\| &\leq K\alpha^{l-m} \quad \text{für alle } l \geq m, \\ \|\Phi(l, m)[\mathbf{1} - P(m)]\| &\leq K\beta^{l-m} \quad \text{für alle } l \leq m \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $K \geq 1$  und  $\alpha < \beta$  erfüllt.

- (2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$  gilt

$$\begin{aligned} \|F_1(k, x_1, x_2) - F_1(k, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\| &\leq L\|x_1 - \bar{x}_1\| + L\|x_2 - \bar{x}_2\| = L\|x - \bar{x}\|, \\ \|F_2(k, x_1, x_2) - F_2(k, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\| &\leq L\|x_1 - \bar{x}_1\| + L\|x_2 - \bar{x}_2\| = L\|x - \bar{x}\|, \end{aligned}$$

wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung  $0 \leq L < \frac{\beta - \alpha}{16K^3}$  erfüllt.

Für das System (6.18) schreiben wir auch kurz

$$x' = B(k)x + F(k, x) = f(k, x).$$

### 6.3.1 Bemerkungen:

- (i) Die Voraussetzungen an den Linearteil sind äquivalent dazu, dass das Dichotomiespektrum des linearen Systems  $x' = B(k)x$  unzusammenhängend ist bzw. dass  $x' = B(k)x$  eine nichthyperbolische exponentielle Dichotomie besitzt (siehe AULBACH, SIEGMUND [7, 8]).
- (ii) Die Invertierbarkeitsvoraussetzung an die Matrizen  $B(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) vereinfacht die folgenden Überlegungen. Prinzipiell sind die nachfolgenden Resultate auch ohne diese Forderung zu erzielen (siehe PÖTZSCHE [28, Kapitel 1.5]).

Zur Entkopplung des Linearteils der Differenzgleichung (6.18) nutzen wir folgendes Lemma aus SIEGMUND [37] (siehe auch KALKBRENNER [23, Satz 2.3.2.4, S. 140-141]).

**6.3.2 Lemma (Entkopplung des Linearteils):** Das lineare System  $x' = B(k)x$  ist vermöge einer Funktion  $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbarer Matrizen kinematisch ähnlich zum linearen System

$$x' = S(k+1)B(k)S^{-1}(k)x = \begin{pmatrix} B_1(k) & 0 \\ 0 & B_2(k) \end{pmatrix} x.$$

Hierbei sind  $B_1 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$  und  $B_2 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$  Funktionen invertierbarer Matrizen. Es gilt

$$\|S(k)\| \leq \sqrt{2}K \text{ und } \|S^{-1}(k)\| \leq \sqrt{2} \text{ f\"ur alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Des Weiteren erf\"ullen die \"Ubergangsmatrizen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  der linearen Differenzgleichungen  $x'_1 = B_1(k)x_1$  und  $x'_2 = B_2(k)x_2$  die Absch\"atzungen

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(l, m)\| &\leq 2K^2\alpha^{l-m} \text{ f\"ur alle } l \geq m, \\ \|\Psi_2(l, m)\| &\leq 2K^2\beta^{l-m} \text{ f\"ur alle } l \leq m. \end{aligned}$$

**Beweis:** Bis auf die Absch\"atzungen f\"ur die \"Ubergangsmatrizen des entkoppelten Systems sind alle Behauptungen des Satzes und die Identit\"at

$$S(k)P(k)S^{-1}(k) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{N_1 \times N_1} & 0_{N_1 \times N_2} \\ 0_{N_2 \times N_1} & 0_{N_2 \times N_2} \end{pmatrix} \text{ f\"ur alle } k \in \mathbb{Z}$$

in SIEGMUND [37, Lemma 3.1] nachgewiesen. F\"ur alle  $l \geq m$  gilt nun

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(l, m)\| &= \left\| \begin{pmatrix} \Psi_1(l, m) & 0 \\ 0 & \Psi_2(l, m) \end{pmatrix} S(m)P(m)S^{-1}(m) \right\| \\ &= \left\| S(l)S^{-1}(l) \begin{pmatrix} \Psi_1(l, m) & 0 \\ 0 & \Psi_2(l, m) \end{pmatrix} S(m)P(m)S^{-1}(m) \right\| \\ &= \|S(l)\Phi(l, m)P(m)S^{-1}(m)\| \\ &\leq \|S(l)\| \|\Phi(l, m)P(m)\| \|S^{-1}(m)\| \leq 2K^2\alpha^{l-m}. \end{aligned}$$

Analog ergibt sich  $\|\Psi_2(l, m)\| \leq 2K^2\beta^{l-m}$  f\"ur alle  $l \leq m$ .  $\square$

Zur Entkoppelung des nichtlinearen Systems (6.18) wenden wir die kinematische \"Ahnlichkeitstransformation  $y = S(k)x$  an (siehe auch KALKBRENNER [23, Satz 2.3.3.2, S. 147-148]). Wir erhalten

$$\begin{aligned} y'_1 &= B_1(k)y_1 + S^{(1)}(k+1)F_1(k, S^{-1}(k)y) \\ y'_2 &= B_2(k)y_2 + S^{(2)}(k+1)F_2(k, S^{-1}(k)y), \end{aligned} \tag{6.19}$$

wobei mit  $S^{(1)}(k)$  die ersten  $N_1$  Zeilen und mit  $S^{(2)}(k)$  die letzten  $N_2$  Zeilen der Matrix  $S(k)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) bezeichnet sind. Dieses System erf\"ullt die Voraussetzungen aus Abschnitt 5.3 mit  $n = 2$ , den Konstanten  $2K^2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und der Lipschitz-Konstante  $2KL$ , denn Lemma 6.3.2 impliziert die Voraussetzungen f\"ur den Linearteil und f\"ur alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^N$  gilt

$$\begin{aligned} \|S^{(1)}(k+1)F_1(k, S^{-1}(k)x) - S^{(1)}(k+1)F_1(k, S^{-1}(k)\bar{x})\| &\leq \\ \|S(k+1)\| L \|S^{-1}(k)(x - \bar{x})\| &\leq 2KL\|x - \bar{x}\|, \\ \|S^{(2)}(k+1)F_2(k, S^{-1}(k)x) - S^{(2)}(k+1)F_2(k, S^{-1}(k)\bar{x})\| &\leq \\ \|S(k+1)\| L \|S^{-1}(k)(x - \bar{x})\| &\leq 2KL\|x - \bar{x}\|. \end{aligned}$$

Die Bedingung an die Lipschitz-Konstante  $2KL < \frac{\beta-\alpha}{8K^2}$  folgt aus  $L < \frac{\beta-\alpha}{16K^3}$ . Bezeichnet  $\lambda$  die allgemeine Lösung von (6.18), so ist die allgemeine Vorwärtslösung von (6.19) durch

$$\tilde{\lambda}(k; \kappa, x) = S(k)\lambda(k; \kappa, S^{-1}(\kappa)x) \quad \text{für alle } k, \kappa \in \mathbb{Z} (k \geq \kappa) \text{ und } x \in \mathbb{R}^N$$

gegeben, denn es gilt für alle  $k, \kappa \in \mathbb{Z} (k \geq \kappa)$  und  $x \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} S(k+1)f(k, S^{-1}(k)\tilde{\lambda}(k; \kappa, x)) &= S(k+1)f(k, \lambda(k; \kappa, S^{-1}(\kappa)x)) \\ &= S(k+1)\lambda(k+1; \kappa, S^{-1}(\kappa)x) \\ &= \tilde{\lambda}(k+1; \kappa, x) \end{aligned}$$

und  $\tilde{\lambda}(\kappa; \kappa, x) = S(\kappa)\lambda(\kappa; \kappa, S^{-1}(\kappa)x) = x$ .

Nach Satz 5.3.1 existieren die nichtautonomen Mannigfaltigkeiten  $\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}$  und  $\tilde{\mathcal{W}}_{2,2}$  für das System (6.19), die sich nach Wahl von  $\delta \in (8K^3L, \frac{\beta-\alpha}{2}]$  für jedes  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  folgendermaßen charakterisieren lassen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}_{1,1} &= \{(\kappa, \xi) : \tilde{\lambda}(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\}, \\ \tilde{\mathcal{W}}_{2,2} &= \{(\kappa, \xi) : \text{Es existiert eine Lösung } \tilde{\lambda}^*(\cdot; \kappa, \xi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ von (6.19)} \\ &\quad \text{mit } \tilde{\lambda}^*(\kappa; \kappa, \xi) = \xi, \text{ und } \tilde{\lambda}^*(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^-\text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt, dass auch für das System (6.18) nichtautonome Mannigfaltigkeiten mit den entsprechenden dynamischen Charakterisierungen existieren.

**6.3.3 Satz (Existenz nichtautonomer Mannigfaltigkeiten für das System (6.18)):** Die nichtautonomen Mengen  $\mathcal{W}_{1,1}$  und  $\mathcal{W}_{2,2}$ , die durch

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{1,1}(k) &:= S^{-1}(k)\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}(k), \\ \mathcal{W}_{2,2}(k) &:= S^{-1}(k)\tilde{\mathcal{W}}_{2,2}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

definiert sind, sind invariante Faserbündel von System (6.18) mit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{1,1} &= \{(\kappa, \xi) : \lambda(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\}, \\ \mathcal{W}_{2,2} &= \{(\kappa, \xi) : \text{Es existiert eine Lösung } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ von (6.18)} \\ &\quad \text{mit } \lambda^*(\kappa; \kappa, \xi) = \xi, \text{ und } \lambda^*(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^-\text{-quasibeschränkt}\} \end{aligned}$$

für jede Zahl  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$ .

**Beweis:** Zum Nachweis der Invarianz von  $\mathcal{W}_{1,1}$  sei  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathcal{W}_{1,1}(\kappa)$  beliebig vorgegeben. Für alle  $k \geq \kappa$  (oder  $k \in \mathbb{Z}$  bei Invertierbarkeit von (6.18)) gilt nun

$$\lambda(k; \kappa, x) = S^{-1}(k)\tilde{\lambda}(k; \kappa, \underbrace{S(\kappa)x}_{\in \tilde{\mathcal{W}}_{1,1}(\kappa)}) \in S^{-1}(k)\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}(k) = \mathcal{W}_{1,1}(k),$$

da  $\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}$  unter (6.19) invariant ist. Weiterhin gilt wegen  $|S| < \infty$  für alle  $(\kappa, \xi) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} \lambda(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt} &\Leftrightarrow S(\cdot)\lambda(\cdot; \kappa, \xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\lambda}(\cdot; \kappa, S(\kappa)\xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt} \\ &\Leftrightarrow S(\kappa)\xi \in \tilde{\mathcal{W}}_{1,1}(\kappa) \\ &\Leftrightarrow \xi \in \mathcal{W}_{1,1}(\kappa). \end{aligned}$$

Die Aussagen für  $\mathcal{W}_{2,2}$  lassen sich analog nachweisen.  $\square$

Unser Ziel ist nun die Berechnung der Mannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{1,1}$  und  $\mathcal{W}_{2,2}$ . Aus dem vorigen Abschnitt wissen wir, dass die Mengen  $\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}$  und  $\tilde{\mathcal{W}}_{2,2}$  mit den globalen Pullback-Attraktoren transformierter Systeme verwandt sind. Wir untersuchen daher das Verhalten von Pullback-Attraktoren unter Ähnlichkeitstransformationen.

**6.3.4 Lemma (Pullback-Attraktoren unter kinematischen Ähnlichkeitstransformationen):** Gegeben seien eine Funktion  $S : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbarer Matrizen mit  $|S| < \infty$  und eine Funktion  $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Wir betrachten die Differenzgleichung

$$x' = g(k, x) \quad (6.20)$$

und das kinematisch Ähnlichkeitstransformierte System

$$x' = S(k+1)g(k, S^{-1}(k)x). \quad (6.21)$$

Dann besitzt (6.20) genau dann einen globalen Pullback-Attraktor, wenn (6.21) einen globalen Pullback-Attraktor besitzt. Ist dies der Fall, so ist der Zusammenhang zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A$  von System (6.20) und dem globalen Pullback-Attraktor  $\tilde{A}$  von System (6.21) durch

$$\tilde{A}(k) = S(k)A(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

gegeben.

**Beweis:** Da (6.20) auch durch eine kinematische Ähnlichkeitstransformation (nämlich der inversen Transformation  $S^{-1}$ ) aus (6.21) hervorgeht, genügt es, eine Richtung zu beweisen. Offensichtlich ist die allgemeine Vorwärtslösung von (6.21) durch

$$\tilde{\mu}(k; \kappa, x) = S(k)\mu(k; \kappa, S^{-1}(\kappa)x) \quad \text{für alle } k, \kappa \in \mathbb{Z} (k \geq \kappa) \text{ und } x \in \mathbb{R}^N$$

gegeben, sofern  $\mu$  die allgemeine Lösung von (6.20) bezeichnet. Wir zeigen nun, dass durch

$$\tilde{A}(k) := S(k)A(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

der globale Pullback-Attraktor von (6.21) gegeben ist, falls  $A$  den globalen Pullback-Attraktor von (6.20) bezeichnet:

(i) Der Nachweis der Invarianz von  $\tilde{A}$  unter System (6.21) ist wie im Beweis von Satz 6.3.3 zu führen.

(ii)  $\tilde{A}$  ist abgeschlossen, da die lineare Abbildung  $S(k) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  ein Homöomorphismus ist.

(iii) Sei  $K$  ein Erzeuger von  $A$ . Da  $K$  beschränkt ist, gibt es ein  $M_1 > 0$  mit  $\|x\| < M_1$  für alle  $x \in K$ . Wir zeigen nun, dass die Menge  $\overline{U_{M_1|S|}(0)}$  ein Erzeuger von  $\tilde{A}$  ist. Sei dazu  $C \subset \mathbb{R}^N$  eine beliebige kompakte Menge. Wegen der Beschränktheit von  $C$  existiert ein  $M_2 > 0$  mit  $\|x\| < M_2$  für alle  $x \in C$ . Darüber hinaus gibt es wegen der kompakten Erzeugbarkeit von  $A$  unter System (6.20) eine Zahl  $\mathcal{T}(K, \overline{U_{M_2|S|}(0)}) > 0$ , so dass für alle

$\kappa \in \mathbb{Z}$  und alle  $k > \mathcal{T}(K, \overline{U_{M_2|S|}(0)})$

$$\mu(\kappa; \kappa - k, A(\kappa - k) \cap K) \supset A(\kappa) \cap \overline{U_{M_2|S|}(0)}$$

gilt. Hieraus folgt für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und alle  $k > \mathcal{T}(K, \overline{U_{M_2|S|}(0)})$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(\kappa; \kappa - k, \tilde{A}(\kappa - k) \cap \overline{U_{M_1|S|}(0)}) &\supset \tilde{\mu}(\kappa; \kappa - k, S(\kappa - k)(A(\kappa - k) \cap K)) \\ &= S(\kappa)\mu(\kappa; \kappa - k, A(\kappa - k) \cap K) \\ &\supset S(\kappa)(A(\kappa) \cap \overline{U_{M_2|S|}(0)}) \\ &\supset S(\kappa)A(\kappa) \cap C = \tilde{A}(\kappa) \cap C. \end{aligned}$$

$\tilde{A}$  ist daher unter System (6.21) kompakt erzeugbar.

(iv) Abschließend weisen wir nach, dass  $\mathbb{Z} \times C \in \mathcal{D}_P(\tilde{A})$  für jede kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^N$  gilt. Hierzu seien  $\kappa \in \mathbb{Z}$  und eine kompakte Menge  $C \subset \mathbb{R}^N$  beliebig gewählt. Da  $C$  beschränkt ist, gibt es ein  $M_3 > 0$  mit  $\|x\| < M_3$  für alle  $x \in C$ . Die Behauptung folgt aus

$$\begin{aligned} d(\tilde{\mu}(\kappa; \kappa - k, C)|\tilde{A}(\kappa)) &\leq |S| d(S^{-1}(\kappa)\tilde{\mu}(\kappa; \kappa - k, C)|S^{-1}\tilde{A}(\kappa)) \\ &= |S| d(\mu(\kappa; \kappa - k, S^{-1}(\kappa - k)C)|A(\kappa)) \\ &\leq |S| d(\mu(\kappa; \kappa - k, \overline{U_{M_3|S|}(0)})|A(\kappa)) \end{aligned}$$

durch den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$ , denn  $\mathbb{Z} \times \overline{U_{M_3|S|}(0)} \in \mathcal{D}_P(A)$ .  $\square$

Das Analogon zu Satz 6.2.1 für die Differenzengleichung (6.18) lautet wie folgt:

**6.3.5 Satz (Approximationssatz für Differenzengleichungen mit gekoppeltem Linearteil):** Für das System (6.18) setzen wir voraus, dass es eine reelle Konstante  $c > 0$  mit

$$1 \in (c(\alpha + 8K^3L), c(\beta - 8K^3L))$$

gibt und dass die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung

$$L < \frac{\beta - \alpha}{32K^5} (2 + 2K^2 - 2\sqrt{1 + K^4}) \quad (6.22)$$

erfüllt. Betrachten wir das durch die Spektraltransformation  $y = c^{k-k_0}x$  ( $k_0 \in \mathbb{Z}$ ) entstandene System

$$y' = c^{k+1-k_0}f(k, c^{k_0-k}y), \quad (6.23)$$

so gilt folgende Beziehung zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_1$  von System (6.23) und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{2,2}$  von System (6.18):

$$A_1(k) = c^{k-k_0}\mathcal{W}_{2,2}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Ist darüber hinaus das System (6.18) invertierbar, so gilt folgender Zusammenhang zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_2$  des zu (6.23) zeitinvertierten Systems

$$y' = c^{-k-k_0-1}f^{-1}(-k-1, c^{k_0+k}y) \quad (6.24)$$

und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,1}$  von System (6.18):

$$A_2(k) = c^{-k-k_0} \mathcal{W}_{1,1}(-k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

**Beweis:** Aus (6.22) folgt  $2KL < \frac{\beta-\alpha}{4(2K^2)^2} (2+2K^2 - \sqrt{4+4K^4})$ . Daher lässt sich Satz 6.2.1 auf das zu (6.18) kinematisch ähnlichkeitstransformierte System (6.19) anwenden. Dieser Satz besagt, dass für den globalen Pullback-Attraktor  $\tilde{A}$  des zu (6.19) spektraltransformierten Systems

$$y' = c^{k+1-k_0} S(k+1) f(k, c^{k_0-k} S^{-1}(k)y) \quad (6.25)$$

die Beziehung

$$\tilde{A}(k) = c^{k-k_0} \tilde{\mathcal{W}}_{2,2}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist. Da sich System (6.23) durch die kinematische Ähnlichkeitstransformation  $S^{-1}$  aus System (6.25) ergibt, impliziert Lemma 6.3.4 folgende Beziehung für den Pullback-Attraktor von (6.23):

$$A_1(k) = S^{-1}(k) \tilde{A}(k) = c^{k-k_0} S^{-1}(k) \tilde{\mathcal{W}}_{2,2}(k) = c^{k-k_0} \mathcal{W}_{2,2}(k) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Die entsprechende Aussage für das System (6.24) lässt sich analog nachweisen.  $\square$

### 6.3.2 Systeme von Differentialgleichungen mit gekoppeltem Linearteil

In diesem Abschnitt betrachten wir die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = B(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, x_2) \\ F_2(t, x_1, x_2) \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Hierbei sind  $B: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $F_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1}$  und  $F_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2}$  stetige Abbildungen ( $N = N_1 + N_2$ ) mit  $F_1(t, 0, 0) = 0$  und  $F_2(t, 0, 0) = 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ferner gelte:

- (1) Voraussetzungen an den Linearteil: Für den Linearteil von (6.26) gibt es einen invarianten Projektor  $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  mit  $\text{rk } P = N_1$ , so dass die Übergangsmatrix  $\Phi$  der linearen Differentialgleichung  $\dot{x} = B(t)x$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, s)P(s)\| &\leq K e^{\alpha(t-s)} \quad \text{für alle } t \geq s, \\ \|\Phi(t, s)[\mathbf{1} - P(s)]\| &\leq K e^{\beta(t-s)} \quad \text{für alle } t \leq s \end{aligned}$$

mit reellen Konstanten  $K \geq 1$  und  $\alpha < \beta$  erfüllt.

- (2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $x = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$  gilt

$$\begin{aligned} \|F_1(t, x_1, x_2) - F_1(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\| &\leq L\|x_1 - \bar{x}_1\| + L\|x_2 - \bar{x}_2\| = L\|x - \bar{x}\|, \\ \|F_2(t, x_1, x_2) - F_2(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2)\| &\leq L\|x_1 - \bar{x}_1\| + L\|x_2 - \bar{x}_2\| = L\|x - \bar{x}\|, \end{aligned}$$

wobei die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung  $0 \leq L < \frac{\beta-\alpha}{16K^3}$  erfüllt.

Für das System (6.26) schreiben wir auch kurz

$$\dot{x} = B(t)x + F(t, x) = f(t, x).$$

**6.3.6 Bemerkung:** Die Voraussetzungen an den Linearteil sind äquivalent dazu, dass das Dichotomiespektrum des linearen Systems  $\dot{x} = B(t)x$  unzusammenhängend ist bzw. dass  $\dot{x} = B(t)x$  eine nichthyperbolische exponentielle Dichotomie besitzt (siehe SIEGMUND [33, 34]).

Zur Entkopplung des Linearteils der Differentialgleichung (6.26) nutzen wir folgendes Lemma aus SIEGMUND [38] (siehe auch COPPEL [13]).

**6.3.7 Lemma (Entkopplung des Linearteils):** *Das lineare System  $\dot{x} = B(t)x$  ist vermöge einer Funktion  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbarer Matrizen kinematisch ähnlich zum linearen System*

$$\dot{x} = (\dot{S}(t)S^{-1}(t) + S(t)B(t)S^{-1}(t))x = \begin{pmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{pmatrix} x.$$

Hierbei sind  $B_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$  und  $B_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$  Matrizenfunktionen. Es gilt

$$\|S(t)\| \leq \sqrt{2}K \text{ und } \|S^{-1}(t)\| \leq \sqrt{2} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Des Weiteren erfüllen die Übergangsmatrizen  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  der linearen Differentialgleichungen  $\dot{x}_1 = B_1(t)x_1$  und  $\dot{x}_2 = B_2(t)x_2$  die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\Psi_1(t, s)\| &\leq 2K^2 e^{\alpha(t-s)} \text{ für alle } t \geq s, \\ \|\Psi_2(t, s)\| &\leq 2K^2 e^{\beta(t-s)} \text{ für alle } t \leq s. \end{aligned}$$

**Beweis:** Analog zur Vorgehensweise im Beweis von Satz 6.3.2 lässt sich Lemma 2.3 aus SIEGMUND [38] erweitern.  $\square$

Zur Entkopplung des nichtlinearen Systems (6.26) wenden wir die kinematische Ähnlichkeitstransformation  $y = S(t)x$  an (siehe auch KALKBRENNER [23, Satz 1.3.4.2, S. 78-80]). Wir erhalten

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= B_1(t)y_1 + S^{(1)}(t)F_1(t, S^{-1}(t)y) \\ \dot{y}_2 &= B_2(t)y_2 + S^{(2)}(t)F_2(t, S^{-1}(t)y), \end{aligned} \tag{6.27}$$

wobei mit  $S^{(1)}(t)$  die ersten  $N_1$  Zeilen und mit  $S^{(2)}(t)$  die letzten  $N_2$  Zeilen der Matrix  $S(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) bezeichnet sind. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 6.3.1 zeigt man, dass dieses System die Voraussetzungen aus Abschnitt 5.5 mit  $n = 2$ , den Konstanten  $2K^2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  und der Lipschitz-Konstante  $2KL$  erfüllt. Nach Satz 5.5.1 existieren die nichtautonomen Mannigfaltigkeiten  $\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}$  und  $\tilde{\mathcal{W}}_{2,2}$  für das System (6.27), die sich nach Wahl von  $\delta \in (8K^3L, \frac{\beta-\alpha}{2}]$  für jedes  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$  folgendermaßen charakterisieren lassen:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{W}}_{1,1} &= \{(\tau, \xi) : \tilde{\lambda}(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma^+ \text{-quasibeschränkt}\}, \\ \tilde{\mathcal{W}}_{2,2} &= \{(\tau, \xi) : \tilde{\lambda}(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma^- \text{-quasibeschränkt}\}. \end{aligned}$$

Der folgende Satz besagt, dass auch für das System (6.26) nichtautonome Mannigfaltigkeiten mit den entsprechenden dynamischen Charakterisierungen existieren.

**6.3.8 Satz (Existenz nichtautonomer Mannigfaltigkeiten für das System (6.26)):** Die nichtautonomen Mengen  $\mathcal{W}_{1,1}$  und  $\mathcal{W}_{2,2}$ , die durch

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{1,1}(t) &:= S^{-1}(t)\tilde{\mathcal{W}}_{1,1}(t), \\ \mathcal{W}_{2,2}(t) &:= S^{-1}(t)\tilde{\mathcal{W}}_{2,2}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

definiert sind, sind Integralmannigfaltigkeiten von System (6.26) mit

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_{1,1} &= \{(\tau, \xi) : \lambda(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma^+\text{-quasibeschränkt}\}, \\ \mathcal{W}_{2,2} &= \{(\tau, \xi) : \lambda(\cdot; \tau, \xi) \text{ ist } \gamma^-\text{-quasibeschränkt}\}\end{aligned}$$

für jede Zahl  $\gamma \in [\alpha + \delta, \beta - \delta]$ .

**Beweis:** analog Satz 6.3.3. □

Unser Ziel ist nun die Berechnung der Mengen  $\mathcal{W}_{1,1}$  und  $\mathcal{W}_{2,2}$ . Hierzu untersuchen wir das Verhalten von Pullback-Attraktoren unter kinematischen Ähnlichkeitstransformationen.

**6.3.9 Lemma (Pullback-Attraktoren unter kinematischen Ähnlichkeitstransformationen):** Gegeben seien eine differenzierbare Funktion  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N \times N}$  invertierbarer Matrizen mit  $|S| < \infty$  und eine Differenzialgleichung

$$\dot{x} = g(t, x) \tag{6.28}$$

mit einer Funktion  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ , die den Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitsatzes 1.3.5 genügt. Des Weiteren betrachten wir das kinematisch ähnlichkeitstransformierte System

$$\dot{x} = \dot{S}(t)S^{-1}(t)x + S(t)g(t, S^{-1}(t)x). \tag{6.29}$$

Dann besitzt (6.28) genau dann einen globalen Pullback-Attraktor, wenn (6.29) einen globalen Pullback-Attraktor besitzt. Ist dies der Fall, so ist der Zusammenhang zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A$  von System (6.28) und dem globalen Pullback-Attraktor  $\tilde{A}$  von System (6.29) durch

$$\tilde{A}(t) = S(t)A(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}$$

gegeben.

**Beweis:** analog Lemma 6.3.4. □

Das Analogon zu Satz 6.2.2 für Differenzialgleichungen mit gekoppeltem Linearteil lautet wie folgt:

**6.3.10 Satz (Approximationssatz für Differenzialgleichungen mit gekoppeltem Linearteil):** Für das System (6.26) setzen wir voraus, dass es eine reelle Konstante  $c$  mit

$$0 \in (c + \alpha + 8K^3L, c + \beta - 8K^3L)$$

gibt und dass die Lipschitz-Konstante  $L$  die Bedingung

$$L < \frac{\beta - \alpha}{32K^5} (2 + 2K^2 - 2\sqrt{1 + K^4})$$

erfüllt. Betrachten wir das durch die Spektraltransformation  $y = e^{c(t-t_0)}x$  ( $t_0 \in \mathbb{R}$ ) entstandene System

$$\dot{y} = cy + e^{c(t-t_0)}f(t, e^{-c(t-t_0)}y), \quad (6.30)$$

so gilt folgende Beziehung zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_1$  von System (6.30) und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{2,2}$  von System (6.26):

$$A_1(t) = e^{c(t-t_0)}\mathcal{W}_{2,2}(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Des Weiteren besteht folgender Zusammenhang zwischen dem globalen Pullback-Attraktor  $A_2$  des zu (6.30) zeitinvertierten Systems

$$\dot{y} = -cy - e^{-c(t+t_0)}f(-t, e^{c(t+t_0)}y)$$

und der Mannigfaltigkeit  $\mathcal{W}_{1,1}$  von System (6.26):

$$A_2(t) = e^{-c(t+t_0)}\mathcal{W}_{1,1}(-t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

**Beweis:** analog Satz 6.3.5. □

### 6.3.3 Verwendung von Abschneidetechniken

Nur eine sehr kleine Klasse von Systemen erfüllt die in Kapitel 5 gestellten globalen Voraussetzungen an die Nichtlinearität. Um dennoch die Existenzresultate für nichtautonome Mannigfaltigkeiten anwenden zu können, werden Systeme durch Abschneidetechniken so modifiziert, dass sie auf einer Nullumgebung unverändert bleiben und die Standardvoraussetzungen erfüllen. Auf diese Weise erhält man lokale Ergebnisse für die ursprünglichen Systeme.

Grundlegend für unsere Betrachtungen in diesem Abschnitt sind Differenzialgleichungen

$$x' = B(k)x + F(k, x) = f(k, x) \quad (6.31)$$

der Form (6.1) (mit entkoppeltem Linearteil) oder (6.18) (mit gekoppeltem Linearteil) bzw. Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = B(t)x + F(t, x) = f(t, x) \quad (6.32)$$

der Form (6.2) (mit entkoppeltem Linearteil) oder (6.26) (mit gekoppeltem Linearteil). Es gelten die an diese Gleichungen gestellten Voraussetzungen an den Linearteil (1), die Bedingungen für die Nichtlinearität seien jedoch nur auf einer quaderförmigen Nullumgebung  $Q = Q(0, r)$  ( $r \in (\mathbb{R}^+)^N$ ) erfüllt:

(2) Voraussetzungen an die Nichtlinearität: Es gilt die Abschätzung

$$\|F_i(t, x_1, \dots, x_n) - F_i(t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\| \leq L \sum_{j=1}^n \|x_j - \bar{x}_j\| = L \|x - \bar{x}\|$$

für alle  $t \in \mathbb{T}$  ( $= \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ),  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in Q$ .

Die von uns in diesem Abschnitt als Abschneidefunktionen verwendeten Quader-Retraktionen  $\rho^{(Q)} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  sind durch

$$\rho^{(Q)}(x_1, \dots, x_N) := (\rho_1(x_1), \dots, \rho_N(x_N))$$

mit

$$\rho_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho_i(x) := \begin{cases} x & : |x| \leq r_i \\ r_i \frac{x}{|x|} & : |x| > r_i \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{1, \dots, N\}$$

definiert. Anstelle von Retraktionen werden vielfach „cut-off“-Funktionen eingesetzt, insbesondere, wenn man an Glattheitsfragen interessiert ist (siehe PÖTZSCHE [28, Abschnitt 2.3]).

Das folgende Lemma besagt, dass Quader-Retraktionen einer globalen Lipschitz-Bedingung mit Lipschitz-Konstante 1 genügen:

**6.3.11 Lemma:** Für die Retraktion  $\rho^{(Q)} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  gilt

$$\|\rho^{(Q)}(x) - \rho^{(Q)}(y)\| \leq \|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

**Beweis:** Es gilt:

$$\begin{aligned} \|\rho^{(Q)}(x) - \rho^{(Q)}(y)\| &= \|(\rho_1(x_1) - \rho_1(y_1), \dots, \rho_N(x_N) - \rho_N(y_N))\| \\ &= \sum_{i=1}^N |\rho_i(x_i) - \rho_i(y_i)| \leq \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

□

Der folgende Satz beschreibt die Existenz lokaler invarianter Faserbündel für das System (6.31).

**6.3.12 Satz (lokale invariante Faserbündel von Differenzgleichungen):**

Gegeben sei eine nichtautonome Differenzgleichung der Form (6.31). Dann gibt es lokale Faserbündel  $\mathcal{W}_{i,j}^{loc}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ), die im folgenden Sinne invariant sind: Ist  $(\kappa, \xi) \in \mathcal{W}_{i,j}^{loc}$ , so gilt  $(k_0, \lambda(k_0; \kappa, \xi)) \in \mathcal{W}_{i,j}^{loc}$  für  $k_0 \geq k$ , falls  $\lambda(k; \xi) \in Q(0, r)$  für alle  $\kappa \leq k \leq k_0$ . Ist (6.31) invertierbar, so gilt diese Aussage auch für  $k_0 < \kappa$ .

**Beweis:** Wir betrachten die Differenzengleichung

$$x' = B(k)x + \tilde{F}(k, x), \quad (6.33)$$

wobei  $\tilde{F} : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  durch  $\tilde{F}(k, x) := F(k, \rho^{(Q)}(x))$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$  und  $x \in \mathbb{R}^N$  definiert ist. Dieses System erfüllt die globalen Voraussetzungen an die Nichtlinearität, denn es gilt

$$\begin{aligned} \|\tilde{F}(k, x) - \tilde{F}(k, \bar{x})\| &= \|F(k, \rho^{(Q)}(x)) - F(k, \rho^{(Q)}(\bar{x}))\| \\ &\leq L\|\rho^{(Q)}(x) - \rho^{(Q)}(\bar{x})\| \stackrel{6.3.11}{\leq} L\|x - \bar{x}\| \end{aligned}$$

für alle  $x, \bar{x} \in \mathbb{R}^N$ . Wir erhalten daher aufgrund der Sätze 5.3.1 oder 6.3.3 die invarianten Faserbündel  $\mathcal{W}_{i,j}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) und definieren

$$\mathcal{W}_{i,j}^{loc}(k) := Q(0, r) \cap \mathcal{W}_{i,j}(k) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq j \leq n \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Diese Mengen sind im obigen Sinne invariant, da  $\mathcal{W}_{i,j}$  unter System (6.33) invariant ist und die Systeme (6.31) und (6.33) auf der Menge  $\mathbb{Z} \times Q(0, r)$  übereinstimmen.  $\square$

Für Differenzialgleichungen erhalten wir das folgende analoge Resultat:

**6.3.13 Satz (lokale Integralmannigfaltigkeiten von Differenzialgleichungen):** Gegeben sei eine nichtautonome Differenzialgleichung der Form (6.32). Dann gibt es lokale Integralmannigfaltigkeiten  $\mathcal{W}_{i,j}^{loc}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ), die im folgenden Sinne invariant sind: Ist  $(\tau, \xi) \in \mathcal{W}_{i,j}^{loc}$ , so gilt  $(t_0, \lambda(t_0; \kappa, \xi)) \in \mathcal{W}_{i,j}^{loc}$  für  $t_0 \in \mathbb{R}$ , falls  $\lambda(t; \xi) \in Q(0, r)$  für alle  $\tau \leq t \leq t_0$  ( $t_0 \geq \tau$ ) bzw.  $t_0 \leq t \leq \tau$  ( $t_0 \leq \tau$ ) gilt.

**Beweis:** analog Satz 6.3.12.  $\square$

Das folgende Beispiel illustriert die Verwendung von Spektraltransformationen und Abschneidetechniken anhand einer dreidimensionalen Differenzialgleichung.

**6.3.14 Beispiel:** Für die dreidimensionale nichtautonome Differenzialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \cos(t)(x^2 + y^2 + z^2) \\ \dot{y} &= \arctan(t)(x^2 + z^2) \\ \dot{z} &= z + \arctan(t)y^2 \end{aligned}$$

berechnen wir nun mit der in diesem Kapitel entwickelten Theorie in einer hinreichend kleinen Nullumgebung Fasern einer zentral-stabilen und zentral-instabilen Mannigfaltigkeit, sowie einer Zentrumsmanigfaltigkeit. Mit den Werten  $n = 3$ ,  $\alpha_1 = -1$ ,  $\beta_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ ,  $\beta_2 = 1$  und  $K = 1$  sind die Standardvoraussetzungen an den Linearteil dieser Gleichung erfüllt. Die Voraussetzungen an die Nichtlinearität gelten aufgrund des Mittelwertsatzes innerhalb des 3-Quaders  $Q = Q((0, 0, 0), (0.03, 0.03, 0.03))$ . Die in den Abbildungen 6.6 bis 6.8 dargestellten Fasern einer zentral-stabilen und zentral-instabilen Mannigfaltigkeit wurden mit dem Unterteilungsalgorithmus approximiert. Hierbei wurde das System zunächst, wie im Beweis von Satz 6.3.12 beschrieben, durch die Retraktion  $\rho^{(Q)}$  modifiziert. Anschließend wurden die Mannigfaltigkeiten gemäß Satz 6.2.2 unter Anwendung

von Spektraltransformationen mit  $c := 0.5$  (für die zentral-instabile Mannigfaltigkeit) und  $c := -0.5$  (für die zentral-stabile Mannigfaltigkeit) berechnet. Die in der Abbildung 6.9 dargestellten Fasern einer Zentrumsmannigfaltigkeit ergaben sich als Schnitte der entsprechenden Fasern der zentral-stabilen und der zentral-instabilen Mannigfaltigkeit.

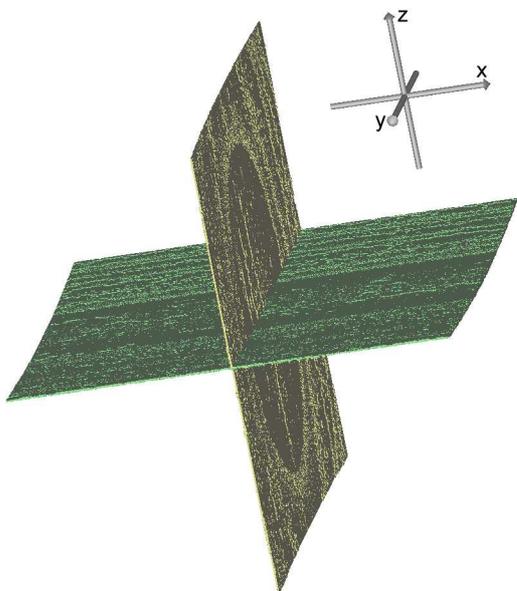


Abbildung 6.6:  $-5$ -Faser einer zentral-stabilen und zentral-instabilen Mannigfaltigkeit

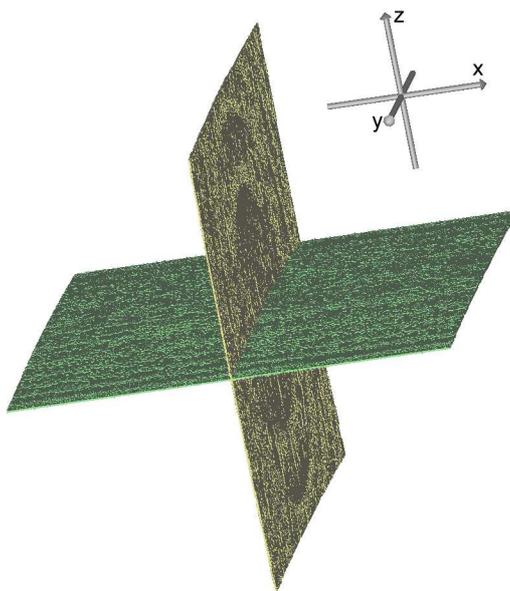


Abbildung 6.7:  $0$ -Faser einer zentral-stabilen und zentral-instabilen Mannigfaltigkeit

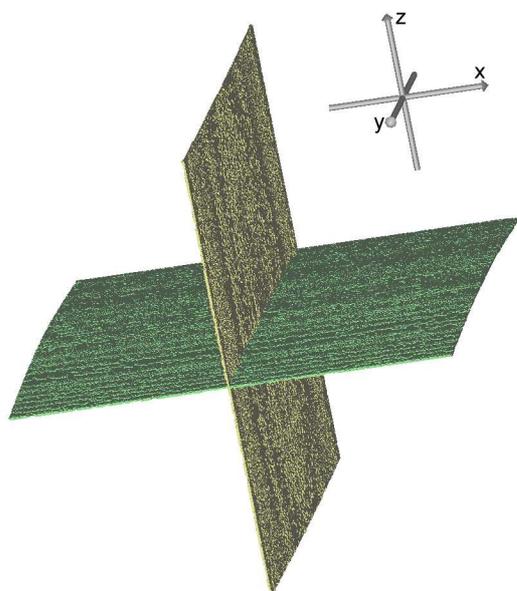


Abbildung 6.8:  $5$ -Faser einer zentral-stabilen und zentral-instabilen Mannigfaltigkeit

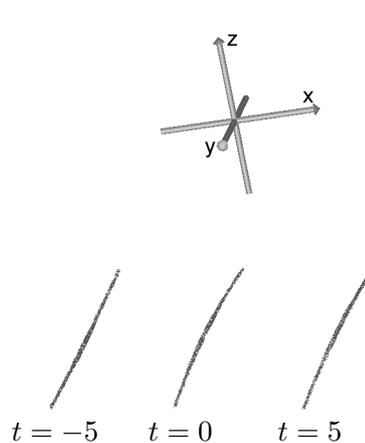


Abbildung 6.9: Fasern einer Zentrumsmannigfaltigkeit

**6.3.15 Bemerkungen:**

- (i) Für Systeme der Form (6.31) oder (6.32) sind Zentrumsmannigfaltigkeiten und Mannigfaltigkeiten, die Zentrumsmannigfaltigkeiten enthalten (wie beispielsweise zentral-stabile und zentral-instabile Mannigfaltigkeiten) im Allgemeinen selbst lokal nicht eindeutig (siehe AULBACH [2, Beispiel 8.5.8] oder HALE, KOÇAK [21, Example 10.13]). Die Zentrumsmannigfaltigkeit eines durch eine Abschneidefunktion modifizierten Systems ist jedoch eindeutig. Verschiedene Abschneidetechniken liefern in der Regel verschiedene Zentrumsmannigfaltigkeiten. In CHOW, LI, WANG [12, Chapter 1, Theorem 3.6] wird für autonome Differenzialgleichungen gezeigt, dass es für jede Zentrumsmannigfaltigkeit eine Abschneidefunktion gibt, so dass die globale Zentrumsmannigfaltigkeit des modifizierten Systems lokal mit der vorgegebenen Zentrumsmannigfaltigkeit übereinstimmt.
- (ii) Die Definition von globalen Mannigfaltigkeiten für Systeme der Form (6.31) oder (6.32) ist nur für Mannigfaltigkeiten, die nicht die Zentrumsmannigfaltigkeit enthalten, problemlos durchführbar. Hierbei wählt man entweder den Weg über die dynamische Charakterisierung dieser Mannigfaltigkeiten oder man betrachtet die globalen Mannigfaltigkeiten als Fortsetzung der lokalen Mannigfaltigkeiten. Bei zentralen Mannigfaltigkeiten sind solche Konzepte nicht möglich (siehe AULBACH [2, Beispiel 8.5.6]). Statt dessen fordert man für autonome zentrale Mannigfaltigkeiten Invarianz und Tangentialität zu dem entsprechenden linearen Unterraum. Eine nichtautonome Verallgemeinerung ist mit den in AULBACH, SIEGMUND [7, 8] bzw. SIEGMUND [33, 34] eingeführten linearen Spektralmanigfaltigkeiten möglich.



# Kapitel 7

## Beispiele

In diesem Kapitel betrachten wir zwei klassische Beispiele aus der Theorie der dynamischen Systeme. In Abschnitt 7.1 berechnen wir eine stabile und eine stark stabile Mannigfaltigkeit des Lorenz-Systems. Für die periodisch angeregte Duffing-van-der-Pol-Gleichung weisen wir in Abschnitt 7.2 numerisch die Verzweigung eines nichtautonomen Attraktors nach.

### 7.1 Approximation einer stark stabilen Mannigfaltigkeit des Lorenz-Systems

Das von dem Meteorologen Lorenz 1963 vorgeschlagene dreidimensionale autonome System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= -\beta z + xy\end{aligned}$$

hat für den Parameterbereich  $\beta > 0$  und  $\rho > 1$  die drei Ruhelagen  $r_1 := (0, 0, 0)$ ,  $r_2 := (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$  und  $r_3 := (-\sqrt{\beta(\rho - 1)}, -\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$  (siehe GUCKENHEIMER, HOLMES [19, Chapter 2.3]). Die Linearisierung des Systems in der Ruhelage  $r_1$  beträgt

$$D = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta \end{pmatrix}.$$

Für die von Lorenz vorgeschlagene Parameterkonstellation  $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$  und  $\beta = \frac{8}{3}$  hat  $D$  die Eigenwerte  $\lambda_1 \approx -22.8$ ,  $\lambda_2 \approx -2.7$  und  $\lambda_3 \approx 11.8$ . Die stabile Mannigfaltigkeit des Ursprungs hat daher die Dimension zwei. Sie hat eine eindimensionale, zum Eigenwert  $\lambda_1$  gehörige, stark stabile Untermannigfaltigkeit. Zur Berechnung dieser beiden Mannigfaltigkeiten approximieren wir in der Hauptbox  $Q = Q((0, 0, 0), (25, 25, 25))$  die Pullback-Attraktoren des zeitinvertierten Systems aus Satz 6.1.2 und des zeitinvertiert und spektraltransformierten Systems aus Satz 6.2.2 ( $c := 3$ ). Da das Lorenz-System

nicht die Voraussetzungen dieser beiden Sätze erfüllt, ist es nicht gesichert, dass die in der folgenden Abbildung dargestellten Berechnungsergebnisse den von uns betrachteten Mannigfaltigkeiten entsprechen.

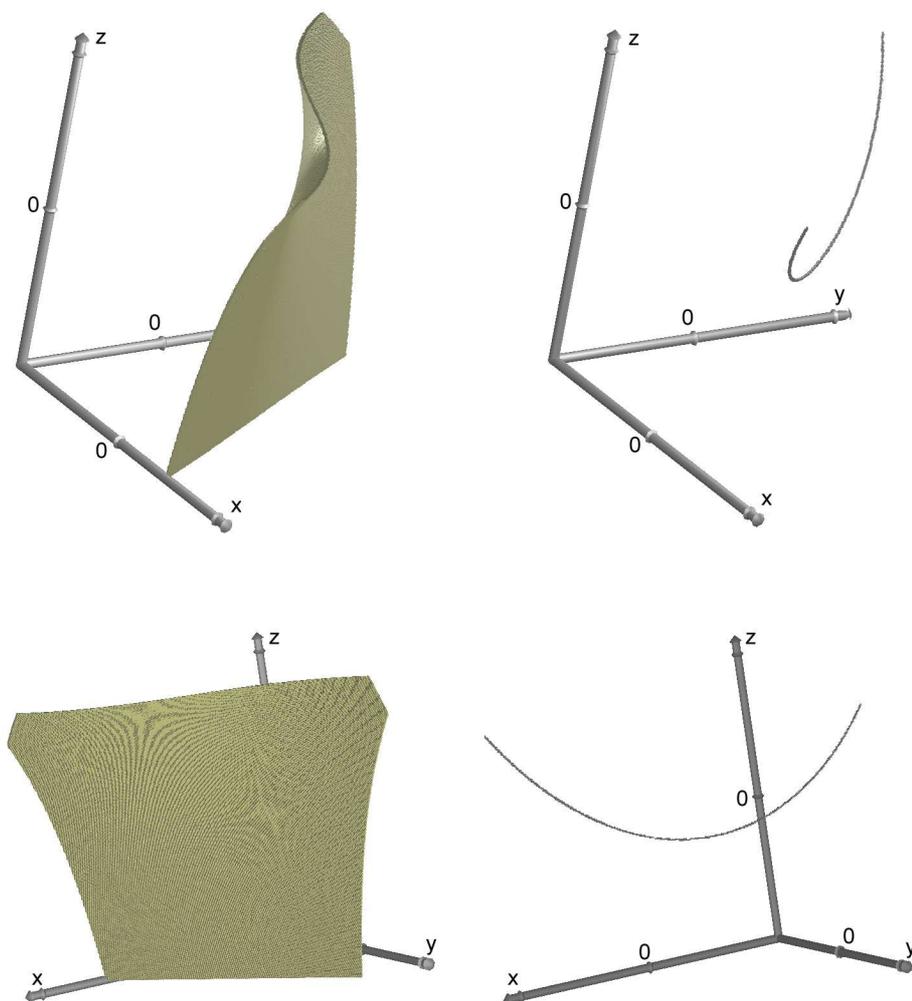


Abbildung 7.1: stabile und stark stabile Mannigfaltigkeit der Ruhelage  $r_1$  aus zwei verschiedenen Perspektiven

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Berechnung dieser Mannigfaltigkeiten mit rein autonomer Theorie nicht möglich ist, da die Spektraltransformationen das Lorenz-System in ein nichtautonomes System überführen.

## 7.2 Verzweigung nichtautonomer Attraktoren bei der Duffing-van-der-Pol-Gleichung

Wir betrachten die von den Parametern  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  abhängige Duffing-van-der-Pol-Gleichung

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \beta x_2 - x_1^2(x_1 + x_2) + \alpha \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right).\end{aligned}$$

Diese Differenzialgleichung beschreibt einen nichtlinearen Oszillator. Für die Duffing-van-der-Pol-Gleichung ohne periodische Anregung ( $\alpha = 0$ ) ist es bekannt (siehe HOLMES, RAND [22]), dass für Werte  $\beta \leq 0$  die Ruhelage  $(0, 0)$  asymptotisch stabil ist. Bei  $\beta = 0$  findet eine Hopf-Verzweigung statt. Die Ruhelage  $(0, 0)$  wird instabil und verzweigt in einen asymptotisch stabilen periodischen Orbit. Dies bedeutet, dass auch eine Verzweigung von Attraktoren stattfindet. Für Werte  $\beta \leq 0$  ist  $\{0\}$  ein lokaler Attraktor des Systems. Ist  $\beta > 0$ , so ist das Innengebiet des periodischen Orbits ein lokaler Attraktor. Die Abbildungen 7.2 bis 7.4, in denen der autonome Attraktor für die Werte  $\beta = -0.2, 0, 0.2$  mit dem Unterteilungsalgorithmus berechnet wurde, verdeutlichen dies.

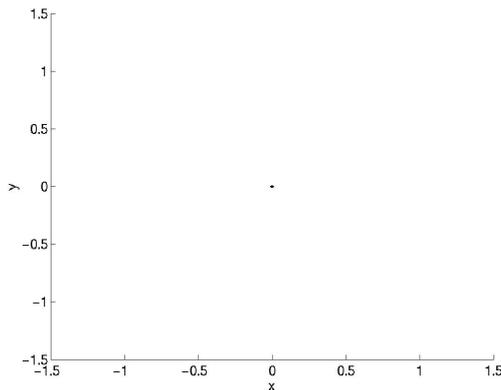


Abbildung 7.2: Approximation des Attraktors ( $\alpha = 0, \beta = -0.2$ )

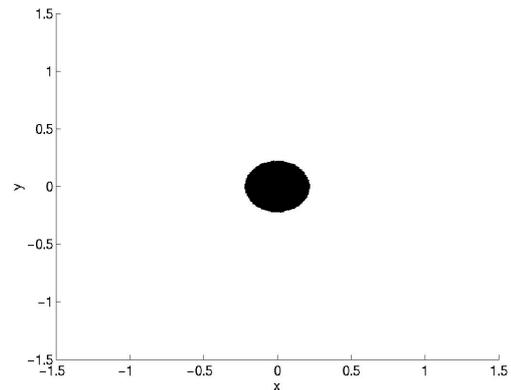


Abbildung 7.3: Approximation des Attraktors ( $\alpha = 0, \beta = 0$ )

Aufgrund der theoretischen Resultate müssten die Abbildungen 7.2 und 7.3 identisch sein. Da die Ruhelage  $(0, 0)$  für den Parameterwert  $\beta = 0$  nicht hyperbolisch ist, ist die Konvergenz des Unterteilungsalgorithmus sehr schlecht. Obwohl eine sehr große Schrittweite  $T$  des Verfahrens gewählt wurde, ist in diesem Fall die Approximation nicht zufriedenstellend.

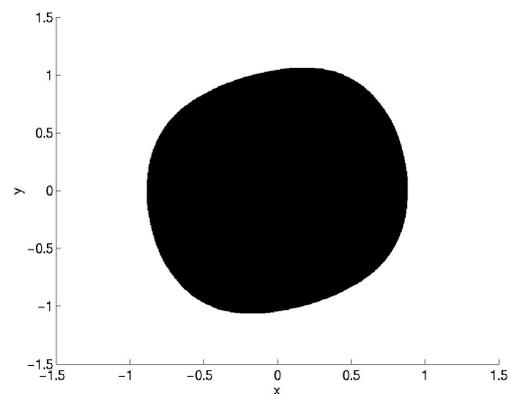


Abbildung 7.4: Approximation des Attraktors ( $\alpha = 0, \beta = 0.2$ )

Für die mit dem Parameter  $\alpha := 0.25$  periodisch angeregte Gleichung wollen wir nun untersuchen, ob das Verzweigungsszenario prinzipiell erhalten bleibt. Hierzu berechnen wir den Pullback-Attraktor dieser Gleichung im erweiterten Phasenraum in dem 3-Quader  $Q((0, 0, 0), (2, 2, 2))$ . Wie die folgenden Abbildungen zeigen, bewirkt die periodische Anregung, dass die Ruhelage in einen periodischen Orbit übergeht. Dieser ist für kleine Werte  $\beta$  asymptotisch stabil und wird bei Anwachsen von  $\beta$  instabil. Die Fasern des Pullback-Attraktors verzweigen von einem Punkt zu einer sich periodisch ändernden Scheibe.

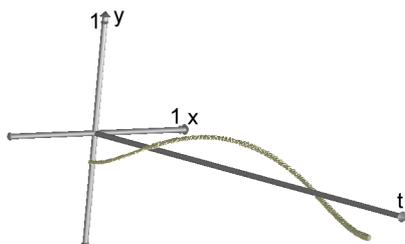


Abbildung 7.5: Approximation des Pullback-Attraktors ( $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = -0.2$ )

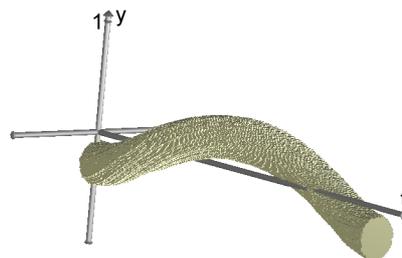


Abbildung 7.6: Approximation des Pullback-Attraktors ( $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0$ )

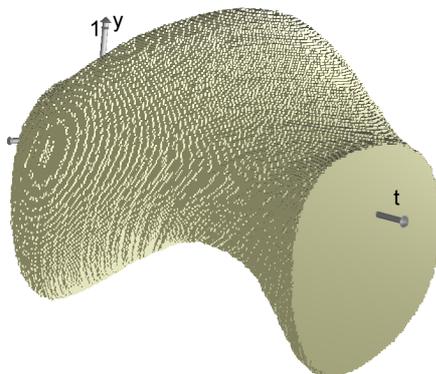


Abbildung 7.7: Approximation des Pullback-Attraktors ( $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 0.2$ )

# Literaturverzeichnis

- [1] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*. Springer, Berlin Heidelberg New York (1998).
- [2] B. Aulbach, *Qualitative Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Fern-Universität Hagen (1996).
- [3] B. Aulbach, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg (1997).
- [4] B. Aulbach, *The Fundamental Existence Theorem on Invariant Fiber Bundles*. Journal of Difference Equations and Applications **3** (1998), 501-537.
- [5] B. Aulbach, *Vorlesung „Differenzgleichungen und diskrete Dynamik I“*. Universität Augsburg, Wintersemester 2000/2001.
- [6] B. Aulbach, *Vorlesung „Differenzgleichungen und diskrete Dynamik II“*. Universität Augsburg, Sommersemester 2001.
- [7] B. Aulbach, S. Siegmund, *A Spectral Theory for Nonautonomous Difference Equations*. Proceedings of the Fifth Conference on Difference Equations and Applications, Temuco/Chile 2000, Gordon & Breach Publishers (2000).
- [8] B. Aulbach, S. Siegmund, *The dichotomy spectrum for noninvertible systems of linear difference equations*. Journal of Difference Equations and Applications **7** (2001), 895-913.
- [9] B. Aulbach, T. Wanner, *Integral Manifolds for Carathéodory Type Differential Equations in Banach Spaces*. In: B. Aulbach & F. Colonius (eds.), Six Lectures on Dynamical Systems. World Scientific, Singapore (1996).
- [10] B. Aulbach, T. Wanner, *Invariant Foliations for Carathéodory Type Differential Equations in Banach Spaces*. In: V. Lakshmikantham & A. A. Martynyuk (eds.), Advances of Stability Theory at the End of XX Century. Gordon & Breach Publishers (1999).
- [11] B. Aulbach, T. Wanner, *Invariant Foliations and Decoupling of Nonautonomous Difference Equations*. erscheint in: Journal of Difference Equations and Applications.
- [12] S.-N. Chow, C. Li, D. Wang, *Normal Forms and Bifurcation of Planar Vector Fields*. Cambridge University Press (1994).

- [13] W. A. Coppel, *Dichotomies in Stability Theory* (Springer Lecture Notes in Mathematics 629). Springer, Berlin Heidelberg New York (1978).
- [14] H. Crauel, A. Debusche, F. Flandoli, *Random Attractors*. Journal of Dynamics and Differential Equations **9** (1997), 307-341.
- [15] H. Crauel, F. Flandoli, *Attractors for random dynamical systems*. Probability Theory and Related Fields **100** (1994), 365-393.
- [16] M. Dellnitz, A. Hohmann, *The Computation of Unstable Manifolds Using Subdivision and Continuation*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications **19**, Birkhäuser (1996).
- [17] M. Dellnitz, A. Hohmann, *A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors*. Numerische Mathematik **75** (1997), 293-317.
- [18] M. Dellnitz, G. Froyland, O. Junge, *The algorithms behind GAIO - Set oriented numerical methods for dynamical systems*. In: B. Fiedler (ed.): Ergodic theory, analysis, and efficient simulation of dynamical systems. Springer (2001).
- [19] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York (1983).
- [20] E. Hairer, S. P. Nørsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I. Non-stiff Problems*. Springer (1987).
- [21] J. Hale, H. Koçak, *Dynamics and Bifurcations*. Springer, New York (1991).
- [22] P. Holmes, D. Rand, *Phase portraits and bifurcations of the nonlinear oscillator  $\ddot{x} + (\alpha + \gamma x^2)\dot{x} + \beta x + \delta x^3 = 0$* . International Journal of Non-Linear Mechanics **15** (1980), 449-458.
- [23] J. Kalkbrenner, *Nichthyperbolische exponentielle Dichotomie*. Diplomarbeit, Universität Augsburg (1992).
- [24] H. Keller, G. Ochs, *Numerical approximation of random attractors*. In: H. Crauel & M. Gundlach (eds.), Stochastic Dynamics, Springer, Berlin Heidelberg New York (1999).
- [25] P. E. Kloeden, *Pullback Attractors in Nonautonomous Difference Equations*. Journal of Difference Equations and Applications **6** (2000), 91-102.
- [26] P. E. Kloeden, H. Keller, B. Schmalfuß, *Towards a Theory of Random Numerical Dynamics*. In: H. Crauel & M. Gundlach (eds.), Stochastic Dynamics, Springer, Berlin Heidelberg New York (1999).
- [27] P. E. Kloeden, V. S. Kozyakin, *The inflation of nonautonomous systems and their pullback attractors*. DANSE 14/2000.
- [28] C. Pötzsche, *Nichtautonome Differenzgleichungen mit stationären und invarianten Mannigfaltigkeiten*. Diplomarbeit, Universität Augsburg (1998).

- [29] C. Robinson, *Dynamical Systems*. CRC Press (1995).
- [30] D. Ruelle, *Strange attractors*. Math. Intelligencer **2** (1980), 126-137.
- [31] D. Ruelle, *Small random perturbations of dynamical systems and the definition of attractors*. Communications in Mathematical Physics **82** (1981), 137-151.
- [32] R. J. Sacker, G. R. Sell, *Existence of Dichotomies and Invariant Splittings for Linear Differential Systems I*. Journal of Differential Equations **15** (1974), 429-458.
- [33] S. Siegmund, *Spektral-Theorie, glatte Faserungen und Normalformen für Differentialgleichungen vom Carathéodory-Typ*. Doktorarbeit, Universität Augsburg (1999).
- [34] S. Siegmund, *Dichotomy Spectrum for Nonautonomous Differential Equations*. Journal of Dynamics and Differential Equations **14** (2002).
- [35] S. Siegmund, *Emmy-Noether-Antrag*. (2001).
- [36] S. Siegmund, *Computation of Nonautonomous Invariant Manifolds*. erscheint in: Proceedings of ICDEA 2001.
- [37] S. Siegmund, *Block Diagonalization of Linear Difference Equations*. erscheint in: Journal of Difference Equations and Applications.
- [38] S. Siegmund, *Reducibility of nonautonomous linear differential equations*. Journal of the London Mathematical Society **65** (2002), 397-410.
- [39] T. Sienz, *Attraktoren in dynamischen Systemen*. Staatsexamensarbeit, Universität Augsburg (2002).
- [40] T. Wanner, *Invariante Faserbündel und topologische Äquivalenz bei dynamischen Prozessen*. Diplomarbeit, Universität Augsburg (1991).



# Index

- allgemeine Lösung einer
  - Differenzgleichung, 9
  - Differenzialgleichung, 13
- Attraktionssystem, 23
- Attraktor, 23
  
- Box-DS, 58
- Box-NDS, 35
  
- Differenzgleichung, 7
- Differenzgleichung der gestörten Bewegung, 11
- Differenzialgleichung, 11
- Differenzialgleichung der gestörten Bewegung, 15
- dynamisches System, 15
  
- Faser einer nichtautonomen Menge, 25
- Fortsetzungsalgorithmus, 36
- Forward-Attraktionssystem, 27
- Forward-Attraktor, 27
  
- horizontale Faserung, 72, 80
- Hyperbolizität, 76, 82
  
- instabile Mannigfaltigkeit, 76, 82
- Integralmannigfaltigkeit, 77
- invariante Faserbündel, 68
- invarianter Projektor einer linearen
  - Differenzgleichung, 10
  - Differenzialgleichung, 14
- Invarianz
  - autonomer Mengen, 21
  - nichtautonomer Mengen, 25
  
- kinematische Ähnlichkeit von linearen
  - Differenzgleichungen, 10
  - Differenzialgleichungen, 14
- kompakte Erzeugbarkeit
  - autonomer Mengen, 22
  - nichtautonomer Mengen, 26
- Kozyklus-Eigenschaft der allgemeinen Lösung einer
  - Differenzgleichung, 9
  - Differenzialgleichung, 13
  
- nichtautonome Menge, 25
- nichtautonomes dynamisches System, 17
  
- Pullback-Attraktionssystem, 27
- Pullback-Attraktor, 27
  
- Quader, 34
- Quasibeschränktheit, 66
  
- Retraktion, 106
  
- Schiefproduktfluss, 18
- Spektraltransformation, 92, 94
- stabile Mannigfaltigkeit, 76, 82
  
- Unterteilungsalgorithmus, 44, 59
  
- vertikale Faserung, 72, 80
  
- Zerlegung, 34